

Д. М. Лиля

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО АВТОСКРЕПЛЕННОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА

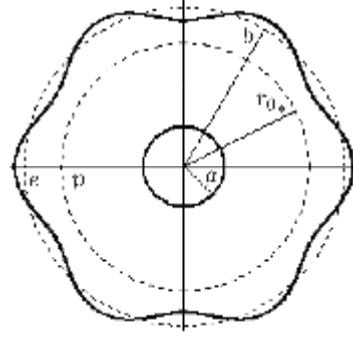
При исследовании методом малого параметра возможной потери устойчивости автоскрепленного быстровращающегося тонкого кольцевого диска конечной постоянной толщины выяснена зависимость между скоростью вращения и радиусом пластической зоны. На основе условия текучести Сен-Венана характеристическое уравнение получено в первом приближении по малому параметру.

Введение. Обычно внутренние напряжения [2], существующие при отсутствии внешних воздействий, остаются в деталях уже после их изготовления. Целенаправленное формирование остаточных напряжений при различных технологических процессах неодинаково и может быть ориентировано на повышение несущей способности деталей в пределах упругости [12]. Одним из таких наиболее типичных процессов является возникновение остаточных напряжений в результате предварительной пластической деформации [14, 15].

Благоприятное поле остаточных напряжений, снижающих рабочие напряжения дисков в эксплуатационных условиях, создается автоскреплением (автофретированием) [12]. Автофретирование заключается в том, что перед эксплуатацией диски на разгонных стендах приводят во вращение с такими угловыми скоростями, при которых в них возникают пластические деформации. С повышением количества оборотов пластическая область, примыкающая к контуру внутренней расточки диска (либо локализованная в центре сплошного диска), увеличивается. В результате постепенного его уменьшения и остановки так деформированный диск полностью разгружается и в нем возникают остаточные напряжения. Радиальные остаточные напряжения будут сжимающими во всех точках, а окружные – только (отрицательными) в области, примыкающей к внутренней расточке, и растягивающими в остальной части диска. Накладывая остаточные напряжения на номинальные, возникающие вследствие вращения в пределах упругости, можно значительно уменьшить действительные окружные в наиболее напряженных точках на внутренней расточке. Важно оценить допустимую скорость вращения автоскрепленного диска за пределами упругости. Поскольку при расчете остаточных напряжений в дисках принимают такие же предположения [2], как и при реализации плоского напряженного состояния во вращающихся дисках [3–5] (остаточные напряжения распределены осесимметрично и равномерно по толщине диска (или представляют собой средние значения соответствующих напряжений); осевые остаточные напряжения отсутствуют), то вполне логично и актуально с помощью приближенного аналитического метода возмущений [8] изучить упругопластическую устойчивость [9–11, 13] автоскрепленного быстровращающегося диска.

Цель настоящей работы – применить метод малого параметра [6–8] к расчету самоуравновешенной формы потери устойчивости автоскрепленного вращающегося тонкого кольцевого диска, перегруженного центробежными усилиями. Возмущению подлежит контурная окружность сечения диска его плоской срединной поверхностью. Критические значения размеров пластической зоны и скорости вращения необходимо получить при решении плоской упругопластической задачи в первом приближении [16–21]. Предполагаем, что материал диска (с условием пластичности Сен-Венана [14, 15]) идеальный и не обладает упрочнением [2].

Постановка задачи. Рассмотрим автоскрепленный вращающийся однородный и изотропный кольцевой круговой тонкий диск постоянной толщины (см. рисунок). Предел текучести материала диска обозначим σ_s , модуль упругости E , плотность γ , коэффициент Пуассона ν . Вместе с диском вращается цилиндрическая система координат. Система координат неподвижна относительно диска, причем срединную плоскость диска принимаем за плоскость $r\theta$ радиальной и угловой координат. Постоянная угловая скорость вращения равна ω . Остаточные окружное и радиальное напряжения $\Delta\sigma_{\theta\theta}$, $\Delta\sigma_{rr}$ соответствуют пластической зоне радиуса $r = c$ при автоскреплении. Основания диска считаем свободными от внешних напряжений и предполагаем также, что силы инерции параллельны основаниям и распределены симметрично к срединной плоскости. Внутренняя боковая поверхность диска $r = a$ находится под постоянным радиальным давлением p_1 , а на наружной $r = b$ поддерживается постоянное радиальное давление p_2 .



