УДК 512.64

В. Р. Зеліско, Г. В. Зеліско✉

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ТА ФАКТОРИЗАЦІЮ КРОНЕКЕРІВСЬКОГО ДОБУТКУ МАТРИЦЬ

Досліджено еквівалентність кронекерівських добутків матриць над комутативною областю головних ідеалів і факторизацію кронекерівського добутку поліноміальних матриць.

Ключові слова: *кронекерівський добуток матриць, еквівалентність матриць, матриці простої структури, факторизація матриць, лінійні множники поліноміальної матриці.*

Історія вивчення еквівалентності матриць над кільцями достатньо повно висвітлена в монографії [3]. Факторизації матриць, зокрема поліноміальних, присвячено чимало праць, фундаментальною з яких є [1].

Нижче деякі результати і розроблені методи досліджень застосовано до вивчення структури і розкладності на множники кронекерівського добутку матриць.

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $A \in M_m(R)$, $B \in M_n(R)$ – неособливі матриці. Кронекерівський добуток матриць визначають як матрицю $A \otimes B = (a_{ij}B)$ [2, 4].

Твердження 1. Якщо матриця A еквівалентна до деякої матриці $A_1 \in M_m(R)$, а матриця B – до $B_1 \in M_n(R)$, то кронекерівський добуток $A \otimes B$ еквівалентний до $A_1 \otimes B_1$.

Д о в е д е н н я. За означенням еквівалентності матриць, якщо A_1 еквівалентна до A, то існують такі оборотні матриці $P_1, Q_1 \in GL_m(R)$, що

$$A_1 = P_1 A Q_1 .$$

Аналогічно для матриць B та B_1 існують такі оборотні матриці $P_2, Q_2 \in GL_n(R)$, що

$$B_1 = P_2 B Q_2 .$$

Використовуючи властивості кронекерівського добутку матриць, зокрема рівність

$$(X_1 \otimes Y_1)(X_2 \otimes Y_2)\ldots(X_k \otimes Y_k) = (X_1 X_2 \ldots X_k) \otimes (Y_1 Y_2 \ldots Y_k) , \qquad (1)$$

де $X_i \in M_m(R)$, $Y_i \in M_n(R)$ [2], одержимо співвідношення

$$A_1 \otimes B_1 = (P_1 \otimes P_2)(A \otimes B)(Q_1 \otimes Q_2) .$$

Оскільки $P_1 \otimes P_2$ та $Q_1 \otimes Q_2$ – оборотні матриці, то твердження доведено.

Наслідок. Кронекерівський добуток матриць $A \otimes B$ еквівалентний до кронекерівського добутку їх канонічних діагональних форм $S_A \otimes S_B$.

Обернене твердження неправильне. З того, що $A \otimes B$ та $A_1 \otimes B_1$ еквівалентні, не випливає, що матриця A_1 еквівалентна до A та матриця B_1 – до B. Справді, матриці

✉ zelisko_halyna@yahoo.com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

не еквівалентні над кільцем $\mathbb{Z}$, але їхні кронекерівські добутки

$$A \otimes B = \mathrm{diag}(1, 3, 2, 6) \text{ та } B \otimes A = \mathrm{diag}(1, 2, 3, 6)$$

одержують один з одного переставлянням другого та третього рядків та стовпців, а тому вони еквівалентні.

Проте правильним є такий результат.

Теорема 1. Якщо матриці $A_1, A_2 \in M_m(R)$ еквівалентні і кронекерівський добуток $A_1 \otimes B_1$ еквівалентний до $A_2 \otimes B_2$ для деяких матриць $B_1, B_2 \in M_n(R)$, то матриці B_1 та B_2 еквівалентні.

Д о в е д е н н я. Якщо матриця A_1 еквівалентна до матриці A_2, то існують такі оборотні матриці $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in GL_m(R)$, що

$$P_1 A_1 Q_1 = S \text{ та } P_2 A_2 Q_2 = S,$$

де S – канонічна діагональна форма матриць A_1 та A_2. Звідси

$$A_1 = P_1^{-1} S Q_1^{-1},$$

$$A_2 = P_2^{-1} S Q_2^{-1}.$$

Оскільки кронекерівський добуток $P_1^{-1} S Q_1^{-1} \otimes B_1$ еквівалентний до $P_2^{-1} S Q_2^{-1} \otimes B_2$, то, враховуючи властивість (1), отримаємо, що

$$P_1^{-1} S Q_1^{-1} \otimes B_1 = P_1^{-1} S Q_1^{-1} \otimes E B_1 E = (P_1^{-1} \otimes E)(S \otimes B_1)(Q_1^{-1} \otimes E)$$

еквівалентна до

$$P_2^{-1} S Q_2^{-1} \otimes B_2 = P_2^{-1} S Q_2^{-1} \otimes E B_2 E = (P_2^{-1} \otimes E)(S \otimes B_2)(Q_2^{-1} \otimes E),$$

де E – одинична матриця порядку n.

