УДК 393.3

Ю. П. Тополюк

ПРО КОРЕКТНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ВІЛЬНОЮ ФАЗОЮ

Розглянуто задачі з вільною фазою. Доведено коректність знаходження апроксимуючих розв'язків залежно від похибок правої частини операторного рівняння.

Вступ. Задачі з вільною фазою відносять до нелінійних некоректних обернених задач математичної фізики, для розв'язування яких необхідні певні способи регуляризації розв'язків. За наближеного розв'язування використовують, як правило, певні числові методи. Різноманітні способи дослідження таких задач і близьких до них розвиваються в Україні [1, 2, 5, 6, 14] і за кордоном [9, 10,12].

Математично задачі з вільною фазою можна розглядати як операторні нелінійні рівняння першого роду. Згідно з працею [12], якщо оператор цих задач несур'єктивний, то не для довільної правої частини існує розв'язок. За неін'єктивності нелінійного оператора задачі можлива неєдиність розв'язку. Якщо ж обернений оператор існує, але ненеперервний, тоді розв'язок не залежить неперервно від похибок правої частини операторного рівняння та похибок оператора задачі. Виникає нестійкість розв'язку залежно від похибок вхідних даних.

Задачі ставлять і розглядають в операторній формі в комплекснозначних функціональних просторах типу L_2, які є гільбертовими, тому позначатимемо їх латинською літерою H. В основному досліджуватимемо функціонали, побудовані на нелінійних операторних рівняннях першого роду.

Розв'язування широкого класу задач з вільною фазою вдається звести до знаходження комплексних коренів певних трансцендентних рівнянь скінченної розмірності [13]. На жаль, не всі важливі для практики задачі можна розв'язати, використовуючи цей підхід. Здебільшого для цього придатні числові методи. В цьому випадку важливо виявити коректність формулювань за Тихоновим.

Серед способів регуляризації таких задач можна виокремити висвітлені в працях [7, 12]. Важливою їх особливістю є нестійкість у найслабшому сенсі, зокрема, в сенсі стійкості мінімізуючих послідовностей залежно від похибок оператора задачі [8].

Серед можливих підходів до розв'язування задач з вільною фазою є їх варіаційне формулювання (зведення до задачі мінімізації певного нелінійного функціонала) і встановлення умов коректності в сенсі існування елемента, на якому досягається мінімум, та доведення сильної збіжності довільної мінімізуючої послідовності до цього елемента [7]. Тут у дослідника з'являється впевненість у можливості використати стандартні числові методи розв'язування задачі і отримати коректний результат.

Надалі допускатимемо можливість збурень лише в заданій правій частині операторного рівняння за відомого точного значення самого оператора. Такі формулювання мають сенс, коли права частина рівняння належить до класів реалізовних, апроксимовних чи неапроксимовних діаграм спрямованості, відомих з теорії електродинамічних полів [11].

У цій статті обґрунтовано коректні формулювання задач з вільною фазою залежно від похибок правої частини рівняння. Доведена збіжність розв'язків апроксимуючих задач до розв'язків вихідної задачі. Наведено також достатню умову існування т. зв. u_0-мінімальних за нормою розв'язків.

Формулювання задачі. Розглядаємо задачу знаходження розв'язку операторного рівняння

$$|Au| = F, \quad (1)$$

де A – заданий неперервний оператор з гільбертового комплекснозначного функціонального простору H_1 у гільбертовий функціональний простір H_2; $F \in H_2$ – задана невід'ємна функція; $|\cdot|$ – нелінійний оператор задачі, який кожній комплексній функції з H_2 ставить у відповідність її модуль. У рівнянні (1) можуть порушуватися всі три умови коректності за Тихоновим. Зокрема, розв'язок, якщо він існує, апріорі неєдиний і може не залежати неперервно від похибок правої частини.