Поле номинальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} определяем из обыкновенного дифференциального уравнения квазистатического равновесия [3, 14]

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2} r, \quad \sigma = \gamma b^2 \omega^2, \quad (1)$$

а также уравнений связи [4, 11]

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}$$

в упругой зоне и условия текучести

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \sigma_s \quad (2)$$

– в пластической.

Возмущенное состояние упругой области диска

$$\sigma_\lambda = \sigma_\lambda^0 + \delta\sigma'_\lambda + \delta^2 \mathbf{K}, \quad u_\lambda = u_\lambda^0 + \delta u'_\lambda + \delta^2 \mathbf{K}$$

(λ – произвольная компонента напряжения и перемещения, а «0» указывает на невозмущенное состояние вследствие наложения остаточного и номинального состояний) находим учитывая, что линеаризованные по малому параметру δ возмущения первого порядка малости (обозначены штрихом) удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи [3, 4, 10]

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями

$$E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r} \right) = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr},$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = \sigma_{r\theta}$$

в частных производных. Исследуем критическую угловую скорость вращения диска $\omega = \omega_*$, теряющего устойчивость, когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка имеет вид [6–8]

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \in N,$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \quad (3)$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус. Чтобы определить величину ω_* , необходимо получить в первом приближении по малому параметру характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$, установив условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений [6–8]

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} + \frac{d\sigma'_{rr}}{dr} u' &= 0, & \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}}{b} \frac{du'}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & r &= r_0 \end{aligned} \quad (4)$$

(линеаризованные по малому параметру δ граничные условия в напряжениях).

Вспомогательные результаты. По виду примерных эпюр остаточных, номинальных и действительных напряжений во вращающемся автоскрепленном диске в пределах упругости, приведенных в работе [12] со ссылкой на статью [1], можно сделать вывод об определенной сопоставимости результата автоскрепления и рабочих напряжений. Без обсуждения методов определения и расчета, а также вида представления остаточных напряжений в металлических дисках условимся, что в кольце $\beta \leq \rho \leq \alpha$, где $\beta = a/b \approx 0,2767$, $\alpha = c/b \approx 0,4213$, для отнесенного к σ_s остаточного окружного напряжения

$$\Delta\sigma_{\theta\theta} = (-\sigma_{\theta\theta}^e(\rho) + k_1)k_2. \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{\theta\theta}^e$ – безразмерное окружное номинальное напряжение во вращающемся упругом диске в единицах, пропорциональных единицам измерения напряжения на эпюрах, $-\sigma_{\theta\theta}^e(\alpha_0) + k_1 = 0$, $\alpha_0 \approx 0,3962$, $k_2 \approx 2$. Поскольку в пределах упругости номинальные напряжения в действительных безразмерных единицах имеют вид [14]

$$\sigma_{\theta\theta}^e = c_1 + c_2\rho^{-2} - (3\nu + 1)c_3\rho^2, \quad \sigma_{rr}^e = c_1 - c_2\rho^{-2} - (\nu + 3)c_3\rho^2,$$