Враховуючи те, що $P_1^{-1} \otimes E$, $Q_1^{-1} \otimes E$, $P_2^{-1} \otimes E$, $Q_2^{-1} \otimes E$ – оборотні матриці порядку mn, отримуємо, що матриця $S \otimes B_1$ еквівалентна до $S \otimes B_2$. За теоремою з праці [5] матриця B_1 еквівалентна до B_2. Теорему доведено.

Зауважимо, що теорема неправильна за звичайного множення матриць.

Далі розглядатимемо питання про еквівалентність та факторизацію кронекерівського добутку поліноміальних матриць $A(x) \in M_m(F[x])$ та $B(x) \in M_n(F[x])$, де F – алгебрично замкнене поле характеристики ноль. Нехай

$$A(x) = \sum_{i=1}^{s_1} A_i x^{s_1 - i}, \quad B(x) = \sum_{i=1}^{s_2} B_i x^{s_2 - i}$$

– запис матриць $A(x)$ та $B(x)$ у вигляді матричних многочленів. Матрицю $A(x)$ називають регулярною, якщо A_0 – неособлива матриця, і унітальною, якщо $A_0 - E$ – одинична матриця [1].

Зобразимо канонічні діагональні форми матриць $A(x)$ та $B(x)$ у вигляді

$$S_A = \begin{pmatrix} (x-\alpha_1)^{k_{11}}\dots(x-\alpha_r)^{k_{1r}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x-\alpha_1)^{k_{21}}\dots(x-\alpha_r)^{k_{2r}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (x-\alpha_1)^{k_{m1}}\dots(x-\alpha_r)^{k_{mr}} \end{pmatrix},$$

де $k_{1i} \le k_{2i} \le \cdots \le k_{mi}$, $i = 1, 2, \dots, r$, а

$$S_B = \begin{pmatrix} (x-\alpha_1)^{\ell_{11}}\dots(x-\alpha_r)^{\ell_{1r}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x-\alpha_1)^{\ell_{21}}\dots(x-\alpha_r)^{\ell_{2r}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (x-\alpha_1)^{\ell_{n1}}\dots(x-\alpha_r)^{\ell_{nr}} \end{pmatrix},$$

де $\ell_{1i} \le \ell_{2i} \le \cdots \le \ell_{ni}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Тут $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ − попарно різні корені характеристичного многочлена $\det(A(x) \otimes B(x)) = (\det A(x))^n (\det B(x))^m$.

Використовуючи наслідок до твердження 1, отримуємо такий результат.

Твердження 2. Елементарні дільники кронекерівського добутку матриць $A(x)$ та $B(x)$ мають вигляд $(x-\alpha_i)^{k_{ij}+\ell_{ij}}$.

Означення. Поліноміальну матрицю $A(x)$ називають матрицею простої структури, якщо всі її елементарні дільники лінійні.

З вигляду матриці S_A випливає, що неособлива поліноміальна матриця $A(x)$ має просту структуру тоді і тільки тоді, коли для кожного кореня α_i її характеристичного многочлена $\det A(x)$ кратність k_i цього кореня дорівнює дефекту матриці $A(\alpha_i)$, тобто

$$\operatorname{rang} A(\alpha_i) = n - k_i .$$

Теорема 2. Якщо $A(x)$ та $B(x)$ − поліноміальні матриці простої структури, то $A(x) \otimes B(x)$ − поліноміальна матриця простої структури тоді і тільки тоді, коли $(\det A(x), \det B(x)) = 1$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Якщо $A(x)$ та $B(x)$ − матриці простої структури, то в матрицях S_A та S_B для кожного кореня α_i маємо $k_{ij} = 0$ або $k_{ij} = 1$. Згідно з твердженням 2, якби многочлени $\det A(x)$ та $\det B(x)$ мали хоча б один спільний корінь, то матриця $A(x) \otimes B(x)$ мала б нелінійний елементарний дільник, а тому не була б матрицею простої структури.

