УДК 539.3: 534.1

Т. В. Горячко[1], В. С. Пакош[1], О. Ф. Лесик[2]

ЗБІЖНІСТЬ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОЇ ВЛАСНОЇ ЧАСТОТИ ПЛАСТИНИ-СМУГИ ЗА ВИКОРИСТАННЯ ДЕЯКИХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМУВАННЯ

Розглянуто вільні лінійні коливання пластин-смуг за двох випадків закріплення видовжених торців. Показана ефективність моделі, що базується на квадратичній апроксимації переміщень уздовж нормальної координати до серединної площини, для визначення мінімальної власної частоти порівняно з узагальненою теорією пластин на основі зсувної моделі С. П. Тимошенка за використання методу скінченних елементів.

Завдяки раціональній матеріаломісткості та можливості забезпечити необхідну жорсткість у певних напрямках, зумовлених експлуатаційними умовами, пластинчасті елементи є одними з найпоширеніших у конструкціях, спорудах і приладах різноманітного цільового призначення, що піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Щоб уникнути резонансних явищ під час дії експлуатаційних вібраційних зусиль, необхідно визначати на стадії проектування спектри власних частот цих конструкційних елементів. Дослідженню вільних коливань пластин з використанням різноманітних теорій та співвідношень просторової динамічної теорії пружності присвячено чимало праць, в яких наведені аналітичні та числові розв’язки [2, 6]. Серед числових одним із найефективніших є метод скінченних елементів (МСЕ) [5]. Однак він має специфічні особливості за вживання різних моделей деформування для пластин. Моделі деформування також мають свою специфіку під час розв’язання динамічних задач, зокрема про коливання.

Нижче числово досліджено збіжність МСЕ під час розв’язання задачі про вільні коливання пластини-смуги за використання моделей деформування на основі зсувної моделі С.П. Тимошенка, просторової теорії пружності та теорії, що ґрунтується на квадратичних апроксимаціях переміщень уздовж нормальної до серединної площини координати [1].

Пластиною-смугою прийнято називати таку, в якій один із тангенціальних розмірів значно перевищує інший. Якщо одну із координатних осей у серединній площині пластини спрямувати вздовж видовжених торців, то можемо вважати, що характеристики її просторового динамічного напружено-деформованого стану залежать лише від двох інших координат (тангенціальної і поперечної) та часової змінної. Для їх визначення використовують відомі рівняння руху (рівноваги), деформаційні співвідношення та співвідношення пружності [4]. Відповідні рівняння теорії пластин, що базується на зсувній моделі деформування С. П. Тимошенка, для пластини-смуги за вільних лінійних коливань наведені в праці [3]. Алгоритм відшукання власних частот пластин-смуг, котрі є частковим випадком видовжених циліндричних панелей, під час застосування квадратичних апроксимацій тангенціального та поперечного переміщень за нормальною до серединної площини координатою запропонований раніше [1].

Розглянемо два випадки закріплення видовжених торців пластини-смуги: жорстке защемлення (рис. 1) та нерухоме шарнірне закріплення вздовж нижніх ребер видовжених торців (рис. 2). В обох випадках для визначення мінімальної власної частоти застосований МСЕ. Для моделювання динамічного деформування пластин-смуг використані:

1) двовимірні співвідношення просторової теорії пружності за восьми білінійних скінченних елементів у поперечному напрямку;
2) співвідношення узагальненої зсувної теорії пластин С. П. Тимошенка, що не враховують податливості до поперечного стиснення;

3) рівняння уточненої теорії пластин, що базується на квадратичній апроксимації переміщень уздовж нормальної координати.