с учетом условий $\sigma_{rr}^e(\beta) = -\rho_1 / \sigma_s = -\bar{\rho}_1 = -\mu\beta_1$, $\sigma_{rr}^e(1) = \rho_2 / \sigma_s = \bar{\rho}_2 = \mu\beta_2$, $\sigma_{\theta\theta}^e(1) = \mu\beta_3$, где $\beta_1 \approx 107$, $\beta_2 \approx 14$, $\beta_3 \approx 37$, а μ – масштабный множитель, нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu\beta_4 = \mu \frac{\beta_1\beta^2 + \beta_2 + (\nu + 3)(1 - \beta^4)\beta_3}{1 - \beta^2}, \\ c_2 &= \mu\beta_5 = -\mu \frac{\beta_1 + \beta_2 + (\nu + 3)(1 - \beta^2)\beta_3}{1 - \beta^{-2}}, \\ c_3 &= \mu\beta_6 = \mu \frac{-2\beta_1\beta^2 - \beta_2(1 + \beta^2) + \beta_3(1 - \beta^2)}{(\nu + 3)(1 + \beta^2 - 2\beta^4) - (3\nu + 1)(1 - \beta^2)}, \\ \Delta\sigma_{\theta\theta} &= \Delta\sigma_{\theta\theta}^- = \mu k_2 [-(\beta_4 + \beta_5\rho^{-2} - (3\nu + 1)\beta_6\rho^2) + k_1], \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_1 \approx 107$. Вместе с этим, считаем, что в кольце, если $\alpha \leq \rho \leq 1$,

$$\Delta\sigma_{\theta\theta} = \Delta\sigma_{\theta\theta}^+ \approx \text{const} = \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) = \mu k_3, \quad (7)$$

где $k_3 \approx 26$. Для отнесенного к σ_s остаточного радиального напряжения считаем, что

$$\Delta\sigma_{rr}(\beta) = \Delta\sigma_{rr}(1) = 0, \quad \left(\frac{d(\Delta\sigma_{rr})}{d\rho} \right)_{\rho=1} = 0. \quad (8)$$

Предположения (5)–(8), хотя и не являются строгими, достаточно четко передают качественный характер соотношения остаточных и рабочих напряжений и пригодны для применения приближенного аналитического метода малого параметра при исследовании возможной потери устойчивости диска.

Невозмущенное состояние вращающегося диска. Пусть $\beta_0 = r_0 / b$ и $\beta_{0*} < \alpha < 1$; кольцевая область $\beta \leq \rho \leq \beta_0$ пластическая, а $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ пребывает в упругом состоянии. В пластической зоне $\beta \leq \rho \leq \beta_0$ действительное окружное напряжение, отнесенное к σ_s , имеет в соответствии с (2) следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \Delta\sigma_{\theta\theta}^- + \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (9)$$

Поэтому уравнение (1) запишем как линейное неоднородное

$$\frac{d\sigma_{rr}}{d\rho} + \frac{\sigma_{rr}}{\rho} = \frac{1 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\rho)}{\rho} - \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho,$$

имеющее с учетом (6) общее решение:

$$\sigma_{rr} = \frac{C}{\rho} + 1 - \psi(\rho) - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \rho^2, \quad (10)$$

где

$$\psi(\rho) = \frac{1}{\rho} \int \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\rho) d\rho = \mu k_2 \left[-\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{3\nu+1}{3} \frac{\rho^3}{3} \right) + k_1 \right].$$

Опираясь на условие $\sigma_{rr}(\beta) = -\mu \frac{\rho}{2}$, из зависимости (10) получаем:

$$C = m + \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta^3,$$

где $m = \beta(-1 - \mu \frac{\rho}{2} + \psi(\beta))$. Следовательно, в пластической зоне $\beta \leq \rho \leq \beta_0$ безразмерное действительное радиальное напряжение

$$\sigma_{rr}^0 = \Delta\sigma_{rr} + \sigma_{rr} = \left(m + \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta^3 \right) \rho^{-1} + 1 - \psi(\rho) - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{rr}. \quad (11)$$

Действительные напряжения в упругой области $\beta_0 \leq \rho \leq \alpha$ представим так [13]:

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = C_1 + C_2 \rho^{-2} - \frac{3\nu+1}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{\theta\theta}^-, \quad (12)$$

$$\sigma_{rr}^0 = C_1 - C_2 \rho^{-2} - \frac{\nu+3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{rr}. \quad (13)$$

Сопряжение (по непрерывности) при $\rho = \beta_0$ решений (9), (11) со своими аналогами (12), (13) дает возможность записать:

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2} \left(m + \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta^3 \right) \beta_0^{-1} + \frac{3\nu+1}{12} \frac{\sigma}{\sigma_s} \beta_0^2 - \mu k_2 \left(-\frac{\rho}{2} + \frac{2(3\nu+1)}{3} \frac{\rho^3}{3} + k_1 \right), \quad (14)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \left(m + \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta^3 \right) \beta_0 + \frac{3\nu+1}{24} \frac{\sigma}{\sigma_s} \beta_0^4 - \mu k_2 \left(-\frac{\rho}{2} + \frac{3\nu+1}{3} \frac{\rho^3}{3} \right). \quad (15)$$

Дальнейшее сопряжение при $\rho = \alpha$ решений (12), (13) с

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{\rho}{2} + C^* \rho^{-2} - \frac{3\nu+1}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{\theta\theta}^+, \quad (16)$$

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{\rho}{2} - C^* \rho^{-2} - \frac{\nu+3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{rr} \quad (17)$$

в упругой области $\alpha \leq \rho \leq 1$ с учетом выражений (14), (15), а также условия $\sigma_{rr}(1) = \mu \beta_2$ дает возможность полностью определить невозмущенное напряженное состояние вращающегося диска и связать скорость вращения с радиусом пластической зоны:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= C^* + \mu \beta_2 + \frac{\nu + 3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s}, \\ C^* &= 1 + \frac{1}{2} m \beta_0^{-1} - \mu \beta_2 - \mu k_2 \left(-\beta_4 + \frac{2(3\nu + 1)}{3} \beta_3 \beta_0^2 + k_1 \right) + \\ &\quad + \frac{\sigma}{24\sigma_s} (4\beta^3 \beta_0^{-1} + 2(3\nu + 1)\beta_0^2 - 3(\nu + 3)), \\ \frac{\sigma}{\sigma_s} &= \frac{\omega^2}{q^2} = 24 \left\{ 1 + \frac{1}{2} m(\beta_0 + \beta_0^{-1}) - \mu \beta_2 - \mu k_2 \left(-\beta_4 + \beta_2 + \frac{3\nu + 1}{3} \beta_3 (2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_0^2)\beta_0^2 + k_1 \right) \right\} \{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3(\beta_0 + \beta_0^{-1})\}^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.$$

Взяв во внимание предположения (7), (8), получаем:

$$A_1 := \left(\frac{d\sigma_{rr}^0}{d\rho} \right)_{\rho=1} = 2C^* - \frac{\nu + 3}{4} \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad (19)$$

$$A_2 := \sigma_{\theta\theta}^0(1) - \sigma_{rr}^0(1) = A_1 + \frac{\sigma}{\sigma_s} + \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha). \quad (20)$$

Значения (19), (20) используем в характеристическом уравнении.

Теперь пусть $\beta < \alpha < \beta_{0*} < 1$. Поскольку в пластической зоне $\beta \leq \rho \leq \alpha$ справедливы соотношения (9), (11), а в зоне $\alpha \leq \rho \leq \beta_0$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \Delta\sigma_{\theta\theta}^+ + \sigma_{\theta\theta} = 1, \quad (21)$$

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{C}{\rho} + 1 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \rho^2 + \Delta\sigma_{rr}, \quad (22)$$

при $\rho = \alpha$ из зависимостей (11), (22) имеем:

$$C = m + \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta^3 + \alpha(\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \psi(\alpha)).$$