Достатність. Якщо $A(x)$ та $B(x)$ − матриці простої структури і $(\det A(x), \det B(x)) = 1$, то матриця $A(x) \otimes B(x)$ еквівалентна до $S_A \otimes S_B$, всі елементарні дільники якої лінійні. Теорему доведено.

Задачі про розкладність поліноміальних матриць на множники вивчали багато авторів, зокрема в працях [1, 2]. Розглянемо деякі результати про розкладність на множники кронекерівського добутку поліноміальних матриць.

Теорема 3. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ − неособливі поліноміальні матриці, хоча б одна з яких регулярна. Тоді з матриці $A(x) \otimes B(x)$ завжди виділяється лівий регулярний множник.

Д о в е д е н н я. Якщо $A(x)$ − регулярна поліноміальна матриця, то за властивістю (1) кронекерівського добутку

$$A(x)\otimes B(x)=(A(x)\otimes E_n)(E_m\otimes B(x)), \qquad (2)$$

де $A(x)\otimes E_m$ − регулярна матриця, якщо E_m − одинична матриця порядку m.

Якщо ж $B(x)$ регулярна поліноміальна матриця, то знову згідно з (1)

$$A(x)\otimes B(x)=(E_m\otimes B(x))(A(x)\otimes E_n), \qquad (3)$$

а тому матриця $A(x)\otimes B(x)$ містить регулярний множник $E_m\otimes B(x)=\operatorname{diag}(B(x),\ldots,B(x))$, який, як бачимо, має клітково-діагональний вигляд. Теорему доведено.

Зауважимо, що розклади (2) і (3) в умовах теореми 3 існують незалежно від структурних властивостей матриць $A(x)$ і $B(x)$, а тому називатимемо їх тривіальними. Очевидно, що матриця $A(x)\otimes B(x)$ може мати інші розклади на множники, чи для $A(x)\otimes B(x)$ може не існувати лівих регулярних множників з певними властивостями.

Лема. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ − унітальні поліноміальні матриці простої структури, E − одинична матриця. Тоді $A(x)\otimes E$ та $E\otimes B(x)$ − унітальні матриці простої структури.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що $A(x)\otimes E$ та $E\otimes B(x)$ − унітальні, і оскільки $(\det A(x),\det E)=1$ і $(\det B(x),\det E)=1$, то за теоремою 2 вони є матрицями простої структури.

Теорема 4. Кронекерівський добуток унітальних поліноміальних матриць простої структури разкладається в добуток лінійних унітальних множників простої структури.

Д о в е д е н н я. Для кронекерівського добутку $A(x)\otimes B(x)$ застосуємо тривіальний розклад (2), в якому, згідно з лемою, матриці $A(x)\otimes E_n$ та $E_m\otimes B(x)$ є унітальними простої структури, а тому за теоремою з праці [1] розкладаються в добуток лінійних унітальних множників простої структури:

$$A(x)\otimes E_n=(Ex-C_1)(Ex-C_2)\ldots(Ex-C_{s_1n}),$$

$$E_m\otimes B(x)=(Ex-D_1)(Ex-D_2)\ldots(Ex-D_{s_2m}).$$

Звідси отримуємо шуканий розклад:

$$A(x)\otimes B(x)=(Ex-C_1)(Ex-C_2)\ldots(Ex-C_{s_1n})(Ex-D_1)(Ex-D_2)\ldots(Ex-D_{s_2m}),$$

де E − одинична матриця порядку mn.

Використовуючи результати розділу 5 книги [2] і розклади (2) чи (3) з теореми 2, аналогічно доводимо такий результат.

Теорема 5. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ − регулярні поліноміальні матриці і одна з них має не більше ніж один елементарний дільник степеня два, а інші елементарні дільники матриць є дільниками степенів не вищих ніж один. Тоді $A(x)\otimes B(x)$ розкладається в добуток лінійних регулярних множників.

Розглянемо питання про виділення лінійного множника з $A(x)\otimes B(x)$, яке застосовують під час розв'язування відповідних матричних многочленних рівнянь [1].

Використовуючи доведення теореми 3, легко бачити, що правильним є такий результат.

Твердження 3. Якщо хоча б з однієї з матриць $A(x)$ чи $B(x)$ можна виділити лінійний множник, то з $A(x)\otimes B(x)$ також можна виділити деякий лінійний множник.