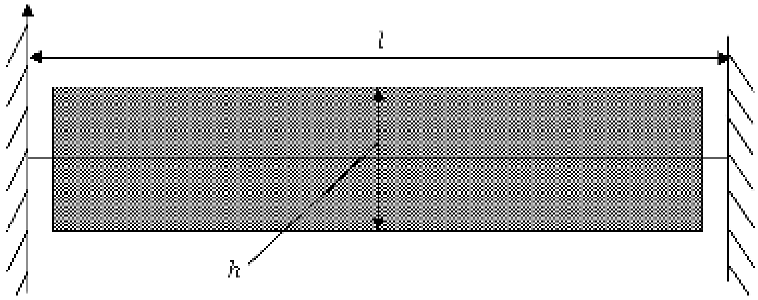

Рис. 1. Пластина-смуга зі защемленими краями.

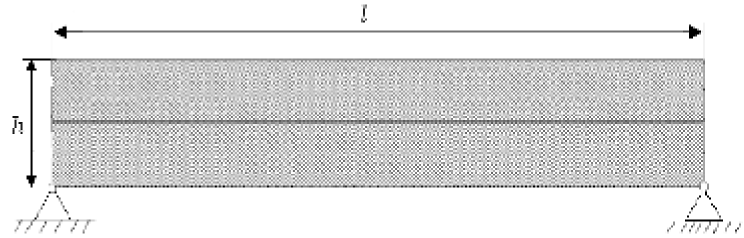

Рис. 2. Пластина-смуга з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

Геометричні та фізико-механічні параметри пластин-смуг приймали такі: $l = 1$ м; $h = 0{,}1$ м; $E_1 = E_3 = 40000$ МН/м^2; $n_{13} = n_{31} = n = 0{,}3$; $G_{13} = G = E/2(1+n) = 15385$ МН/м^2.

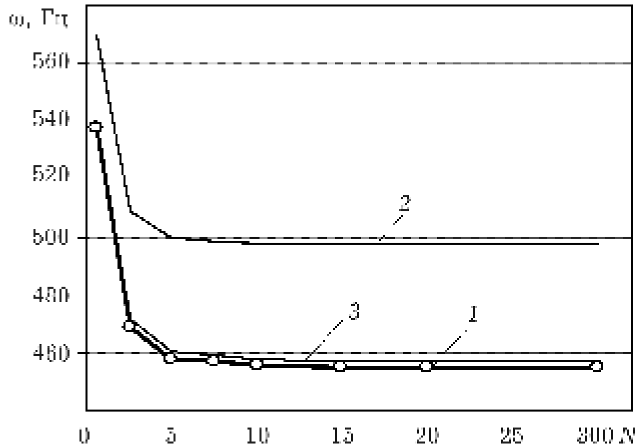

Рис 3. Залежність мінімальної частоти від кількості скінченних елементів уздовж тангенціальної координати з урахуванням стиснення ($E/E_3 = 1$):
1 – просторова теорія; *2* – теорія Тимошенка; *3* – квадратичні апроксимації.

Виявили (рис. 3), що збіжність числового алгоритму досягається за 100 лінійних скінченних елементів уздовж тангенціальної осі. За подальшого згущення сітки скінченних елементів вдається підвищити значення мінімальної власної частоти максимум на 0,1%. Тому доцільно використовувати таку сітку, в якій певний розмір скінченного елемента не перевищує 0,01 м.

Моделі з урахуванням стиснення дають точніші результати для визначення мінімальної власної частоти (див. таблицю). Різниця значень мінімальної власної частоти з урахуванням стиснення і без складає 9%, що є суттєвим під час розрахунків коливань конструкцій.

Мінімальні частоти для різних теорій за різного розбиття

Розбиття / Теорії деформування	10	25	50	75	100	150	200	300
Просторова теорія	538,3	469,2	458,0	455,8	455,0	454,4	454,2	454,0
Квадратична апроксимація переміщень	540,4	471,3	460,1	457,9	457,1	456,5	456,3	456,2
Зсувна теорія Тимошенка	568,2	508,5	499,5	497,9	497,3	496,9	496,7	496,6

Однак ця різниця може збільшуватися для композитних матеріалів, в яких модуль Юнга в поперечному напрямку E_3 значно відрізняється від його значення E в тангенціальному напрямку, або модуль зсуву G_{13} може бути значно меншим, ніж для ізотропних матеріалів.

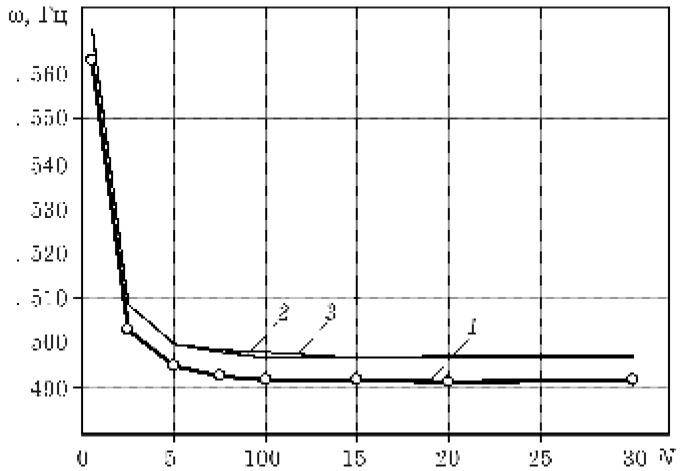

Рис 4. Залежність мінімальної частоти від кількості скінченних елементів вздовж тангенціальної координати без урахування стиснення ($E/E_3 \to 0$):
1 – просторова теорія; *2* – теорія Тимошенка; *3* – квадратичні апроксимації.

Вплив стиснення на мінімальну власну частоту вільних коливань ортотропної пластини-смуги продемонстровано на рис. 4. Якщо $E/E_3 \to 0$, то моделі з урахуванням стиснення дають такі ж результати, як і ті, де використовують зсувну теорію Тимошенка, яка його нехтує.

Аналогічна ситуація за шарнірного закріплення нижніх ребер видовжених торців пластини-смуги.

Запропонована теорія пластин, що базується на квадратичній апроксимації переміщень уздовж нормальної координати дає можливість краще моделювати пластини з більшим параметром тонкостінності h/l проти зсувної теорії Тимошенка.

У подальшому відповідні дослідження доцільно виконати для ширшого діапазону зміни геометричних та фізико-механічних характеристик конструкційного тонкостінного елемента.

1. *Горячко Т. В., Марчук М. В., Пакош В. С.* Вільні коливання шаруватих циліндричних панелей за динамічного нелінійного деформування // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 174–179.
2. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. В., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.

3. *Осадчук В. А., Марчук М. В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
4. *Тимошенко С. П.* Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
5. *Bathe Klaus-Jurgen*. Finite Element Procedures. 2nd edition. – Watertown: MA, 2014. – 1066 p.
6. *Werner Soedel*. Vibrations of Shells and Plates. – Marcel Dekker: Inc., NY, 2004. – 592 p.

СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассмотрены свободные линейные колебания пластин-полос для двух случаев закрепления удлиненных торцов. Показана эффективность модели, базирующейся на квадратичной аппроксимации перемещений вдоль нормальной координаты к срединной плоскости, при определении минимальной собственной частоты по сравнению с обобщенной теорией пластин на основе сдвиговой модели С. П. Тимошенко, когда используют метод конечных элементов.

CONVERGENCE OF THE FINITE ELEMENTS ALGORITHM THE DETERMINATION OF THE MINIMUM OWN FREQUENCY OF THE STRIP-PLATES FOR THE USE OF ANOTHER MODELS OF DEFORMATION

Free linear vibrations of plate-strips in two cases of fixing of elongated ends are considered. The efficiency of the model based on the quadratic approximation of displacements along the normal coordinate to the median plane at determining the minimal natural frequency in comparison with the generalized plate theory on the basis of the shift S. P. Timoshenko model in the case of using the finite element method is shown.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2]Тернопільський нац. економічний ун-т
МОН України, Тернопіль

Одержано
12.11.18