

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕХРЕСНО АРМОВАНОГО КОМПОЗИТНОГО ШАРУ

Побудовано варіант структурної 3D-моделі для визначення пружних властивостей і температурного розширення армованого композитного шару. Встановлено, що уточнені формули повороту для коефіцієнтів матриці жорсткості залежать як від кута укладання волокон, так і від модуля Юнга та добутків коефіцієнтів Пуассона в трансверсальному напрямі. Виявлено, що за симетричного перехресного армування в межах двошарової моделі композит є ортотропним матеріалом, для якого встановлені всі пружні константи, що дає змогу використовувати їх у скінченно-елементному аналізі. На прикладах розрахунків показано, що 3D-модель відображає специфічні ефекти для сучасних композитів, зокрема великі ($> 0,5$) і від'ємні значення коефіцієнтів Пуассона.

Вступ. Полімерні композиційні матеріали (ПКМ) широко застосовують у сучасному машинобудуванні, авіаційній та космічній техніці. Оболонкові конструкційні елементи з них, зокрема, виготовлені методом неперервного намотування, експлуатуються за значних механічних навантажень і температур. Для проектування та розрахунків міцності таких конструкцій використовують сучасні комп'ютерні ресурси, зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ). Серед вхідної інформації особливо важливими є дані про фізико-механічні характеристики (ФМХ). Реальну структуру ПКМ, що містить різноорієнтовані волокна в полімерній матриці, за структурним підходом замінюють моделлю неоднорідного суцільного середовища, складеного з ортотропних шарів. Ефективні пружні константи моношару отримують аналітично, припускаючи виконання низки гіпотез про характер та розподіл параметрів напружено-деформованого стану (НДС), контакт між фазами композиту тощо. Проте не існує всеохоплюючої теорії, задовільно узгодженої з експериментом для різних класів матеріалів. Тому теоретичні дослідження властивостей ПКМ не втрачають актуальності [2, 3, 8], розвиваючи відомі й класичні праці [1, 7, 9, 11, 12]. Стисло результати наведені, наприклад, у довідниках [4, 5].

Мета дослідження – побудувати 3D-модель ефективних ФМХ перехресно армованого ПКМ з урахуванням просторового НДС, акцентуючи увагу на отриманні аналітичних залежностей для трансверсального модуля пружності E_3 та пов'язаних з ним характеристик жорсткості й податливості, які в класичній теорії композитних пластин і оболонок ігнорують (згідно з гіпотезою про недеформованість нормалі: $E_3 \rightarrow \infty$).

Рівняння стану для ортотропного матеріалу. Співвідношення Дюамеля–Неймана записуємо у матричному вигляді [3, 7, 9, 11, 12]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{111} & C^{112} & C^{113} & 0 & 0 & 0 \\ & C^{222} & C^{223} & 0 & 0 & 0 \\ & & C^{333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & C^{1313} & 0 \\ & & & & & C^{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T. \quad (1)$$

Тут σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень та деформацій відповідно,

α_{ij} – коефіцієнти температурного розширення (КТР), $\Delta T = T - T_{\text{ref}}$ – приріст температури відносно деякої заданої T_{ref} ; $[C] = \{C^{ijkl}\}$ – матриця податливості ($i, j, k, l = 1, 2, 3$),

$$C^{iiii} = 1 / E_i, \quad C^{ijij} = C^{jjii} = -\mu_{ij} / E_i = -\mu_{ji} / E_j, \quad C^{ijij} = 1 / G_{ij},$$

де E_i – модулі Юнга; μ_{ij} – коефіцієнти Пуассона; G_{ij} – модулі зсуву.

Щоб отримати обернені співвідношення для напружень, треба, щоб матриця $[C] = \{C^{ijkl}\}$ була невиродженою, тобто $\det[C] \neq 0$. Згідно з блочною структурою $[C]$, отримуємо умову на фізичну допустимість для моделі ортотропного матеріалу:

$$\det[C] = \Delta_3 / ((E_1 E_2 E_3)(G_{12} G_{13} G_{23})) \neq 0 \Rightarrow \Delta_3 \neq 0, \quad (2)$$

де

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{21} & -\mu_{31} \\ -\mu_{12} & 1 & -\mu_{32} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \mu_{12}\mu_{21} - \mu_{13}\mu_{31} - \mu_{23}\mu_{32} - 2\mu_{21}\mu_{13}\mu_{32}.$$

Розглядаючи перші два рівняння (1) як систему для визначення σ_{11} і σ_{22} , дістанемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \bar{E}_1(\epsilon_{11} + \mu_{21}\epsilon_{22}) + \lambda_1\sigma_{33} - \beta_{11}\Delta T, \\ \sigma_{22} &= \bar{E}_2(\epsilon_{22} + \mu_{12}\epsilon_{11}) + \lambda_2\sigma_{33} - \beta_{22}\Delta T. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи (3) у третє рівняння (1), знайдемо нормальні напруження

$$\sigma_{33} = \bar{E}_3(\epsilon_{33} + \lambda_1\epsilon_{11} + \lambda_2\epsilon_{22}) - \beta_{33}\Delta T, \quad (4)$$

де $\bar{E}_i = E_i / \Delta_2$, $i = 1, 2$; $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{21} \\ -\mu_{12} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \mu_{12}\mu_{21}$,