При $\rho = \beta_0$ из (21), (22) и (16), (17) (с неопределенными C^* и σ/σ_s) находим

$$\begin{aligned} C^* &= 1 - \mu \beta_2 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) + 0,5[m + \alpha(\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \psi(\alpha))]\beta_0^{-1} + \\ &\quad + \frac{\sigma}{24\sigma_s} (4\beta^3 \beta_0^{-1} + 2(3\nu + 1)\beta_0^2 - 3(\nu + 3)), \\ \frac{\sigma}{\sigma_s} &= 24 \{1 - \mu \beta_2 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) + 0,5[m + \alpha(\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \psi(\alpha))](\beta_0 + \beta_0^{-1})\} \times \\ &\quad \times \{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3(\beta_0 + \beta_0^{-1})\}^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

а следовательно, переопределяем A_1 , A_2 (см. (19), (20)) для рассмотренного случая.

Наконец, пусть $\beta < \beta_{01*} < \alpha < \beta_{0*} < 1$; область $\beta_{01} \leq \rho \leq \beta_0$ — пластическая, а области $\beta \leq \rho \leq \beta_{01}$ и $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ пребывают в упругом состоянии. Повторяя приведенные выше рассуждения для каждой из четырех кольце-

вых зон $\beta \leq \rho \leq \beta_{01}$, $\beta_{01} \leq \rho \leq \alpha$, $\alpha \leq \rho \leq \beta_0$, $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ и, соответственно, со-
прягая решения на трех окружностях $\rho = \beta_{01}$, $\rho = \alpha$, $\rho = \beta_0$, убеждаемся в
том, что

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \begin{cases} \Delta\sigma_{\theta\theta}^- + \sigma_{\theta\theta}, & \beta \leq \rho \leq \alpha, \\ \Delta\sigma_{\theta\theta}^+ + \sigma_{\theta\theta}, & \alpha \leq \rho \leq 1, \end{cases} \quad \sigma_{rr}^0 = \Delta\sigma_{rr} + \sigma_{rr}, \quad (24)$$

где

$$\sigma_{\theta\theta} = \begin{cases} -\mu\beta_1 + C_1(\beta^{-2} + \rho^{-2}) + \frac{\sigma}{8\sigma_s}((v+3)\beta^2 - (3v+1)\rho^2), & \beta \leq \rho \leq \beta_{01}, \\ 1 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\rho), & \beta_{01} \leq \rho \leq \alpha, \\ 1 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha), & \alpha \leq \rho \leq \beta_0, \\ \mu\beta_2 + C^*(1 + \rho^{-2}) + \frac{\sigma}{8\sigma_s}(v+3 - (3v+1)\rho^2), & \beta_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -\mu\beta_1 + C_1(\beta^{-2} - \rho^{-2}) + \frac{\sigma}{8\sigma_s}(v+3)(\beta^2 - \rho^2), & \beta \leq \rho \leq \beta_{01}, \\ C_2\rho^{-1} + 1 - \psi(\rho) - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2, & \beta_{01} \leq \rho \leq \alpha, \\ C_3\rho^{-1} + 1 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2, & \alpha \leq \rho \leq \beta_0, \\ \mu\beta_2 + C^*(1 - \rho^{-2}) + \frac{\sigma}{8\sigma_s}(v+3)(1 - \rho^2), & \beta_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1 + \mu\beta_1 - \frac{\sigma}{8\sigma_s}((v+3)\beta^2 - (3v+1)\beta_{01}^2) - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\beta_{01})}{\beta^{-2} + \beta_{01}^{-2}},$$

$$C_2 = \beta_{01} \left[-(1-w)(1 + \mu\beta_1) + \psi(\beta_{01}) - w\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\beta_{01}) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{24\sigma_s}(3(v+3)(1-w)\beta^2 - (3v+1)(1-3w)\beta_{01}^2) \right],$$

$$C_3 = C_2 + \alpha(\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \psi(\alpha)),$$