Слід виокремити два випадки. Перший, коли розв'язок рівняння (1) існує, тобто є така функція з H_1, після підставлення якої замість u в (1) отримуємо тотожність. Другий, коли розв'язок рівняння (1) не існує. В останньому випадку говоритимемо про псевдорозв'язок. Припускаємо, що права частина рівняння (1) відома з деякою похибкою. В цьому випадку потрібно розв'язувати рівняння

$$|Au| = F_\delta. \quad (2)$$

Тут $\|F - F_\delta\| \le \delta$, де $\delta > 0$.

Для стійкого наближення до розв'язку рівняння залежно від похибки правої частини використаємо функціонал Тихонова:

$$\sigma_\delta(u) = \||Au| - F_\delta\|^2_{H_2} + t\|u\|^2_{H_1}, \quad (3)$$

де $t > 0$ – задане число. Якщо потрібно забезпечувати деякі унікальні властивості наближеного розв'язку рівняння (1), можемо розглядати функціонал Тихонова у вигляді

$$\sigma_t(u) = \||Au| - F_\delta\|^2_{H_2} + t\|u - u_0\|^2_{H_1}, \quad (4)$$

де u_0 – деяка задана функція з H_1.

Теоретичні результати. Введемо низку визначень, які використовуватимемо далі.

Визначення 1 (див. [3]). Дійснозначний функціонал $\varphi(u)$ назвемо *слабко півнеперервним знизу* на H_1, якщо для довільної послідовності функцій $\{u_n\} \in H_1$, слабко збіжної до деякої функції u_0, виконується нерівність

$$\varphi(u_0) \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\varphi(u_n) \equiv \lim_{n\to\infty}\inf\varphi(u_n). \quad (5)$$

Визначення 2 (див. [4]). Оператор $B : H_1 \to H_2$ назвемо *слабко неперервним* на H_1, якщо для довільної фунції $u \in H_1$ та довільної послідовності $\{u_n\} \in H_1$, слабко збіжної до u, відповідна послідовність $\{Bu_n\} \in H_2$ слабко збігається до $Bu \in R(B)$, де $R(B)$ – область значень оператора B.

Визначення 3 (див. [7]). Задачу мінімізації функціонала $\varphi(u)$ назвемо *стійкою* на деякій множині $G \in H_1$, якщо всяка мінімізуюча послідовність $\{u_n\} \in G$ збігається до деякої функції $u_* \in G$, де $\varphi(u_*) = \inf\limits_{u\in H_1}\varphi(u)$.

Визначення 4 (див. [3]). Дійснозначний функціонал $\varphi(u)$ назвемо *зростаючим* на H_1, якщо для довільного $u \in H_1$ знайдеться такі $r > 0$ та $v \in H_1$, що з умови $\|v\| > r$ випливатиме $\varphi(v) > \varphi(u)$.

Для коректного використання функціонала Тихонова потрібно переконатися, що існує функція з H_1, на якій досягається його мінімум, і що ця функція стійка до збурень правої частини рівняння (2). Перше з цих завдань вирішує така теорема.

Теорема 1 (див. [5]). Нехай задано $t > 0$, $F_\delta \in H_2$, A – лінійний неперервний оператор з H_1 в H_2. Припустимо, що існує клас таких функцій $G \in H_1$, що суперпозиція операторів A та $|\cdot|$ є слабко неперервною. Тоді існує функція $u_* \in H_1$, на якій досягається мінімум функціонала (3).

Доведення. Нехай $\{u_n\} \in G$ – мінімізуюча послідовність для функціонала (3), тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\delta(u_n) = c,$$

де $c = \inf\{\sigma_\delta(u)\}$.

Відомо, що функціонал (3) є зростаючим [5]. У цьому випадку мінімізуюча послідовність $\{u_n\} \in G$ для зростаючого функціонала обмежена [3]. Вона має слабко збіжну підпослідовність, яку також позначатимемо $\{u_n\}$, а границю цієї послідовності – через u_*.

Використовуючи слабку неперервність суперпозиції лінійного A та нелінійного $|\cdot|$ операторів, отримаємо, що $|Au_n| - F_\delta$ слабко збігається до $|Au_*| - F_\delta$.