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{12}\mu_{23} + \mu_{13}}{\Delta_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_{21}\mu_{13} + \mu_{23}}{\Delta_2}, \quad \bar{E}_3 = (\Delta_2 / \Delta_3)E_3,$$

$$\beta_{11} = \bar{E}_1(\alpha_{11} + \mu_{21}\alpha_{22}), \quad \beta_{22} = \bar{E}_2(\alpha_{22} + \mu_{12}\alpha_{11}), \quad \beta_{33} = \bar{E}_3(\alpha_{33} + \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{22}).$$

Саме в такому вигляді (3), (4) співвідношення пружності (але без температурних доданків) ефективно використовували для побудови уточнених теорій шаруватих оболонок і пластин з урахуванням як деформацій поперечного зсуву, так і стиснення по нормалі до серединної поверхні [6]. У праці [3] аналогічні до (3) подання використали до однонаправлено армованих шарів, а замість (4) взяли середнє значення σ_{33} , що фактично порушує симетрію матриці жорсткості.

З урахуванням (3) і (4) обернені до (1) співвідношення матимуть вигляд

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{1111} & A^{1122} & A^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & A^{2222} & A^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & A^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & A^{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & A^{1313} & 0 \\ & & & & & A^{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11}^* \\ \beta_{22}^* \\ \beta_{33}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T, \quad (5)$$

де для коефіцієнтів матриці жорсткості $[D] = \{A^{ijkl}\}$, $[D] = [C]^{-1}$ отримано

формули:

$$\begin{aligned} A^{iii} &= E_i^* = \bar{E}_i + \lambda_i^2 \bar{E}_3, \quad A^{i33} = A^{33i} = \lambda_i \bar{E}_3, \quad i = 1, 2, \quad A^{333} = \bar{E}_3, \\ A^{1122} &= A^{2211} = E_{12}^* = \bar{E}_1 \mu_{21} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{E}_3, \quad A^{ijj} = G_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Ненульові компоненти вектора термічної жорсткості $\{\beta_{ij}^*\} = [D]\{\alpha_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3$, такі:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^* &= A^{1111} \alpha_{11} + A^{1122} \alpha_{22} + A^{1133} \alpha_{33} = \beta_{11} + \lambda_1 \beta_{33}, \quad 1 \leftrightarrow 2, \\ \beta_{33}^* &= A^{1133} \alpha_{11} + A^{2233} \alpha_{22} + A^{3333} \alpha_{33} = \bar{E}_3 (\alpha_{33} + \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{22}) = \beta_{33}. \end{aligned} \quad (7)$$

На відміну від припущень класичної теорії композитних пластин, коефіцієнти (6), (7) відображають тривимірний характер НДС і залежать від E_3 та добутоків λ_1 і λ_2 . Такий перерозподіл деформацій у 3D-моделі важливий для композиційних матеріалів, що "працюють" на зсув та стиснення. Припущення 2D-моделей, як впливає з граничного переходу при $E_3 \rightarrow \infty$, передбачає відсутність деформацій стиснення шару $\epsilon_{33} = 0$. Оскільки тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то матимемо узагальнений плоский напружений стан (ПНС), але дотичні напруження σ_{13} і σ_{23} можуть бути й ненульовими. Далі, оскільки $\mu_{31} / E_3 = 0$ і $\mu_{32} / E_3 = 0$, то $\mu_{13} = \mu_{23} = 0$. Інші коефіцієнти Пуассона μ_{31} і μ_{32} не визначені, тому їх не використовують у цьому випадку.

Умова невиродженості матриці жорсткості $\det[D] \neq 0$ у нормованому вигляді така:

$$\det[D] = \Delta_3 (\bar{E}_1 / E_1) (\bar{E}_2 / E_2) (\bar{E}_3 / E_3) (E_1 E_2 E_3) (G_{12} G_{13} G_{23}) \neq 0, \quad (8)$$

де

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 (\bar{E}_3 / \bar{E}_1) & \mu_{21} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{E}_3 / \bar{E}_2 & \lambda_1 \\ \mu_{12} + \lambda_1 \lambda_2 (\bar{E}_3 / \bar{E}_1) & 1 + \lambda_2^2 (\bar{E}_3 / \bar{E}_2) & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_1 / E_1 = \bar{E}_2 / E_2 = 1 / \Delta_2, \quad \bar{E}_3 / E_3 = \Delta_2 / \Delta_3.$$

Оскільки $\det[D] = 1 / \det[C]$, то, порівнюючи формули (2) і (8), для нормованих детермінантів переходу має виконуватися умова

$$\Delta_3 / (\Delta_2 \Delta_3) = 1 / \Delta_3 \quad \text{або} \quad \Delta_3 = \Delta_2. \quad (9)$$

Отже, детермінант $\Delta_3 = \Delta_2$ є інваріантним щодо "занурення" (вкладення) 2D-моделі (класичної теорії пластин) у загальний 3D-випадок. Зокрема, 2D-модель отримуємо з 3D-моделі, якщо формально здійснити граничний перехід: $E_3 \rightarrow \infty$.

Усереднені властивості композиційного матеріалу часто задають як коефіцієнти матриці жорсткості A^{ijkl} . Зокрема, це важливо для перехресного симетричного армування. Можна показати, що задача знаходження технічних сталих ортотропного матеріалу (модулів Юнга і зсуву, коефіцієнтів Пуассона та КТР) за відомими коефіцієнтами A^{ijkl} та $\{\beta_{ij}^*\}$ має однозначний розв'язок. Знаючи ці величини, можна записати рівняння стану у стандартній формі (1), тобто явно знайти обернену до матриці жорсткості матрицю $[C] = [D]^{-1}$.