$$C^* = \frac{1 - \mu\beta_2 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \frac{\sigma}{8\sigma_s}(v+3 - (3v+1)\beta_0^2)}{1 + \beta_0^{-2}},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = 24\{(1-z)(1 - \mu\beta_2 - \Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha)) + [\alpha(\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\alpha) - \psi(\alpha)) + (-(1-w)(1 + \mu\beta_1) +$$

$$+ \psi(\beta_{01}) - w\Delta\sigma_{\theta\theta}^-(\beta_{01}))\beta_{01}\beta_0^{-1}\}\{3(v+3)(1-z) - (3v+1)(1-3z)\beta_0^2 -$$

$$- [3(v+3)(1-w)\beta^2 - (3v+1)(1-3w)\beta_{01}^2]\beta_{01}\beta_0^{-1}\}^{-1},$$

$$z = -\frac{1 - \beta_0^2}{1 + \beta_0^2}, \quad w = \frac{\beta_{01}^2 - \beta^2}{\beta_{01}^2 + \beta^2}.$$

Таким образом, выражения для A_1 , A_2 имеют все тот же вид (19), (20), но с C^* и σ/σ_s , приведенными в (24).

Характеристическое уравнение. Возмущенное состояние упругой зоны $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ автоскрепленного диска в случае $n \in \{2, 3, \mathbf{K}\}$ имеет в соответствии с (3) следующий вид (центробежные силы в определяющих уравнениях не учитываем) [3, 4]:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{rr} &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\
\sigma'_{\theta\theta} &= (-nA\rho^{n-2} - nB\rho^{-n-2} - (n+2)C\rho^n - (n-2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\
\sigma'_{r\theta} &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n}) \sin n\theta, \\
u'^e &= \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(v+1)n}{n-1} A\rho^{n-1} - \frac{(v+1)n}{n+1} B\rho^{-n-1} + \frac{n-2+v(n+2)}{n+1} C\rho^{n+1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{n+2+v(n-2)}{n-1} D\rho^{-n+1} \right) \cos n\theta
\end{aligned} \tag{25}$$

(напряжения отнесены к σ_s , радиальное смещение – к b). На основе безразмерных условий (4)

$$\begin{aligned}
\sigma'_{rr} + A_1 u'^e &= 0, & \sigma'_{r\theta} - A_2 \frac{du'^e}{d\theta} &= 0, & \rho &= 1, \\
\sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & \rho &= \beta_0,
\end{aligned}$$

и соотношений (18)–(20), (23)–(25) искомое характеристическое уравнение [6–8] получаем в виде

$$\det S(\beta_0) = 0, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{11} &= n + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{(v+1)n}{n-1}, & s_{12} &= n - A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{(v+1)n}{n+1}, \\
s_{13} &= n - 2 + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{n-2+v(n+2)}{n+1}, & s_{14} &= n + 2 - A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{n+2+v(n-2)}{n-1}, \\
s_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{(v+1)n}{n-1}, & s_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{(v+1)n}{n+1}, \\
s_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{n-2+v(n+2)}{n+1}, & s_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{n+2+v(n-2)}{n-1}, \\
s_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & s_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & s_{33} &= (n-2)\beta_0^n, & s_{34} &= (n+2)\beta_0^{-n}, \\
s_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & s_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & s_{43} &= -\beta_0^n, & s_{44} &= \beta_0^{-n}.
\end{aligned}$$

Критическому радиусу пластической зоны $\beta_0 = \beta_{0*}$, т. е. корню уравнения (26), соответствует искомая критическая угловая скорость ω_* согласно формулам (18), (23), (24). Характеристическое уравнение (26), если $\beta < \beta_{01*} < \alpha < \beta_{0*} < 1$, является уравнением с параметром β_{01} , поэтому β_{0*} определяем одновременно с β_{01*} .