Враховуючи це, цікаво знайти умови, за яких для нерозкладних $A(x)$ і

$B(x)$ із $A(x) \otimes B(x)$ можна виділити лінійний множник, тобто здійснити факторизацію:

$$A(x) \otimes B(x) = (E_{mn} x - C) D(x) . \tag{4}$$

Нехай $\det A(x) = \Delta_1(x)$, $\det B(x) = \Delta_2(x)$. Відомо [2], що

$$\det(A(x) \otimes B(x)) = (\Delta_1(x))^n (\Delta_2(x))^m .$$

Достатні умови для існування факторизації (4) згідно з теорією, розробленою раніше [1], можна знайти, застосовуючи матрицю $M_{G(x)}(\varphi)$, тобто матрицю значення поліноміальної матриці на системі коренів многочлена та її властивості.

Теорема 6. Нехай $\det(A(x) \otimes B(x)) = (\Delta_1(x))^n (\Delta_2(x))^m$, причому $(\Delta_1(x), \Delta_2(x)) = 1$ і $\varphi(x)$ – унітальний дільник степеня mn многочлена $(\Delta_1(x))^n$. Якщо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x) \otimes E_n}(\varphi) = mn ,$$

то існує факторизація (4), в якій

$$\det(E_{mn} x - C) = \varphi(x) .$$

Д о в е д е н н я. Використаємо рівність (2), властивості кронекерівського добутку матриць [2] і властивості матриці $M_{G(x)}(\varphi)$ [1]. Тоді

$$M_{(A(x) \otimes B(x))_*}(\varphi) = M_{((A(x) \otimes E_n)(E_m \otimes B(x)))_*}(\varphi) = M_{(E_m \otimes B_*(x))(A_*(x) \otimes E_n)}(\varphi) .$$

Оскільки $(\det A(x), \det B(x)) = 1$, то для кожного кореня α многочлена $\varphi(x)$ матриця $E_m \otimes B_*(\alpha)$ оборотна і згідно з твердженням 2.8 з праці [1]

$$\operatorname{rang} M_{(A(x) \otimes B(x))_*}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_*(x) \otimes E_n}(\varphi) .$$

Використовуючи достатню умову виділення з поліноміальної матриці лінійного множника з праці [1], одержимо факторизацію (4). Теорему доведено.

Нехай тепер знову $\det(A(x) \otimes B(x)) = (\Delta_1(x))^n (\Delta_2(x))^m$, причому $(\Delta_1(x), \Delta_2(x)) = 1$ і $\varphi(x)$ – унітальний дільник степеня mn многочлена $(\Delta_2(x))^m$. Враховуючи рівність (3), властивості кронекерівського добутку матриць і властивості матриці $M_{G(x)}(\varphi)$, як і під час доведення теореми 6 одержимо:

$$\operatorname{rang} M_{(A(x) \otimes B(x))_*}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{E_m \otimes B_*(x)}(\varphi) .$$

Наведені міркування дають змогу довести такий результат.

Теорема 7. Якщо $\varphi(x)$ – унітальний дільник степеня mn многочлена $(\Delta_2(x))^m$, для якого

$$\operatorname{rang} M_{E_m \otimes B_*(x)}(\varphi) = mn ,$$

то існує факторизація (4), в якій

$$\det(E_{mn} x - C) = \varphi(x) .$$

Зауважимо, що $E_m \otimes B_*(x) = \operatorname{diag}(B_*(x), \ldots, B_*(x))$ – кліткова-діагональна матриця, що спрощує відповідні обчислення.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 282 с.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1973. – 280 с.
3. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
4. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 p.
5. *Newman M.* A property of equivalence // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1974. – **78B**, No. 2. – P. 71–72. – http://dx.doi.org/10.6028/jres.078B.011

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ КРОНЕКЕРОВСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Исследованы эквивалентность кронекеровских произведений матриц над коммутативной областью главных идеалов и факторизация кронекеровского произведения полиномиальных матриц.

Ключевые слова: *кронекеровское произведение матриц, эквивалентность матриц, матрицы простой структуры, факторизация матриц, линейные множители полиномиальной матрицы.*

ON EQUIVALENCE AND FACTORIZATION OF THE KRONECKER PRODUCT OF MATRICES

The question of the equivalence of Kronecker products of matrices over the commutative principal ideal domain and the factorization of the Kronecker product of polynomial matrices are investigated.

Key words: *Kronecker product of matrices, equivalence of matrices, matrices of simple structure, factorization of matrices, linear factors of polynomial matrix.*

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
09.09.19