Формули повороту. Для отримання коефіцієнтів матриць жорсткості та податливості за косокутного армування шару узагальнимо класичні результати [5]. Розглянемо систему відліку (1-2-3) для однонаправлено армованого полімерного матеріалу, зв'язану з напрямом армування (вісь 1).

Якщо зробити поворот цієї системи координат у площині армування 1-2 на деякий кут φ проти годинникової стрілки від осі 1, то отримаємо нову систему координат $(\alpha - \beta - 3)$ (вісь 3 залишається на місці). Аналогічно до (1), (5), рівняння Дюамеля–Неймана в повернутій системі координат виглядають так:

$$\{\varepsilon_\alpha\} = [C_\varphi] \{\sigma_\alpha\} + \{\bar{\alpha}_\varphi\} \Delta T \quad \text{або} \quad \{\sigma_\alpha\} = [D_\varphi] \{\varepsilon_\alpha\} - \{\bar{\beta}_\varphi\} \Delta T, \quad (10)$$

де вектори компонент напружень і деформацій відповідно позначено як

$$\{\sigma_\alpha\} = [\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{33}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, \sigma_{\beta 3}]^T, \quad \{\varepsilon_\alpha\} = [\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{\alpha\beta}, 2\varepsilon_{\alpha 3}, 2\varepsilon_{\beta 3}]^T,$$

вектори коефіцієнтів температурного розширення і термічної жорсткості – як

$$\{\bar{\alpha}_\varphi\} = [\alpha_{11}^\varphi, \alpha_{22}^\varphi, \alpha_{33}^\varphi, \alpha_{12}^\varphi, \alpha_{13}^\varphi, \alpha_{23}^\varphi]^T, \quad \{\bar{\beta}_\varphi\} = [\beta_{11}^\varphi, \beta_{22}^\varphi, \beta_{33}^\varphi, \beta_{12}^\varphi, \beta_{13}^\varphi, \beta_{23}^\varphi]^T,$$

а матриці жорсткості $[D_\varphi]$ і податливості $[C_\varphi] = [D_\varphi]^{-1}$ мають блочну структуру:

$$[D_\varphi] = \begin{bmatrix} [D_\varphi]_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & [D_\varphi]_{5,6} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi] = \begin{bmatrix} [C_\varphi]_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & [C_\varphi]_{5,6} \end{bmatrix},$$

$$[D_\varphi]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_\varphi^{1111} & A_\varphi^{1122} & A_\varphi^{1133} & A_\varphi^{1112} \\ A_\varphi^{2211} & A_\varphi^{2222} & A_\varphi^{2233} & A_\varphi^{2212} \\ A_\varphi^{3311} & A_\varphi^{3322} & A_\varphi^{3333} & A_\varphi^{3312} \\ A_\varphi^{1211} & A_\varphi^{1222} & A_\varphi^{1233} & A_\varphi^{1212} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} C_\varphi^{1111} & C_\varphi^{1122} & C_\varphi^{1133} & C_\varphi^{1112} \\ C_\varphi^{2211} & C_\varphi^{2222} & C_\varphi^{2233} & C_\varphi^{2212} \\ C_\varphi^{3311} & C_\varphi^{3322} & C_\varphi^{3333} & C_\varphi^{3312} \\ C_\varphi^{1211} & C_\varphi^{1222} & C_\varphi^{1233} & C_\varphi^{1212} \end{bmatrix},$$

$$[D_\varphi]_{5,6} = \begin{bmatrix} A_\varphi^{1313} & A_\varphi^{1323} \\ A_\varphi^{2313} & A_\varphi^{2323} \end{bmatrix}, \quad [C_\varphi]_{5,6} = \begin{bmatrix} C_\varphi^{1313} & C_\varphi^{1323} \\ C_\varphi^{2313} & C_\varphi^{2323} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Напруження та деформації в системі відліку шару (1-2-3) та новій системі координат $(\alpha - \beta - 3)$ пов'язані співвідношеннями [5]

$$\{\sigma_\alpha\} = [T_1] \{\sigma\}, \quad \{\varepsilon_\alpha\} = [T_2] \{\varepsilon\} \quad \text{або} \quad \{\sigma\} = [T_1]^{-1} \{\sigma_\alpha\}, \quad \{\varepsilon\} = [T_2]^{-1} \{\varepsilon_\alpha\}. \quad (12)$$

Тут $[T_1]$ і $[T_2]$ – матриці, що описують “пряме” перетворення повороту для напружень чи деформацій відповідно:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} cc & ss & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ ss & cc & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2cs & -2cs & 0 & cc - ss & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} cc & ss & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ ss & cc & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & cc - ss & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix},$$

де $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$. Матриці $[T_1]$ і $[T_2]$ узагальнюють відповідні матриці повороту без урахування 3D-ефектів (тобто без третього, п'ятого і шостого рядків та стовпців), що використовують у класичній теорії шаруватих композитів [5, 9, 11, 12]. Вони мають такі ж властивості, як і для 2D-моделі:

$$[T_1]^{-1} = [T_2]^T, \quad [T_2]^{-1} = [T_1]^T, \quad [T_1(\varphi)]^{-1} = [T_1(-\varphi)], \quad [T_2(\varphi)]^{-1} = [T_2(-\varphi)]. \quad (13)$$

