УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ПРО ДЕЯКІ ІНВАРІАНТИ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ЩОДО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Знайдено деякі інваріанти поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності у термінах розбиття множини характеристичних коренів.

П. С. Казімірський та В. М. Петричкович [2] отримали трикутну форму з інваріантними множниками на головній діагоналі для поліноміальної матриці $F(x)$ повного рангу щодо перетворення

$$F(x) \to PF(x)Q(x),$$

де P і $Q(x)$ – неособлива числова та оборотна поліноміальна матриці відповідно. Запропоноване ними перетворення називають *напівскалярно еквівалентним.* Однак встановлена трикутна форма не є канонічною: матриці у такій формі з однаковими діагоналями можуть не бути напівскалярно еквівалентними. Так виникає задача класифікації матриць з точністю до напівскалярної еквівалентності. Як виявилося [2], вона є дикою (див. означення [1]), тобто містить класичну нерозв'язану задачу лінійної алгебри про класифікацію пар матриць над полем з точністю до подібності. Таким чином, побудова методів для розпізнавання напівскалярно еквівалентних матриць – одне з найважчих завдань. До цього часу для поліноміальних матриць у загальному випадку не встановлені умови, не знайдені повні системи інваріантів, не побудовані канонічні форми, не вказані методи знаходження перетворювальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності. Окремі результати, що стосуються перелічених аспектів проблеми напівскалярної еквівалентності, отримані для конкретних класів матриць. Серед них: матриці з усіма різними характеристичними коренями [7], матриці з одним (без урахування кратності) характеристичним коренем [8], матриці парного порядку $n = 2k$ з k однаковими елементарними дільниками [5], матриці з певними факторіальними властивостями [6], матриці малої розмірності [11. 12] тощо. Слід виокремити монографії [3] і [4] авторів, що ввели поняття напівскалярної еквівалентності, та близькі до [2] праці [9] і [10].

У цій праці встановлені деякі інваріанти стосовно напівскалярної еквівалентності для матриць довільного порядку.

Нехай $F(x) \in M(n, \mathrm{C}[x])$. Визначник $\det F(x)$ називають характеристичним поліномом, а його корені – характеристичними коренями матриці $F(x)$. Вважатимемо, що $\deg \det F(x) > 0$ і $\det F(x)$ має не менше двох коренів. Випадок, коли $\deg \det F(x) = 0$, є тривіальним, а якщо $\det F(x) = a(x-\alpha)^h$ – предмет іншого дослідження. За теоремою 1 з праці [1] матриця $F(x)$ напівскалярно еквівалентна до нижньої трикутної матриці $A(x)$ з інваріантними множниками на головній діагоналі. Випадок, коли всі інваріантні множники матриці $F(x)$ рівні між собою, є тривіальний. Без обмеження загальності вважаємо перший інваріантний множник одиничним. Тому матрицю $A(x)$ розглядатимемо у вигляді

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & & & & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_2(x) & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{n,\,n-1}(x) & \varphi_n(x) \end{matrix} \right\|, \qquad (1)$$

де $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_j(x)$ ділить $\varphi_i(x)$ і $a_{ij}(x)$, $\deg a_{ij}(x)<\deg\varphi_i(x)$, $i>j$, $j=1,\ldots,n-1$. Нехай k – деякий номер інваріантного множника $\varphi_k(x)$, який має більше різних коренів, ніж попередній $\varphi_{k-1}(x)$. Такий множник завжди існує. Ця властивість притаманна, наприклад, першому з неодиничних інваріантних множників. Запишемо матрицю $A(x)$ у такому блочному вигляді:

$$A(x)=\begin{Vmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де $A_{11}(x)$ – квадратний блок порядку $k-1$, $A_{12}(x)=0$ – нульовий блок. Спочатку припустимо, що множина M_k коренів полінома $\varphi_k(x)$, які не є коренями полінома $\varphi_{k-1}(x)$, містить не менше двох елементів. Множину M_k розіб'ємо на підмножини, що не перетинаються, так. Два корені $\alpha_u,\alpha_v\in M_k$ віднесемо до однієї підмножини M_{ks_k}, $s_k=1,\ldots,m_k$, якщо матриці

$$\begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_u) \\ A_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_v) \\ A_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix}$$

є правоеквівалентні. Таким чином, дістанемо розбиття множини M_k:

$$M_k=M_{k1}\cup\ldots\cup M_{km_k}. \tag{3}$$

Якщо множина M_k одноелементна, то $M_k=M_{k1}$.