Зі слабкої півнеперервності знизу оператора норми $\|\cdot\|$ маємо:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \big\||A(u_n)| - F_\delta\big\|^2 \ge \big\||A(u_*)| - F_\delta\big\|^2, \tag{6}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \ge \|u_*\|^2. \tag{7}$$

З (6) та (7) одержуємо, що u_* мінімізує σ_δ. Теорема доведена.

Аналогічна теорема справедлива і для функціонала (4). Тут лише слід зауважити, що суперпозиція двох операторів (нелінійного $|\cdot|$ та лінійного A) є слабко неперервною, звідки випливає слабка півнеперервність знизу функціоналів $\big\||Au| - F_\delta\big\|^2_{H_2}$, $\|u\|^2_{H_1}$ та $\|u - u_0\|^2_{H_1}$.

Теорема 2. В умовах теореми 1 функція $u_* \in H_1$, що мінімізує (3), стійка до збурень $F_\delta \in H_2$. Тобто, якщо послідовність F_k збігається до F_δ за нормою простору H_2, тоді довільна послідовність $\{u_k\}$, що задовольняє умову

$$u_k = \arg\min\left\{\big\||Au| - F_k\big\|^2 + t\|u\|^2\right\}, \tag{8}$$

збігається і границя цієї послідовності мінімізує функціонал (3).

Доведення. Згідно з (8)

$$\big\||Au_k| - F_k\big\|^2 + t\|u_k\|^2 \le \big\||Au| - F_k\big\|^2 + t\|u\|^2.$$

Покажемо, що послідовність $\{u_k\}$, починаючи з достатньо великого індекса k, належить слабкому компакту в просторі H_1. Зафіксуємо функцію $\tilde{u} \in H_1$, для якої $\|\tilde{u}\| \le \infty$, і використаємо нерівність

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left|Au_k\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u_k\right\|^2\le\\
&\le 2\left\|\left|Au_k\right|-F_k\right\|^2+t\left\|u_k\right\|^2+2\left\|F_k-F_\delta\right\|^2\le\\
&\le 2\left\|\left|A\tilde{u}\right|-F_k\right\|^2+t\left\|\tilde{u}\right\|^2+2\left\|F_k-F_\delta\right\|^2 .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Скористаємося умовою збіжності F_k до F_δ. Із (9) одержимо, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $m\in N$: для всіх $k>m$:

$$
\left\|\left|Au_k\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u_k\right\|^2\le 2\left\|\left|A\tilde{u}\right|-F_k\right\|^2+t\left\|\tilde{u}\right\|^2+2\varepsilon^2\le M .
$$

Слід зауважити, що тут також скористалися обмеженістю збіжної послідовності. Розглянемо множину

$$
U(M)=\left\{u\in H_1:\sigma_\delta(u)\le M\right\}.
$$

Оскільки функціонал (3) є зростаючим [3], цю множину можна помістити в кулю скінченного радіуса. В просторі H_1 така куля є слабко замкнена і елемент, на якому досягається мінімум, є внутрішнім. З послідовності $\{u_k\}$ виділимо слабко збіжну підпослідовність, яка слабко збігатиметься до $u_*\in H_1$. Із слабкої неперервності оператора $\left|A(\cdot)\right|$ маємо, що $\left|A(u_k)\right|$ слабко збігається до $\left|A\left(u_*\right)\right|\in H_2$. Оскільки збіжність F_k до F_δ слабка, то $\left|A(u_k)\right|-F_k$ слабко збігається до $\left|A(u_*)\right|-F_\delta$. Зі слабкої півнеперервності знизу норми маємо:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left|A\left(u_*\right)\right|-F_\delta\right\|\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|\left|A(u_k)\right|-F_k\right\|,\\
&\left\|u^*\right\|^2\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|u_k\right\|^2 .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left|A\left(u_*\right)\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u_*\right\|^2\le\\
&\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|\left|A(u_k)\right|-F_k\right\|^2+t\,\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|u_k\right\|^2\le\\
&\le\overline{\lim}_{k\to\infty}\left(\left\|\left|A(u_k)\right|-F_k\right\|^2+t\left\|u_k\right\|^2\right)\le\\
&\le\lim_{k\to\infty}\left(\left\|\left|A(u)\right|-F_k\right\|^2+t\left\|u\right\|^2\right)=\\
&=\left\|\left|A(u)\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Звідси слідує, що $u=u_*$ і мінімізує функціонал (3), при цьому

$$
\left\|\left|A(u_*)\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u_*\right\|^2=\lim_{k\to\infty}\left(\left\|\left|A(u_k)\right|-F_\delta\right\|^2+t\left\|u_k\right\|^2\right).
$$