Як і без урахування 3D-ефектів [5], отримуємо:

$$[D_\varphi] = [T_1][D][T_1]^T, \quad [C_\varphi] = [T_2][C][T_2]^T, \quad \{\bar{\beta}_\varphi\} = [T_1]\{\bar{\beta}\}, \quad \{\bar{\alpha}_\varphi\} = [T_2]\{\bar{\alpha}\}, \quad (14)$$

причому $\{\bar{\beta}_\varphi\} = [D_\varphi]\{\bar{\alpha}_\varphi\}$. Матриці $[D_\varphi]$ і $[C_\varphi]$ симетричні, але містять ненульові недіагональні елементи в четвертому стовпці й рядку, а вектори $\{\bar{\alpha}_\varphi\}$ та $\{\bar{\beta}_\varphi\}$ – ненульові компоненти зі змішаними індексами. Як відомо, це означає загальнішу анізотропію властивостей, ніж для моделі ортотропного матеріалу.

Явні формули для коефіцієнтів матриці жорсткості $[D_\varphi] = \{A_\varphi^{ijkl}\}$ повторюють відомі для повороту без урахування 3D-ефекту [5, 7, 9, 11], однак, коефіцієнти матриці $[D]$ містять поправки згідно з (6). Специфічними для 3D-моделі є ненульові коефіцієнти третього, п'ятого й шостого рядків і стовпців:

$$\begin{aligned} A_\varphi^{1133} &= A_\kappa^{3311} = A^{1133}c^2 + A^{2233}s^2, & A_\varphi^{2233} &= A_\varphi^{3322} = A^{1133}s^2 + A^{2233}c^2, \\ A_\varphi^{1233} &= A_\varphi^{3312} = cs(A^{1133} - A^{2233}), & A_\varphi^{1323} &= A_\varphi^{2313} = cs(A^{1313} - A^{2323}), \\ A_\varphi^{1313} &= A^{1313}c^2 + A^{2323}s^2, & A_\varphi^{2323} &= A^{1313}s^2 + A^{2323}c^2, & A_\varphi^{3333} &= A^{3333}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для вектора термічної жорсткості $\{\bar{\beta}_\varphi\}$ матимемо такі ненульові компоненти:

$$\beta_{11}^\varphi = \beta_{11}^*c^2 + \beta_{22}^*s^2, \quad \beta_{22}^\varphi = \beta_{11}^*s^2 + \beta_{33}^*c^2, \quad \beta_{33}^\varphi = \beta_{33}^*, \quad \beta_{12}^\varphi = (\beta_{11}^* - \beta_{22}^*)cs. \quad (16)$$

Аналогічно, як і для матриці жорсткості $[D_\varphi]_{4 \times 4}$, згідно з (11) і (14) для під-матриці податливості $[C_\varphi]_{4 \times 4}$, а також для вектора КТР $\{\bar{\alpha}_\varphi\} = [T_2]\{\bar{\alpha}\}$ маємо компоненти, тотожні до класичної 2D-моделі, крім коефіцієнтів третього рядка і стовпця $C_\varphi^{ij33} = C_\varphi^{33ij}$:

$$\begin{aligned} C_\varphi^{1133} &= C_\varphi^{3311} = \frac{-\mu_{\alpha 3}}{E_\alpha} = \frac{-\mu_{3\alpha}}{E_3} = -\left(\frac{\mu_{31}}{E_3}c^2 + \frac{\mu_{32}}{E_3}s^2\right) = -\left(\frac{\mu_{13}}{E_1}c^2 + \frac{\mu_{23}}{E_2}s^2\right), \\ C_\varphi^{2233} &= C_\varphi^{3322} = \frac{-\mu_{\beta 3}}{E_\beta} = \frac{-\mu_{3\beta}}{E_3} = -\left(\frac{\mu_{31}}{E_3}s^2 + \frac{\mu_{32}}{E_3}c^2\right) = -\left(\frac{\mu_{13}}{E_1}s^2 + \frac{\mu_{23}}{E_2}c^2\right), \\ C_\varphi^{3312} &= C_\varphi^{1233} = \frac{\eta_{3,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{\eta_{\alpha\beta,3}}{E_3} = -2cs\left(\frac{\mu_{13}}{E_1} - \frac{\mu_{23}}{E_2}\right) = -2cs\left(\frac{\mu_{31}}{E_3} - \frac{\mu_{32}}{E_3}\right), \\ C_\varphi^{3333} &= \frac{1}{E_3}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти підматриці $[C_\varphi]_{5,6}$ такі:

$$\begin{aligned} C_\varphi^{1313} &= \frac{1}{G_{\alpha 3}} = \frac{c^2}{G_{13}} + \frac{s^2}{G_{23}}, & C_\varphi^{2323} &= \frac{1}{G_{\beta 3}} = \frac{s^2}{G_{13}} + \frac{c^2}{G_{23}}, \\ C_\varphi^{1323} &= C_\varphi^{2313} = \frac{\lambda_{\alpha 3,\beta 3}}{G_{\beta 3}} = \frac{\lambda_{\beta 3,\alpha 3}}{G_{\alpha 3}} = \left(\frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}}\right)cs. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в праці [3] коефіцієнти матриці $[C_\varphi]$ отримали прямим обертанням блочної матриці $[D_\varphi]$, де опущено третій рядок (і не враховано модуль E_3 у коефіцієнтах жорсткості).