Обсуждение результатов. Применяв предложенный способ реализации приближенного аналитического метода малого параметра, числовые результаты для β_{0*} и ω_* можно получить в зависимости от n при известных значениях μ , ν , σ_s / E . Их сравнение с результатами решения аналогичной задачи для кольцевого диска без предварительного автофретирования дает представление о направлении и изменении критической скорости упругопластической потери устойчивости автоскрепленного диска. Более того, появляется возможность сравнить критическую скорость автоскрепленного диска со скоростью автофретирования, «первой критической скоростью», «второй критической скоростью» [6–9, 16–21] и т.д. Это позволяет сделать выводы, правильно качественно передающие идею автофретирования дисков с учетом их повторного пластического деформирования при радиальном растяжении вследствие сверхскоростного вращения.

1. Адлер М. В., Карпин Е. Б. Автофретирование турбинных дисков // Теплоэнергетика. – 1955. – № 7. – С. 15–19.

2. Биргер И. А. Остаточные напряжения. — М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит., 1963. — 232 с.
3. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. — Т. 1. — 900 с.
4. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1952. — Т. 2. — 640 с.
5. Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. — М.: Машиностроение, 1978. — 248 с.
6. Еришов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. — 1958. — № 1. — С. 124–125.
7. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. — 1957. — № 1. — С. 141–144.
8. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
9. Лила Д. М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2016. — № 14. — С. 92–98.
10. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1955. — 492 с.
11. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.; Л.: Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. — 674 с.
12. Мамин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
13. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.
14. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
15. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
То же: *Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity.* — New York: McGraw-Hill, 1934. — 415 p.
16. Lila D. M. Loss of stability of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous multidiameter annular disk // *J. Math. Sci.* — 2016. — 215, № 1. — P. 89–109.
То же: Лила Д. М. Потеря устойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кольцевого диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2014. — 57, № 2. — С. 73–87.
17. Lila D. M. Mechanism of the loss of stability of a rotating composite plane circular disk // *J. Math. Sci.* — 2013. — 194, № 3. — P. 257–269.
То же: Лила Д. М. Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2012. — 55, № 3. — С. 111–120.
18. Lila D. M. On the instability of a rotating elastoplastic composite flat annular disk // *J. Math. Sci.* — 2015. — 205, № 4. — P. 583–601.
То же: Лила Д. М. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кольцевого диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2013. — 56, № 3. — С. 81–94.
19. Lila D. M., Martynyuk A. A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // *Int. Appl. Mech.* — 2012. — 48, № 2. — P. 224–233.
То же: Лила Д. М., Мартынюк А. А. Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // *Прикл. механика.* — 2012. — 48, № 2. — С. 127–136.
20. Lila D. M., Martynyuk A. A. Eccentric form of the loss of stability of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous stepped circular disk // *J. Math. Sci.* — 2018. — 228, № 1. — P. 53–65.
То же: Лила Д. М., Мартынюк А. А. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кругового диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2015. — 58, № 4. — С. 47–57.
21. Lila D. M., Martynyuk A. A. On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // *J. Math. Sci.* — 2013. — 190, № 6. — P. 804–822.
То же: Лила Д. М., Мартынюк А. А. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2012. — 55, № 1. — С. 145–158.

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ОДНОГО АВТОСКРІПЛЕНОГО КІЛЬЦЕВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Під час дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості автоскріпленого тонкого кільцевого диска скінченної сталі товщини, що обертається, встановлено залежність між швидкістю обертання і радіусом пластичної зони. На основі умови текучості Сен-Венана характеристичне рівняння одержано у першому наближенні за малим параметром.

ELASTO-PLASTIC INSTABILITY OF AUTOCLAMPED ROTATING ANNULAR DISK

Possible loss of stability of a autoclamped rotating annular thin disk of finite constant thickness is investigated with the help of the small parameter method. The relationship between rotational velocity and radius of the plastic zone was established. Based on the Saint-Venant yield condition a characteristic equation is obtained in a first approximation with respect to the small parameter.

Черкаський нац. ун-т
им. Б. Хмельницького, Черкаси

Получено
04.12.17