Припустимо, що $\left\{\left\|u_k\right\|^2\right\}$ не збігається до $\left\|u_*\right\|^2$. Зі слабкої півнеперервності знизу норми маємо:

$$
\gamma=\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\|u_k\right\|^2\ge\left\|u_*\right\|^2 .
$$

Виберемо таку підпослідовність послідовності $\{u_k\}$, що $\|u_k\|^2 \to \gamma$. З (9) одержимо:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| |A(u_k)| - F_k \right\|^2 = \left\| \left|A\left(u_*\right)\right| - F_\delta \right\|^2 + t\left(\left\|u_*\right\|^2 - \gamma \right) \le$$

$$\le \left\| \left|A\left(u_*\right)\right| - F_\delta \right\|^2 .$$

Це суперечить першій нерівності в (10). Отже, $\left\{\|u_k\|^2\right\}$ збігається до $\left\|u_*\right\|^2$

Доведемо, що вся послідовність $\{u_k\}$ слабко збігається до u_*. Припустимо, що деяка підпослідовність $\left\{u_{k_l}\right\} \notin D$, $l = 1,2,\ldots$, де D – деякий окіл множини мінімумів. Легко переконатися, що з послідовності $\left\{u_{k_l}\right\}$ можна виділити таку підпослідовність $\left\{u_p\right\} \subset \left\{u_{k_l}\right\}$ $p = k_{l_p}$, $p = 1,2,\ldots$, що $\left\{u_p\right\}$ слабко збігається до $\bar{u} \in D$. Звідки $\left\{u_p\right\} \in D$, $p = k_{l_p} \ge N = const$. Отримуємо суперечність. Отже, маємо слабку збіжність всієї послідовності до $\bar{u}$. Слабка збіжність і збіжність норм тягне за собою збіжність за нормою простору H_1. Таким чином, збіжність послідовності $\{u_k\}$ до u_* доведена.

У літературі широко використовують поняття u_0-мінімального за нормою розв'язку.

Визначення 5. Функцію $u^{ms} \in H_1$ назвемо u_0-мінімальним за нормою розв'язком, якщо

$$\left\|u^{ms}\right\|^2 = \min\left\{ \|u - u_0\|^2 : \inf_{u \in H_1} \left\{ \left\| |Au| - F \right\|^2 \right\} \right\} < \infty ,$$

де u_0 – довільна функція з H_1. Тобто мінімум шукаємо на множині функцій, де реалізується нижня грань нев'язки. Якщо $u_0 \equiv 0$, то u_0-мінімальний за нормою розв'язок прийнято називати нормальним [7].

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1. Якщо існує псевдорозв'язок рівняння (1), то існує і u_0-мінімальний за нормою розв'язок.

Доведення. Доводитимемо від супротивного. Нехай не існує u_0-мінімального за нормою розв'язку. Нехай існує така послідовність $\{u_k\}$ псевдорозв'язків рівняння (1), що $\left\{\|u_k - u_0\|^2\right\} \to \beta$ і

$$\beta < \|u - u_0\|^2 \tag{11}$$

для довільного $u \in H_1$ з множини $\min\limits_{u \in H_1} \left\{ \left\| |Au| - F \right\|^2 \right\}$.

Для достатньо великих k і $t = 1$ з (4) при $F = F_\delta$ маємо:

$$\sigma_t(u_k) = \mu + \|u_k - u_0\|^2 < \mu + 2\beta ,$$

де $\mu = \inf\limits_{u \in H_1} \left\{ \left\| |Au_k| - F \right\|^2 \right\}$.