Симетричне укладання волокон армування. Розглянемо два шари з однаковими механічними властивостями й однакової товщини, однонаправлено армовані волокнами під кутами $\pm\varphi$ відповідно. Таку модель адекватно використовують для опису симетричного перехресного армування тонкого шару з ПКМ. Щоб отримати усереднені властивості, приймемо такі гіпотези [8]:

1) шари працюють сумісно (рівність деформацій у площині армування):

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^+ = \varepsilon_{\alpha\alpha}^- = \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \varepsilon_{\beta\beta}^+ = \varepsilon_{\beta\beta}^- = \varepsilon_{\beta\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^+ = \varepsilon_{\alpha\beta}^- = \varepsilon_{\alpha\beta}; \quad (17)$$

2) між шарами ідеальний (повний) силовий контакт:

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \sigma_{33}, \quad \sigma_{\alpha 3}^+ = \sigma_{\alpha 3}^- = \sigma_{\alpha 3}, \quad \sigma_{\beta 3}^+ = \sigma_{\beta 3}^- = \sigma_{\beta 3}; \quad (18)$$

3) мають зміст усереднені напруження:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\alpha}^-) / 2, \quad \sigma_{\beta\beta} = (\sigma_{\beta\beta}^+ + \sigma_{\beta\beta}^-) / 2, \quad \sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{\alpha\beta}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^-) / 2; \quad (19)$$

4) механічні властивості ортотропних шарів у системах відліку, зв'язаних із волокнами армування, однакові (модулі Юнга, зсуву, коефіцієнти Пуассона, КТР α_{11} і α_{22} , а отже, й компоненти вектора термічної жорсткості β_{11}^* , β_{22}^*);

5) температура шарів однакова: $\Delta T^+ = \Delta T^- = \Delta T$.

Враховуючи вирази (17)–(19), для усереднення використовуємо друге матричне рівняння (10), записане для кожного з шарів (індекс "±" вказує на кут армування):

$$[\sigma_{\alpha}^{\pm}] = [D_{\pm\phi}] [\varepsilon_{\alpha}^{\pm}] - [\beta_{\pm\phi}] \Delta T, \quad (20)$$

Наприклад, скалярне рівняння для σ_{33} в (20) має вигляд

$$\sigma_{33}^{\pm} = A_{\pm\phi}^{3311} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\pm} + A_{\pm\phi}^{3322} \varepsilon_{\beta\beta}^{\pm} + A_{\pm\phi}^{3333} \varepsilon_{33}^{\pm} + A_{\pm\phi}^{3312} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} + \beta_{33}^{\pm\phi} \Delta T,$$

а за сталих коефіцієнтів жорсткості $A_{\pm\phi}^{33ij}$ впливає, що й деформації шарів однакові $\varepsilon_{33}^{\pm} = \varepsilon_{33}$, як тільки однакові КТР $\alpha_{33}^{\pm\phi} = \alpha_{33}$. Це ще більше прийнятно для перехресно армованого композитного шару, в якому поділ на шари з однонаправленим армуванням умовний. Отже, узагальнювальна гіпотеза в 3D-моделі полягає в тому, що деформації і напруження по товщині в шарах однакові.

Результатом усереднення (з урахуванням парності функції \cos та непарності функції \sin) буде матриця жорсткості та вектор температурних жорсткостей для симетрично перехресно армованого композиту:

$$[D_X] = \begin{bmatrix} [D_X]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [G_X]_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \{\beta_X\} = [\beta_{11}^X \quad \beta_{22}^X \quad \beta_{33}^X \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$[D_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_X^{1111} & A_X^{1122} & A_X^{1133} \\ A_X^{2211} & A_X^{2222} & A_X^{2233} \\ A_X^{3311} & A_X^{3322} & A_X^{3333} \end{bmatrix}, \quad [G_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_X^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & A_X^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & A_X^{2323} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

де $A_X^{ijkl} = A_{\phi}^{ijkl}$ і $\beta_{ij}^X = \beta_{ij}^{\phi}$. Щоб отримати технічні характеристики (модулі Юнга тощо), обчислимо матрицю податливості $[C_X] = \{C_X^{ijkl}\}$, причому $C_X^{ijkl} \neq C_{\phi}^{ijkl}$:

$$[C_X] = [D_X]^{-1} = \begin{bmatrix} [C_X]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [G_X^{-1}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad [C_X]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} C_X^{1111} & C_X^{1122} & C_X^{1133} \\ C_X^{2211} & C_X^{2222} & C_X^{2233} \\ C_X^{3311} & C_X^{3322} & C_X^{3333} \end{bmatrix}$$

$$[G_X^{-1}]_{3 \times 3} = ([G_X]_{3 \times 3})^{-1}, \quad \{\alpha_X\} = [\alpha_{11}^X, \alpha_{22}^X, \alpha_{33}^X, 0, 0, 0]^T, \quad \{\alpha_X\} = [C_X] \{\beta_X\}. \quad (22)$$

Матриці жорсткості й податливості блочні, а тому

$$([D_\phi]_{4 \times 4})^{-1} = [C_\phi]_{4 \times 4}, \quad ([D_X]_{3 \times 3})^{-1} = [C_X]_{3 \times 3}, \quad (23)$$