Теорема 1. *Розбиття* (3) *множини* M_k *тих коренів полінома* $\varphi_k(x)$, *що не є коренями полінома* $\varphi_{k-1}(x)$, *є інваріантом у класі* $\{PA(x)Q(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць.*

Доведення. Нехай матриця $B(x)$ належить до класу $\{PA(x)Q(x)\}$ і має аналогічний до (1) вигляд:

$$B(x)=\begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & & & & 0 \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \ldots & b_{n,n-1}(x) & \varphi_n(x) \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

де $\varphi_j(x)$ ділить $b_{ij}(x)$, $\deg b_{ij}(x)<\deg\varphi_i(x)$, $i>j$, $j=1,\ldots,n-1$. Запишемо $B(x)$ в аналогічному до (2) блочному вигляді

$$B(x)=\begin{Vmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

де квадратний блок $B_{11}(x)$ має порядок $k-1$ і $B_{12}(x)$ – нульовий блок. Умову напівскалярної еквівалентності матриць $A(x)$ і $B(x)$ подамо так:

$$SA(x)=B(x)R(x), \tag{6}$$

де $S\in GL(n,\mathrm{C})$, $R(x)\in GL(n,\mathrm{C}[x])$. Якщо зобразити $R(x)$ у блочному вигляді

$$R(x)=\begin{Vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

як (2) чи (5), то з (6) матимемо:

$$S\begin{Vmatrix} A_{11}(x) \\ A_{21}(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \end{Vmatrix} R_{11}(x) + \begin{Vmatrix} 0 \\ B_{22}(x) \end{Vmatrix} R_{21}(x). \tag{8}$$

Покладемо почергово у (8) $x = \alpha_u$ і $x = \alpha_v$, де $\alpha_u, \alpha_v \in M_k$, $u \neq v$. Дістанемо:

$$S\begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_u) \\ A_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_u) \\ B_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix} R_{11}(\alpha_u) + \begin{Vmatrix} 0 \\ B_{22}(\alpha_u) \end{Vmatrix} R_{21}(\alpha_u), \tag{9}$$

$$S\begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_v) \\ A_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_v) \\ B_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix} R_{11}(\alpha_v) + \begin{Vmatrix} 0 \\ B_{22}(\alpha_v) \end{Vmatrix} R_{21}(\alpha_v). \tag{10}$$

Очевидно, $B_{22}(\alpha_u) = B_{22}(\alpha_v) = 0$. Якщо

$$\begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_u) \\ A_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_u) \\ A_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix} C,$$

де $C \in GL(n, \mathbb{C})$, то з (10) одержуємо:

$$S\begin{Vmatrix} A_{11}(\alpha_v) \\ A_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix} C = \begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_v) \\ B_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix} R_{11}(\alpha_v) C. \tag{11}$$

Тому можемо прирівняти праві частини (9) і (11). У результаті маємо:

$$\begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_u) \\ B_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix} R_{11}(\alpha_u) = \begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_v) \\ B_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix} R_{11}(\alpha_v) C. \tag{12}$$

Якщо зобразити S також у блочному вигляді, як і $R(x)$, тобто

$$S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

то з (6) прийдемо до рівності

$$S_{12} A_{22}(x) = B_{11}(x) R_{12}(x). \tag{14}$$

Оскільки $A_{22}(\alpha_u) = A_{22}(\alpha_v) = 0$ і $B_{11}(\alpha_u)$, $B_{11}(\alpha_v)$ – трикутні матриці з ненульовими діагональними елементами, то з (14) випливає $R_{12}(\alpha_u) = R_{12}(\alpha_v) = 0$. Це означає, що в оборотній матриці $R(x)$ блок $R_{11}(x)$ (див. (7)) є неособливим, якщо $x = \alpha_u$ і $x = \alpha_v$. Тому (12) засвідчує праву еквівалентність матриць

$$\begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_u) \\ B_{21}(\alpha_u) \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} B_{11}(\alpha_v) \\ B_{21}(\alpha_v) \end{Vmatrix}.$$

Теорема доведена.

Якщо k пробігає індекси всіх тих $\varphi_k(x)$, які мають більше різних коренів, ніж $\varphi_{k-1}(x)$, то з (3) дістанемо розбиття множини M всіх характеристичних коренів матриці $A(x)$:

$$M = \bigcup_k M_k, \quad M_k = \bigcup_{s=1}^{m_k} M_{ks}. \tag{15}$$

З теореми 1 випливає така теорема.

Теорема 2. *Розбиття* (15) *множини* M *характеристичних коренів матриці* $A(x)$ *є інваріантом у класі* $\{PA(x)Q(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць.*

Нехай тепер $\varphi_k(x)$ є першим неодиничним інваріантним множником матриці $A(x)$ вигляду (1), тобто $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_{k-1}(x) = 1$, $\varphi_k(x) \neq 1$. Тоді в блочному зображенні (2) матриці $A(x)$ маємо $A_{11}(x) = E_{k-1}$ – одиничну матрицю порядку $k-1$ і, як і раніше, $A_{12}(x) = 0$. Якщо корені α_u, α_v полінома $\varphi_k(x)$ належать одній і тій самій підмножині у розбитті (3), то з правої еквівалентності матриць

$$\left\| \begin{matrix} E_{k-1} \\ A_{21}(\alpha_u) \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} E_{k-1} \\ A_{21}(\alpha_v) \end{matrix} \right\|$$

випливає їх рівність.

Теорема 3. *Нехай* α_u, $u = 1, \ldots, s_u$, $s_u \geq 1$, – *усі корені полінома* $\varphi_k(x)$, *що є першим з неодиничних інваріантних множників матриці* $A(x)$ *вигляду* (1), і $p_u \geq 1$ – *їх кратності. Максимальне число* l_u, $0 \leq l_u < p_u$, $u = 1, \ldots, s_u$, *перших послідовних нульових блоків матриці*

$$\left\| A'_{21}(\alpha_u) \quad \ldots \quad A_{21}^{(p_u-1)}(\alpha_u) \right\| \tag{16}$$

класом $\{PA(x)Q(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць визначається однозначно.*

Доведення. Нехай матриця $B(x)$ з класу $\{PA(x)Q(x)\}$ має вигляд (4). Тоді з умови (5) напівскалярної еквівалентності матриць $A(x)$ і $B(x)$, якщо зобразити їх та матриці S та $R(x)$ у блочному вигляді, як (2), (5), (7) і (13), можна записати:

$$S_{11} + S_{12}A_{21}(x) = R_{11}(x), \tag{17}$$

$$S_{21} + S_{22}A_{11}(x) = B_{21}(x)R_{11}(x) + B_{22}(x)R_{21}(x). \tag{18}$$

Нехай $\alpha_u \in M_k$ – деякий фіксований корінь. Якщо він простий, то уже все доведено. В іншому разі з (17) маємо, що $R'_{11}(\alpha_u) = \ldots = R_{11}^{(l_u)}(\alpha_u) = 0$. Диференціюємо l раз, $l = 1, \ldots, l_u$, обидві частини (18) у точці $x = \alpha_u$. Оскільки $\varphi_k(x)$ ділить $A_{22}(x)$ і $B_{22}(x)$, то $B_{22}^{(l)}(\alpha_u) = A_{22}^{(l)}(\alpha_u) = 0$, $l = 1, \ldots, l_u$. Тому

$$0 = S_{12}A_{21}^{(l)}(\alpha_u) = B_{21}^{(l)}(\alpha_u)R_{11}(\alpha_u). \tag{19}$$

Оскільки $R_{12}(x) = S_{12}A_{22}(x)$ і $A_{22}(\alpha_u) = 0$, то $R_{11}(\alpha_u)$ є неособливою матрицею. Тому з (19) маємо $B_{21}^{(l)}(\alpha_u) = 0$ для всіх $l = 1, \ldots, l_u$. Якщо $l_u < p_u - 1$ і $A_{21}^{(l_u+1)}(\alpha_u) \neq 0$, то диференціюємо ще раз (18) у точці $x = \alpha_u$, звідки дістаємо $B_{21}^{(l_u+1)}(\alpha_u) \neq 0$. Теорема доведена.

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.

5. *Шаваровский Б. З.* О подобии пар матриц четного порядка // Мат. заметки. – 2007. – 81, вып. 3. – С. 448–463.
6. *Шаваровский Б. З.* Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009 – 49, № 9. – С. 1539–1553.
7. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – 65, вып. 5. – С. 769–782.
8. *Шаваровський Б. З.* Канонічна форма многочленних матриць з усіма рівними елементарними дільниками // Укр. мат. журн. – 2012. – 64, № 2. – С. 253–267.
9. *Baratchart L.* Un theoreme de factorisation et son application a la representation des systemes cuclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. Math. – 1982. – 295, № 3. – P. 223–226.
10. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – 291. – P. 167–184.
11. *Shavarovskii B. Z.* Reduced Triangular Form of Polynomial 3-by-3 Matrices with One Characteristic Root and Its Invariants // J. of Mathematics. – 2018. – Article ID 3127984, 6 pages.
12. *Shavarovskii B. Z.* Toeplitz Matrices in the problem of Semiscalar Equivalence of Second-Order Polynomial Matrices // Int. J. of Analysis. – 2017. – Article ID 6701078, 14 pages.

О НЕКОТОРІХ ИНВАРИАНТАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Найдены некоторые инварианты полиномиальных матриц относительно полускалярной эквивалентности в терминах разбития множества характеристических корней.

ON SOME INVARIANTS OF POLYNOMIAL MATRICES WITH RESPECT TO SEMISCALAR EQUIVALENCE

Some invariants of polynomial matrices with respect to semiscalar equivalence in terms of the partition of the set of characteristic roots are found.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.10.18