Зростаючість функціонала гарантує, що будь-яка послідовність $\{u_k\}$ належить слабкому компакту (див. доведення теореми 2). Виділимо з цієї послідовності підпослідовність, яку також позначатимемо $\{u_k\}$, і її слабку границю – $\tilde{u}$. Зі слабкої півнеперервності норми в H_1 маємо:

$$\|\tilde{u} - u_0\|^2 \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \|u_k - u_0\|^2 = \beta .$$

А зі слабкої неперервності оператора $|A(\cdot)|$ випливає, що слабка границя належить множині псевдорозв'язків рівняння (1). Отримали суперечність з (11), що і доводить теорему.

Зауваження. Для цілком неперервного оператора A слабка неперервність суперпозиції $|A(\cdot)|$ виконується як суперпозиція цілком неперервного та неперервного операторів. Для оператора $|A(\cdot)|$ з ізометричним лінійним оператором з H_1 в H_2 ситуація інша. Тут може порушуватись умова слабкої неперервності. Тому слід виділяти область коректності (див. доведення теореми 1).

Висновок. Наведено варіаційні формулювання задач з вільною фазою. Вказані достатні умови для їх коректності в сенсі Тихонова залежно від похибок відомої правої частини операторного рівняння, що гарантує застосовність стандартних числових методів до розв'язування таких задач.

Якщо на розв'язок накладено додаткові умови, то доведено, що існування псевдорозв'язку вихідного операторного рівняння є достатньою умовою для існування u_0-мінімального за нормою та нормального розв'язків.

1. *Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П.* Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности: Численные методы и алгоритмы. – К: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Булацик О. О., Войтович М. М., Каценеленбаум Б. З., Тополюк Ю. П.* Фазові оптимізаційні задачі. Застосування в теорії хвильових полів. – К: Наук. думка, 2012. – 318 с.
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука. 1972. – 416 с.
4. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 344 с.
5. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом.– Львів: ІППММ НАН України, 2014. – 314 с.
6. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем.– Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
7. *Тихонов А.Н, Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука., 1974. – 284 с.
8. *Тополюк Ю. П.* Стійкість мінімізуючих послідовностей у варіаційних задачах з вільною фазою // Відбір і обробка інформації. – 2008. – Вип. 28 (104). – С. 11–16.
9. *Anzengruber S. W., Burger S., Hofmann B., Steinmeyer G.* Variational regularization of complex deautoconvolution and phase retrieval in ultrashort laser pulse characterization. // Inverse Problems. – 2016. – 32, № 3. – P. 35002–350029, doi: 10.1088/0266-5611/32/3/035002.
10. *Blaschke B., Engl H.W., Grever W., and Klibanov M.V.* An application of Tikhonov regularization to phase retrieval // Nonlinear World. – 1996. – 3. – P. 771–786.
11. *Katsenelenbaum B. Z.* Electromagnetic Fields – Restrictions and Approximation. – Weinheim: WILEY–VCH, 2003. – 236 p.
12. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., and Kazimierski K.* Regularization Methods in Banach Spaces. – Berlin-New York: Wolter de Gruyter, 2012. – 284 p.
13. *Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P., Reshnyak O. O.* Approximation of compactly supported functions with free phase by functions with bounded spectrum // AMS. Fields Inst. Commun. – 2000. – 25. – P. 531–541.

14. *Yezhov P. V., Kuzmenko A. V., Kim J.T., Smirnova T. N.* Method of synthesized phase objects for pattern recognition: matched filtering // Optics Express. – 2012. – 20(28). – P. 29854–29866.

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ФАЗОЙ

Рассмотрены задачи со свободной фазой. Доказано корректность определения апроксимирующих решений в зависимости от погрешностей правых частей уравнений.

ON THE CORRECT STATEMENT OF FREE-PHASE PROBLEMS

We consider problems with free phase. The well-posed determinition of the approximating solutions is proved depending on the errors of the right-hand sides of the equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.12.17