причому блок $[D_X]_{3 \times 3} = [D_\phi]_{3 \times 3}$ є головним мінором блока $[D_\phi]_{4 \times 4}$. Можна обмежитися знаходженням обернених матриць (23), однак, нас цікавить, чи пов'язані шукані коефіцієнти $[C_X]_{3 \times 3}$ з відомими $[C_\phi]_{4 \times 4}$ згідно з формулами повороту (14), зокрема, з головним 3×3 -мінором $[C_\phi]_{3 \times 3}$. З матричного рівняння

$$[D_\phi]_{4 \times 4} [C_\phi]_{4 \times 4} = I_4 \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} [D_\phi]_{3 \times 3} & [D_\phi]_{3 \times 1} \\ [D_\phi]_{1 \times 3} & A_\phi^{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_\phi]_{3 \times 3} & [C_\phi]_{3 \times 1} \\ [C_\phi]_{1 \times 3} & C_\phi^{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

де $[D_\phi]_{1 \times 3} = [A_\phi^{1211}, A_\phi^{1222}, A_\phi^{1233}]$, $[C_\phi]_{1 \times 3} = [C_\phi^{1211}, C_\phi^{1222}, C_\phi^{1233}]$, отримуємо:

$$\begin{aligned} [D_\phi]_{3 \times 3} [C_\phi]_{3 \times 3} + [D_\phi]_{3 \times 1} [C_\phi]_{1 \times 3} &= I_3, \quad [D_\phi]_{3 \times 3} [C_\phi]_{3 \times 1} + [D_\phi]_{3 \times 1} C_\phi^{1212} = 0_3, \\ [D_\phi]_{1 \times 3} [C_\phi]_{3 \times 3} + A_\phi^{1212} [C_\phi]_{1 \times 3} &= 0_3^T, \quad [D_\phi]_{1 \times 3} [C_\phi]_{3 \times 1} + A_\phi^{1212} C_\phi^{1212} = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут I_3 , I_4 – одиничні матриці розмірності 3 і 4 відповідно; 0_3 – нульовий вектор-стовпець розмірності 3. Зауважимо, що останнє рівняння є скалярним. Помножимо перше рівняння (25) спереду на обернену до $[D_\phi]_{3 \times 3}$ матрицю:

$$[C_\phi]_{3 \times 3} + ([D_\phi]_{3 \times 3})^{-1} [D_\phi]_{3 \times 1} [C_\phi]_{1 \times 3} = ([D_\phi]_{3 \times 3})^{-1} = ([D_X]_{3 \times 3})^{-1} = [C_X]_{3 \times 3},$$

звідки $[C_X]_{3 \times 3} = [C_\phi]_{3 \times 3} + ([D_\phi]_{3 \times 3})^{-1} [D_\phi]_{3 \times 1} [C_\phi]_{1 \times 3} = [C_\phi]_{3 \times 3} (I_3 - [D_\phi]_{3 \times 1} [C_\phi]_{1 \times 3})^{-1}$. Отримана залежність між підматрицями податливості для однонаправленого і симетрично перехресно армованого матеріалу, де необхідно обернути матрицю розмірності 3×3 , має теоретичне значення, однак, на практиці перевагу надають безпосередньому знаходженню матриці $([D_\phi]_{3 \times 3})^{-1}$.

Приклади розрахунків. Розрахунки за наведеними вище 3D- і 2D-моделями можна використовувати як модулі препроцесора в програмах дослідження НДС елементів конструкцій з ПКМ методом скінченних елементів або як самостійні програми моделювання властивостей ПКМ, зокрема, для узгодження з експериментальними даними. Для тестування досить громіздких обчислень розроблено комплекс функцій користувача (макросів) для електронних таблиць. Зручність такого підходу – миттєвий перерахунок і графічна візуалізація результатів моделювання за допомогою стандартних функціональних можливостей програми.

Розглянемо два типові набори ФМХ для однонаправлено армованого ортотропного матеріалу шару (модулі Юнга та зсуву подано далі в ГПа, а коефіцієнти Пуассона безрозмірні). На рис. 1 і 2 наведено деякі результати для них в межах побудованої 3D-моделі для різних кутів $\pm\phi$ симетричного перехресного армування, зокрема, залежність ФМХ композиту від орієнтації укладання волокон: *a* – модулі Юнга та зсуву (3D- і 2D-модель, крім E_3), *б* – коефіцієнти Пуассона в площині армування μ_{12} , μ_{21} (3D- і 2D-моделі), *в і г* – коефіцієнти Пуассона μ_{13} , μ_{31} і μ_{23} , μ_{32} відповідно (3D-модель).

Матеріал № 1: $E_1 = 70$; $E_2 = 60$; $E_3 = 15$; $G_{12} = 3,5$; $G_{13} = G_{23} = 3$; $\mu_{12} = 0,07$; $\mu_{13} = \mu_{23} = 0,3$. Тут модулі Юнга в площині армування близькі, а коефіцієнт Пуассона малий. Тобто частка волокон є суттєвою або матриця має подібні до волокон жорсткості, однак, вклад зсувних деформацій відносно малий.

Поведінка модулів E_1 , E_2 і G_{12} кількісно та якісно однаково відображена для обох 3D- і 2D-моделей (рис. 1а), однак, для кутів армування

40...50° модулі E_1 , E_2 співмірні й менші за E_3 , чого 2D-модель, очевидно, не враховує. Відмітимо, що коефіцієнт Пуассона композиційного матеріалу в діапазоні кутів армування 30...65° перевищує значення 0,5 (рис. 1б), що є пороговим для ізотропних матеріалів. Специфічні для 3D-моделі ненульові коефіцієнти Пуассона μ_{13} і μ_{23} за альтернативної гіпотези, що $\epsilon_{33} \neq 0$ при $E_3(\varphi) = \text{const}$, повторюють поведінку модулів E_1 і E_2 , як і передбачають формули симетрії $\mu_{13} = \mu_{31}E_1 / E_3$, $\mu_{23} = \mu_{32}E_2 / E_3$, оскільки коефіцієнти Пуассона μ_{31} і μ_{32} змінюються несуттєво (рис. 1в, г).

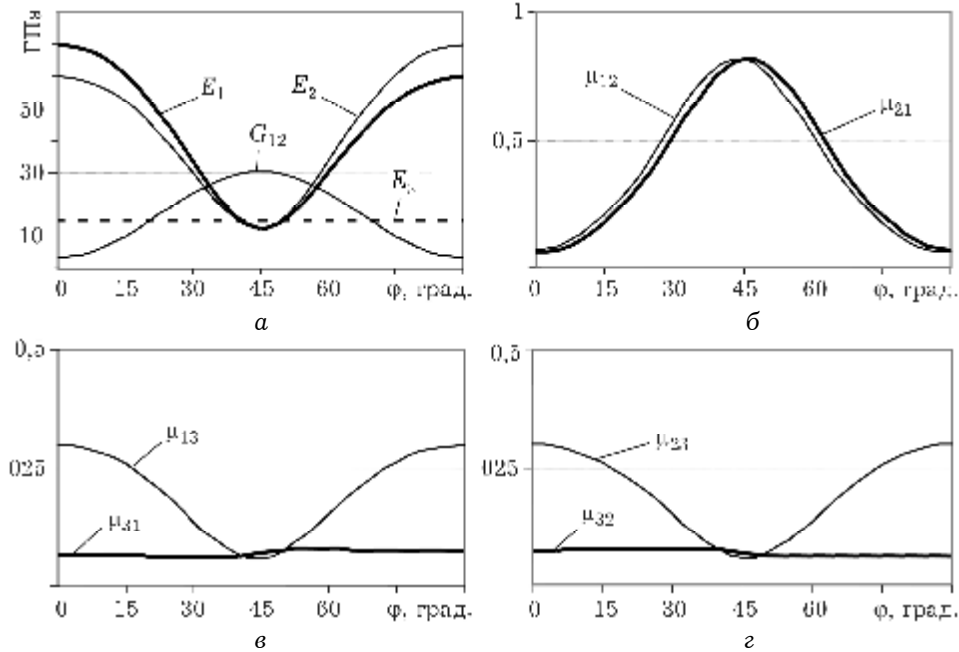


Рис. 1. Матеріал № 1. (Пояснення див. у тексті).

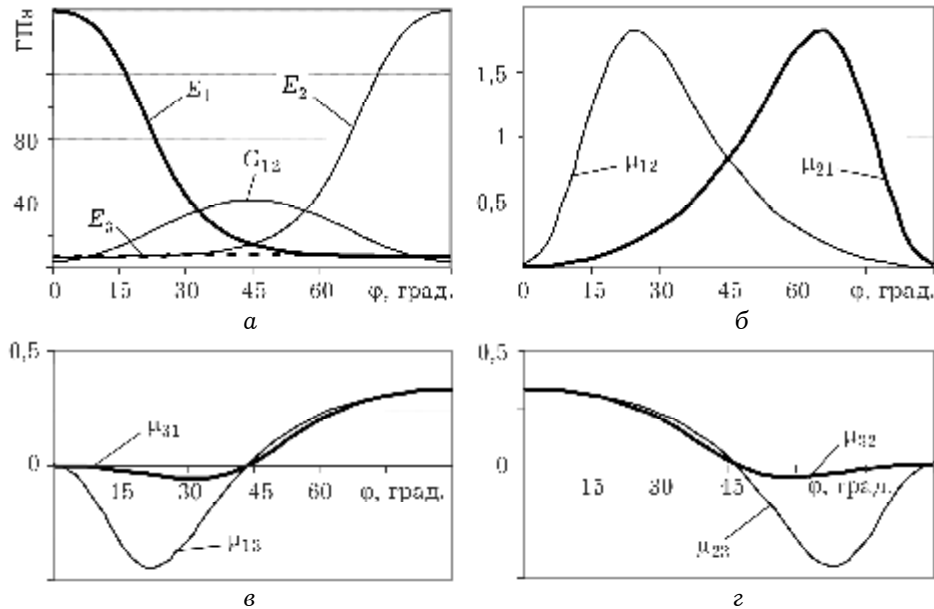


Рис. 2. Матеріал № 2. (Пояснення див. у тексті).

Material № 2: $E_1 = 160$; $E_2 = 7$; $E_3 = 7$; $G_{12} = G_{13} = 4$; $G_{23} = 2,57$; $\mu_{12} = \mu_{13} = 0,01$; $\mu_{23} = 0,33$. Модуль Юнга вздовж напрямку армування волокон значно вищий, ніж матриці. Відповідно коефіцієнти Пуассона в площинах попереку армування малі. У поперечному до напрямку армування волокон перерізі однонаправлено армований матеріал є трансверсально ізотропний.

Внаслідок суттєвої різниці властивостей матриці та волокон за симетрично армованого матеріалу спостерігаємо значну асиметрію графіків для E_1 і E_2 , які між собою мають дзеркальне відображення відносно кута армування 45° , $E_1(\varphi) = E_2(90^\circ - \varphi)$ (рис. 2а). Як і для матеріалу № 1, 3D- і 2D-моделі однаково (якісно, а на рисунку й кількісно) відтворюють поведінку модулів E_1 , E_2 і G_{12} та коефіцієнтів Пуассона μ_{12} , μ_{21} (рис. 2б), враховуючи ефект великих значень (більших за 0,5) для обох моделей.

Коефіцієнти Пуассона μ_{13} , μ_{31} набувають від'ємних значень (як для ауксетичних матеріалів) для кутів армування, менших 45° , а μ_{23} , μ_{31} – для кутів, більших 45° (рис. 2в, г). Тільки для кутів, близьких до 45° , ці коефіцієнти нульові або близькі до нуля, але при різних значеннях кутів армування. Тобто ауксетичні властивості [10] перехресно армований композит має проявляти для усього діапазону кутів армування від 0° до 90° , крім крайніх значень, що можна вважати для властивостей ортотропного матеріалу тривіальним випадком формул повороту, який полягає в перенумерації осей. Навпаки, у межах 2D-моделі ефект ауксетичного матеріалу не проявляється.

Висновки. Якщо гіпотезу $\epsilon_{33} = 0$ для композитного шару відкидаємо, або використовуємо просторову модель для симетрично перехресно армованого ПКМ, то для розрахунків потрібно мати повний набір ФМХ. Визначальні співвідношення для еквівалентно ортотропного матеріалу, де виділено вклад напруження σ_{33} , використано для побудови теоретичних залежностей пружних модулів від кута повороту волокон для однонаправлено армованого композиту, а при симетричному укладанні волокон – для найбільш використовуваного у практиці перехресного армування. Запропоновану 3D-модель порівняно з класичним 2D-підходом ($\epsilon_{33} = 0$). Отримане уточнення має порядок $\mu_{13}^2 E_3$, що для багатьох матеріалів є незначним. З іншого боку, це підтверджує коректність 3D-моделі, а обґрунтованість її застосування для розрахунків просторового напруженого стану є повніша, ніж для 2D-моделі. Для деяких варіантів властивостей сучасних композитів виявлено якісні особливості, що враховує 3D-модель: високі (більше 0,5) та від'ємні значення коефіцієнтів Пуассона.

Співвідношення 3D-моделі армованого композиту отримані достатньо просто (без мікроструктурних гіпотез, наприклад, про взаємодію волокон з матрицею ПКМ) і є узагальненням класичного 2D-підходу. Їхню програмну реалізацію можна включити в інженерні розрахунки, зокрема, методом скінченних елементів. Якщо кут армування змінний, то використання автоматизованого перерахунку властивостей ПКМ особливо важливе. Також 3D-модель придатна для побудови моделі пакета ортотропних шарів з урахуванням шарів різної товщини.

1. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
2. Бурдун Е. Т., Крептюк А. В. Упругие характеристики намоточной тороидальной оболочки // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2010. – Вип. 11. – С. 40–48.
3. Жаркан М. Упругие константы трехмерного тела трансверсально-армированного слоистого композиционного материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2009. – Вип. 2. – С. 16–24.

4. Композиционные материалы: Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
5. Композиционные материалы: Справ. / Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
6. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
7. Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. – Рига: Зинатне, 1988. – 300 с.
8. Немировский Ю. В., Янковский А. Н. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – 13, № 1. – С. 3–32.
9. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. Mechanics of Composite Structural Elements: Second Edition. – Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018. – 504 p.
10. Rana S., Figueiro R. Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering: Processing, Properties and Applications. – Woodhead Publishing, 2016 p. – 474 p.
11. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition. – CRC Press LLC, 2004. – 832 p.
12. Vasiliev V. V., Morozov E. V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures: Fourth Edition. – Elsevier, 2018. – 856 p.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕКРЕСТНО АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТНОГО СЛОЯ

Построен вариант структурной 3D-модели для определения упругих свойств и температурного расширения армированного композитного слоя. Установлено, что уточненные формулы поворота для коэффициентов матрицы жесткости зависят как от угла укладки волокон, так и от модуля Юнга и произведений коэффициентов Пуассона в трансверсальном направлении. Выявлено, что при симметричном перекрестном армировании в рамках двухслойной модели композит будет ортотропным материалом, для которого определены все упругие константы, что позволяет использовать их в конечно-элементном анализе. На примерах расчетов показано, что 3D-модель отображает специфические эффекты для современных композитов, в частности, большие ($>0,5$) и отрицательные значения коэффициентов Пуассона.

MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINATION OF EFFECTIVE PHYSICAL AND MECHANICAL CHARACTERISTICS OF CROSS-REINFORCED COMPOSITE LAYER

A variant of the structural 3D model to determine the elastic properties and thermal expansion of the reinforced composite layer is constructed. It is found out that the refined rotation formulas for the stiffness matrix coefficients depend both on the fiber laying angle and on the Young's modulus and products of the Poisson's coefficients in the transverse direction. In the case of symmetric cross-reinforcement in the framework of a two-layer model the composite will be an orthotropic material for which all elastic constants are defined what allows to use them in the finite element analysis. Examples of calculations show that the 3D model displays specific effects for modern composites, in particular, large ($> 0,5$) and negative Poisson's ratios.

¹Ин-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

²Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

³Держ. підпр. «Констр. бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпро

⁴Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів