УДК 393.3

А. І. Чиж

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗРІЗАНІЙ КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КУСКОВО-СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Наведено метод розв'язування системи рівнянь термопружності в переміщеннях для тонкої зрізаної конічної оболонки з кусково-сталими коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях. Метод полягає у зведенні системи диференціальних рівнянь до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду. Досліджено вплив змінних коефіцієнтів тепловіддачі на прогин і температурні напруження в оболонці.

Вступ. Тонкі конічні оболонки – невід'ємна частина елементів конструкцій сучасного машинобудування і будівельної галузі, зокрема, таких, як деталі механізмів. Під час експлуатації вони можуть перебувати за умов теплового навантаження змінної інтенсивності, що може спричинити руйнування конструкцій. Тому покриття таких оболонок бажано зробити неоднорідним, щоб впливати на напруження в них через змінну температуру зовнішнього середовища. В зв'язку з цим зростає актуальність побудови моделей та методів дослідження температурного поля та термопружного стану в тонких оболонках зі змінними коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях і змінною температурою зовнішнього середовища.

Рівняння термопружності і теплопровідності для тонких оболонок виводили в працях А. Д. Коваленка [1], Я. С. Підстригача [2], Е. Венцеля, Т. Краутхамера [6]. Зокрема, для розв'язування системи рівнянь рівноваги для конічної оболонки запропоновано [2] метод з використанням комплексних функцій. На сьогодні задачі термопружності для функціонально-градієнтних матеріалів стали особливо актуальними. В працях [4] і [5] розглядають змінні по товщині конічні оболонки, виготовлені зі залежних від температури матеріалів. За змінних коефіцієнтів теплообміну на поверхнях оболонок рзв'язували подібну задачу для циліндричної оболонки [3]. Для виведення рівнянь теплопровідності використано операторний метод і метод усереднення температури за товщиною. Нижче рівняння теплопровідності і рівноваги в переміщеннях розв'язано для тонкої ізотропної зрізаної конічної оболонки з кусково-сталими коефіцієнтами тепловіддачі і кусково-сталою температурою зовнішнього середовища з використанням методу зведення їх до систем лінійних інтегральних рівнянь другого роду.

Формулювання і розв'язування. Розглянемо защемлену на краях тонку ізотропну зрізану конічну оболонку товщиною $2h$, яка перебуває в змінному температурному полі. На паралелях оболонки температура зовнішнього кусково-стала. Через лицеві і торцеві поверхні здійснюється теплообмін зі зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Коефіцієнти теплообміну є кусково-сталими на тих самих паралелях, на яких стала температура. Місце точки на серединній поверхні оболонки визначали за допомогою координати α, яка змінюється вздовж твірної від ah до lh. Кут, який утворює проведений з твірної перпендикуляр з віссю оболонки, рівний θ.

Вважатимемо, що температура t в оболонці змінюється за товщиною за лінійним законом:

$$t = T_1(\alpha) + \frac{z}{h} T_2(\alpha), \; -h \le z \le h. \tag{1}$$

Тут T_1 – температура серединної поверхні оболонки, а T_2 – половина різниці температур на лицевих поверхнях $z = \pm h$.

Введемо безрозмірну координату $x = \frac{\alpha}{h}$. Функції T_1 і T_2 за стаціонарного режиму, коли відсутні джерела тепла, знаходимо зі системи [2]

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} T_1 + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} T_1 - \mu_1 (T_1 - t_1) - \mu_2 (T_2 - t_2) = -\frac{1}{2x} \operatorname{tg} \theta T_2, \\ \frac{d^2}{dx^2} T_2 + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} T_2 - 3(1+\mu_1)(T_2 - t_2) - 3\mu_2 (T_1 - t_1) = 3t_2 - \\ -\frac{3}{2x} \operatorname{tg} \theta T_1, \end{cases} \tag{2}$$

в якій

$$\mu_1(\alpha,\beta) = \frac{h}{2}\left(\mu^+(\alpha,\beta) + \mu^-(\alpha,\beta)\right), \quad \mu_2(\alpha,\beta) = \frac{h}{2}\left(\mu^+(\alpha,\beta) - \mu^-(\alpha,\beta)\right),$$

$$t_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(t_c^+(\alpha,\beta) + t_c^-(\alpha,\beta)\right), \quad t_2(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(t_c^+(\alpha,\beta) - t_c^-(\alpha,\beta)\right),$$

$$\mu^{\pm}(x) = \mu_1^{\pm} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu_{i+1}^{\pm} - \mu_1^{\pm}\right) H(x; a_i, a_{i+1}),$$

$$t^{\pm}(x) = t_1^{\pm} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(t_{i+1}^{\pm} - t_1^{\pm}\right) H(x; a_i, a_{i+1}), \; H(x; a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} 1, & x \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, & x \notin [a_i, a_{i+1}). \end{cases}$$

Тут $\mu^{\pm}(x)$ – кусково-сталі коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь, $t^{\pm}(x)$ – кусково-стала температура зовнішнього середовища на них.

Розв'язок системи (2) повинен задовольняти межові умови теплообміну за законом Ньютона на краях оболонки:

$$\frac{dT_1}{dx} - b_1\left(T_1 - T_{11}^c\right) = 0, \; x = a; \; \frac{dT_1}{dx} + b_2\left(T_1 - T_{12}^c\right) = 0, \; x = l;$$

$$\frac{dT_2}{dx} - b_1\left(T_2 - T_{21}^c\right) = 0, \; x = a; \; \frac{dT_2}{dx} + b_2\left(T_2 - T_{22}^c\right) = 0, \; x = l. \tag{3}$$

Тут b_1 і b_2 – коефіцієнти конвективного теплообміну на краях оболонки.

Введемо величини

$$\eta_i^{\pm} = \frac{h\left(\mu_i^+ \pm \mu_i^-\right)}{2},$$

тоді

$$\mu_1 = \eta_1^+ + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+\right) H(x; a_i, a_{i+1}), \mu_2 = \eta_1^- + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^- - \eta_1^-\right) H(x; a_i, a_{i+1}). \tag{4}$$

Систему (2) розв'яжемо шляхом зведення до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду. Підставляючи вирази (4) для коефіцієнтів тепловіддачі в (2), отримаємо:

$$\begin{cases} \Delta T_1 - \eta_1^+ T_1 = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx} T_1 - (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+\right) T_1 + \left(\eta_i^- - k\right) T_2\right] H(x; a_i, a_{i+1}), \\ \Delta T_2 - 3\left(1 + \eta_1^+\right) T_2 = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx} T_2 - 3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1) + \\ + 3\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+\right) T_2 + \left(\eta_i^- - k\right) T_1\right] H(x; a_i, a_{i+1}). \end{cases} \tag{5}$$

Вважаємо праві частини відомими функціями

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}T_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\Big[\big(\eta_{i+1}^{+} - \eta_1^{+}\big)T_1 + \big(\eta_i^{-} - k\big)T_2\Big]H(x;a_i,a_{i+1}) -$$
$$-(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2),$$
$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}T_2 + 3\sum_{i=1}^{n-1}\Big[\big(\eta_{i+1}^{+} - \eta_1^{+}\big)T_2 + \big(\eta_i^{-} - k\big)T_1\Big]H(x;a_i,a_{i+1}) -$$
$$-3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1)$$

та розв'язуємо рівняння системи методом варіації сталої. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} T_1 = C_1 e^{\delta_1 x} + C_2 e^{-\delta_1 x} + \dfrac{1}{\delta_1}\displaystyle\int_0^x \varphi_1(s)\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s)\,ds, \\ T_2 = S_1 e^{\delta_2 x} + S_2 e^{-\delta_2 x} + \dfrac{1}{\delta_2}\displaystyle\int_0^x \varphi_2(s)\,\mathrm{sh}\,\delta_2(x-s)\,ds, \end{cases} \tag{6}$$

де $\delta_1^2 = \eta_1^{+}$, $\delta_2^2 = 3\big(1+\eta_1^{+}\big)$.

У підінтегральних виразах присутні перші похідні від шуканих функцій T_1 та T_2, тому скористаємося інтегруванням за частинами:

$$-\frac{1}{\delta_1}\int_a^x \frac{1}{s}\frac{\partial T_1}{\partial s}\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s)\,ds = \frac{1}{\delta_1 a}T_1(a)\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-a) +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\int_a^x T_1\left(-\frac{1}{s^2}\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s) - \frac{\delta_1}{s}\mathrm{ch}\,\delta_1(x-s)\right)ds;$$
$$-\frac{1}{\delta_2}\int_a^x \frac{1}{s}\frac{\partial T_2}{\partial s}\,\mathrm{sh}\,\delta_2(x-s)\,ds = \frac{1}{\delta_2 a}T_2(a)\,\mathrm{sh}\,\delta_2(x-a) +$$
$$+\frac{1}{\delta_2}\int_a^x T_2\left(-\frac{1}{s^2}\mathrm{sh}\,\delta_2(x-s) - \frac{\delta_2}{s}\mathrm{ch}\,\delta_2(x-s)\right)ds.$$

Отже, система (6) набуде вигляду

$$\begin{cases} T_1 = C_1 e^{\delta_1 x} + C_2 e^{-\delta_1 x} + \displaystyle\int_0^x \big[T_1\psi_{11}(x,s) + T_2\psi_{12}(x,s)\big]ds - \\ -\dfrac{1}{\delta_1}\displaystyle\int_0^x (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s)\,ds + T_1(a)\gamma_1(x), \\ T_2 = S_1 e^{\delta_2 x} + S_2 e^{-\delta_2 x} + \displaystyle\int_0^x \big[T_1\psi_{21}(x,s) + T_2\psi_{22}(x,s)\big]ds - \\ -\dfrac{1}{\delta_2}\displaystyle\int_0^x 3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1)\,\mathrm{sh}\,\delta_2(x-s)\,ds + T_2(a)\gamma_2(x). \end{cases} \tag{7}$$

Тут введені такі позначення функцій:

$$\psi_{11}(x,s) = \frac{1}{\delta_1}\left(-\frac{1}{s^2}\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s) - \frac{\delta_1}{s}\mathrm{ch}\,\delta_1(x-s)\right) +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\sum_{i=1}^{n-1}\big(\eta_{i+1}^{+} - \eta_1^{+}\big)H(x;a_i,a_{i+1})\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s),$$
$$\psi_{12}(x,s) = \frac{1}{\delta_1}\sum_{i=1}^{n-1}\big(\eta_i^{-} - k\big)H(x;a_i,a_{i+1})\,\mathrm{sh}\,\delta_1(x-s),$$

$$\psi_{21}(x,s)=\frac{1}{\delta_2}\sum_{i=1}^{n-1}3\left(\eta_i^- - k\right)H(x;a_i,a_{i+1})\operatorname{sh}\delta_2(x-s),$$

$$\psi_{22}(x,s)=\frac{1}{\delta_2}\left(-\frac{1}{s^2}\operatorname{sh}\delta_2(x-s)-\frac{\delta_2}{s}\operatorname{ch}\delta_2(x-s)\right)+$$
$$+\frac{1}{\delta_2}3\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+\right)H(x;a_i,a_{i+1})\operatorname{sh}\delta_2(x-s).$$

Наведемо розв'язування для першого рівняння. Задовольнимо межову умову (3) у точці $x=a$:

$$\delta_1 C_1 e^{\delta_1 a}-\delta_1 C_2 e^{-\delta_1 a}-b_1\left(C_1 e^{\delta_1 a}+C_2 e^{-\delta_1 a}-T_{11}^c\right)=0.$$

Звідси

$$C_1=C_2\frac{\delta_1+b_1}{\delta_1-b_1}e^{-2\delta_1 a}-\frac{b_1 T_{11}^c}{\delta_1-b_1}e^{-\delta_1 a}.$$

Тому вираз для температурної характеристики T_1 набуде вигляду

$$T_1=C_2\mu_1(x)+\varepsilon_1(x)+T_1(a)\gamma_1(x)+\int_0^x\left[T_1\psi_{11}(x,s)+T_2\psi_{12}(x,s)\right]ds, \qquad (8)$$

де

$$\mu_1(x)=\frac{\delta_1+b_1}{\delta_1-b_1}e^{\delta_1(x-2a)}+e^{-\delta_1 x},$$

$$\varepsilon_1(x)=-\frac{b_1 T_{11}^c}{\delta_1-b_1}e^{\delta_1(x-a)}-\frac{1}{\delta_1}\int_0^x(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2)\operatorname{sh}\delta_1(x-s)\,ds.$$

Похідна від T_1

$$T_1'=C_2\mu_1'(x)+\varepsilon_1'(x)+T_1(a)\gamma_1'(x)+\int_0^x\left[T_1\psi_{11}'(x,s)+T_2\psi_{12}'(x,s)\right]ds+$$
$$+T_1(x)\psi_{11}(x,x)+T_2(x)\psi_{12}(x,x).$$

Для визначення константи C_2 задовольнимо межову умову в точці $x=l$:

$$C_2=-\frac{\varepsilon_1'(l)+b_2\varepsilon_1(l)}{p_1}-T_1(a)\frac{\gamma_1'(l)+b_2\gamma_1(l)}{p_1}-$$
$$-\frac{1}{p_1}\int_a^l\left[T_1(s)\left(\psi_{11}'(l,s)+b_2\psi_{11}(l,s)\right)+T_2(s)\left(\psi_{12}'(l,s)+b_2\psi_{12}(l,s)\right)\right]ds-$$
$$-\frac{1}{p_1}T_1(l)\psi_{11}(l,l)-\frac{1}{p_1}T_2(l)\psi_{12}(l,l), \qquad (9)$$

тут $p_1=\mu_1'(l)+b_2\mu_1(l)$.

Як бачимо, вираз (9) для невідомої константи містить інтеграл з невідомими функціями. Тому, підставивши C_2 в (8), отримаємо лінійне інтегральне рівняння другого роду:

$$T_1=f_1(x)+T_1(a)r_{11}(x)+T_1(l)r_{12}(x)+T_2(l)r_{13}(x)+$$
$$+\int_0^l\left[T_1 q_{11}(x,s)+T_2 q_{12}(x,s)\right]ds+\int_0^x\left[T_1\psi_{11}(x,s)+T_2\psi_{12}(x,s)\right]ds. \qquad (10)$$

У формулі (10) введені такі функції:

$$f_1(x)=-\frac{\varepsilon_1'(l)+b_2\varepsilon_1(l)}{p_1}\mu_1(x)+\varepsilon_1(x),$$

$$r_{11}(x)=-\frac{\gamma_1'(l)+b_2\gamma_1(l)}{p_1}\mu_1(x)+\gamma_1(x),\qquad r_{12}(x)=-\frac{1}{p_1}\psi_{11}(l,l)\mu_1(x),$$

$$r_{13}(x)=-\frac{1}{p_1}\psi_{12}(l,l)\mu_1(x),\quad q_{11}(x,s)=\frac{1}{p_1}\left(\psi_{11}'(l,s)+b_2\psi_{11}(l,s)\right)\mu_1(x),$$

$$q_{12}(x,s)=\frac{1}{p_1}\left(\psi_{12}'(l,s)+b_2\psi_{12}(l,s)\right)\mu_1(x).$$

Аналогічно виводимо друге інтегральне рівняння:

$$T_2=f_2(x)+T_2(a)r_{21}(x)+T_1(l)r_{22}(x)+T_2(l)r_{23}(x)+$$
$$+\int_0^l\left[T_1q_{21}(x,s)+T_2q_{22}(x,s)\right]ds+\int_0^x\left[T_1\psi_{21}(x,s)+T_2\psi_{22}(x,s)\right]ds. \tag{11}$$

Отриману в результаті виконаних операцій систему лінійних інтегральних рівнянь (10), (11) розв'язано методом квадратурних формул з використанням програмування.

Переміщення в осесиметричній зрізаній конічній оболонці знаходимо зі системи рівнянь [2]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x^3}\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\theta}{x^2}\left(u+\mathrm{tg}\,\theta w+\nu x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\\ \qquad -\alpha_t(1+\nu)h\left(\dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial T_2}{\partial x}-\dfrac{1}{hx}\mathrm{tg}\,\theta T_1\right),\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{u}{x^2}+\dfrac{\nu\,\mathrm{tg}\,\theta}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{tg}\,\theta}{x^2}w=-\alpha_t(1+\nu)h\dfrac{\partial T_1}{\partial x}.\end{cases} \tag{12}$$

Тут ν – коефіцієнт Пуасона; α_t – коефіцієнт температурного розширення.

Розв'язок системи (12) повинен задовольняти такі граничні умови:

$$w(x)=w'(x)=0,\ \ x=a;\qquad w(x)=w'(x)=0,\ \ x=l.$$
$$u(x)=0,\ \ x=a;\ u(x)=0,\ \ x=l. \tag{13}$$

Її розв'язали, зводячи до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду.

Вважаючи праві частини відомими, одержимо загальні розв'язки рівнянь:

$$\begin{cases}w=C_1\ln x+C_2x^2\ln x+C_3x^2+C_4+\displaystyle\int_a^x K(x,s)\phi_1(s)ds,\\ u=S_1x+S_2\dfrac{1}{x}+\displaystyle\int_a^x k(x,s)\phi_2(s)ds.\end{cases} \tag{14}$$

Тут

$$K(x,s)=\frac{1}{4}\left(s^3\ln x+x^2s\ln x-x^2s\ln s-x^2s+s^3-s^3\ln s\right),$$

$$k(x,s)=\frac{x}{2}-\frac{s^2}{2x},$$

$$\phi_1(s)=-\frac{3\,\mathrm{tg}\,\theta}{x^2}\left(u+\mathrm{tg}\,\theta w+\nu x\frac{du}{dx}\right)-\alpha_t(1+\nu)h\left(\frac{d^2T_2}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{dT_2}{dx}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{x}\mathrm{tg}\,\theta T_1\right),$$

$$\phi_2(s)=-\frac{\nu\,\mathrm{tg}\,\theta}{x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{x^2}w-\alpha_t(1+\nu)h\frac{\partial T_1}{\partial x}.$$

У системі (14), задовольняючи межові умови в точці $x=a$, можна виразити константи C_1 та C_4 через C_2 та C_3, а S_2 – через S_1:

$$C_1 = -\left(2a^2 \ln a + a^2\right)C_2 - 2a^2 C_3,\; C_4 = 2a^2 \ln^2 a C_2 + \left(2a^2 \ln a - a^2\right)C_3,$$

$$S_2 = -S_1 a^2.$$

Також, скориставшись методом інтегрування за частинами, позбудемось похідних від функцій u та w у підінтегральних виразах. У результаті отримаємо систему

$$\begin{cases} w = C_2\pi_1(x) + C_3\pi_2(x) + \int\limits_a^x u(s)\omega_{12}(x,s)\,ds + \\ \quad + \int\limits_a^x w(s)\omega_{11}(x,s)\,ds + \mathrm{L}_1(x), \\ u = S_1\pi_3(x) + \int\limits_a^x w(s)\omega_{21}(x,s)\,ds + \mathrm{L}_2(x), \end{cases} \tag{15}$$

в якій

$$\omega_{11}(x,s) = -\frac{3\,\mathrm{tg}\,\theta}{s^2}K(x,s),$$

$$\omega_{12}(x,s) = -\frac{3\,\mathrm{tg}\,\theta}{s^2}K(x,s) + 3\,\mathrm{tg}\,\theta\nu\left(\frac{K_s'(x,s)}{s} - \frac{K(x,s)}{s^2}\right),$$

$$\omega_{21}(x,s) = \nu\,\mathrm{tg}\,\theta\left(\frac{k_s'(x,s)}{s} - \frac{k(x,s)}{s^2}\right) + \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{s^2}k(x,s),$$

$$L_1(x) = -\int\limits_a^x \alpha_t(1+\nu)h\left(\frac{d^2T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{dT_2}{dx} - \frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\theta T_1\right)K(x,s)\,ds,$$

$$L_2(x) = -\int\limits_a^x \alpha_t(1+\nu)h\frac{\partial T_1}{\partial x}k(x,s)\,ds,$$

$$\pi_1(x) = 2a^2\ln^2 a + \left(x^2 - a^2\right)\ln x - 2a^2 \ln a \ln x,$$

$$\pi_2(x) = x^2 - a^2 + 2a^2(\ln a - \ln x),\; \pi_3 = x - \frac{a^2}{x}.$$

Для визначення невідомих констант, що залишилися, задовольнимо межові умови в точці $x = l$:

$$C_2\pi_1(l) + C_3\pi_2(l) = -\int\limits_a^l u(s)\omega_{12}(l,s)\,ds - \int\limits_a^l w(s)\omega_{11}(l,s)\,ds - \mathrm{L}_1(l),$$

$$C_2\pi_1'(l) + C_3\pi_2'(l) = -\int\limits_a^l u(s)\omega_{12}'(l,s)\,ds - \int\limits_a^l w(s)\omega_{11}'(l,s)\,ds - \mathrm{L}_1'(l),$$

$$S_1\pi_3(l) = -\int\limits_a^l w(s)\omega_{21}(l,s)\,ds - \mathrm{L}_2(l).$$

Якщо позначити

$$\alpha_{11} = \pi_1(l),\; \alpha_{12} = \pi_2(l),\; \alpha_{21} = \pi_1'(l),\; \alpha_{22} = \pi_2'(l),$$

$$\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21},$$

то

$$C_2 = \int\limits_a^l w(s)\frac{\alpha_{12}\omega_{11}'(l,s) - \alpha_{22}\omega_{11}(l,s)}{\Delta}ds +$$

$$+\int\limits_a^l u(s)\frac{\alpha_{12}\omega_{12}'(l,s) - \alpha_{22}\omega_{12}(l,s)}{\Delta}ds + \frac{\alpha_{12}L_1'(l) - \alpha_{22}L_1(l)}{\Delta},$$

$$C_3 = \int_a^l w(s)\frac{\alpha_{21}\omega_{11}(l,s)-\alpha_{11}\omega'_{11}(l,s)}{\Delta}ds + \int_a^l u(s)\frac{\alpha_{21}\omega_{12}(l,s)-\alpha_{11}\omega'_{12}(l,s)}{\Delta}ds + \frac{\alpha_{21}L_1(l)-\alpha_{11}L'_1(l)}{\Delta}, \qquad (16)$$

$$S_1 = -\frac{1}{\pi_3(l)}\int_a^l w(s)\omega_{21}(l,s)ds - \frac{1}{\pi_3(l)}\mathrm{L}_2(l).$$

Вирази для констант (16) містять інтеграли з невідомими функціями. Отже, підставивши (16) в (15), отримаємо систему двох лінійних інтегральних рівнянь другого роду, в якій невідомими будуть переміщення u та w:

$$\begin{cases} w = F_1(x) + \int_a^x \left[u(s)\omega_{12}(x,s) + w(s)\omega_{11}(x,s)\right]ds + \\ \quad + \int_a^l \left[w(s)K_{11}(x,s) + u(s)K_{12}(x,s)\right]ds, \\ u = -\mathrm{L}_2(l)\frac{\pi_3(x)}{\pi_3(l)} - \frac{\pi_3(x)}{\pi_3(l)}\int_a^l w(s)\omega_{21}(l,s)ds + \mathrm{L}_2(x) + \\ \quad + \int_a^x w(s)\omega_{21}(x,s)ds; \end{cases} \qquad (17)$$

тут

$$\delta_1 = \frac{\alpha_{12}L'_1(l)-\alpha_{22}L_1(l)}{\Delta}, \quad \delta_2 = \frac{\alpha_{21}L_1(l)-\alpha_{11}L'_1(l)}{\Delta},$$

$$F_1(x) = \delta_1\pi_1(x) + \delta_2\pi_2(x) + \mathrm{L}_1(x).$$

Система лінійних інтегральних рівнянь (17) розв'язана методом квадратурних формул за допомогою програмування.

Зусилля, моменти і напруження в осесиметричній конічній оболонці знаходимо з формул [2]

$$N_1 = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\nu}{\alpha}(u + \mathrm{tg}\,\theta w) - \alpha_t(1+\nu)T_1\right],$$

$$N_2 = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{x}(u + \mathrm{tg}\,\theta w) + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_t(1+\nu)T_1\right],$$

$$M_1 = \frac{2Eh}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial^2\alpha} - \frac{\nu}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{\alpha_t}{h}(1+\nu)T_2\right], \qquad (18)$$

$$M_2 = \frac{2Eh}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2\alpha} - \frac{\alpha_t}{h}(1+\nu)T_2\right],$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2h}\left(N_1 + 3M_1\frac{z}{h^2}\right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2h}\left(N_2 + 3M_2\frac{z}{h^2}\right).$$

Тут E – модуль Юнга.

Використовуючи формули (10), (11), (17), (18), розрахували прогин w і напруження σ_2 на поверхні $z = h$ для зрізаної конічної оболонки, яка є защемленою і теплоізольованою на краях, при $\mathrm{tg}\,\theta = 0{,}6$, $a = 60$, $l = 81$, $\nu = 0{,}3$, $\alpha_t = 1{,}52\cdot 10^{-5}\,{}^o\mathrm{C}$. Розглядали ситуацію, коли на внутрішній поверхні температура t^- стала і дорівнює $50^o\mathrm{C}$, а на зовнішній на відрізках

$\left[a,\dfrac{l-a}{3}\right]$, $\left[\dfrac{2(l-a)}{3},l\right]$ – $t^{+}=70^{o}\mathrm{C}$, а на відрізку $\left[\dfrac{l-a}{3},\dfrac{2(l-a)}{3}\right]$ становить $t^{+}=120^{o}\mathrm{C}$, тобто на середньому відрізку є суттєве нагрівання. За сталих коефіцієнтів тепловіддачі $\mu^{+}=40\dfrac{1}{\text{м}}$ і $\mu^{-}=50\dfrac{1}{\text{м}}$ результати описують криві *1* (рис. 1 і 2), а криві *2* – випадок, коли на відрізку $\left[\dfrac{l-a}{3},\dfrac{2(l-a)}{3}\right]$ коефіцієнт тепловіддачі рівний нулю. На рис. 2 $\sigma_2^{*}=\sigma_2\dfrac{h\left(1-\nu^{2}\right)}{E}$.

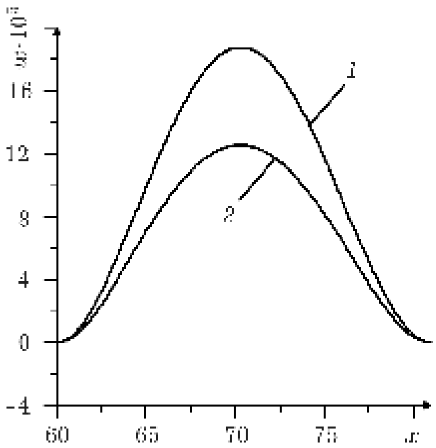

Рис. 1.

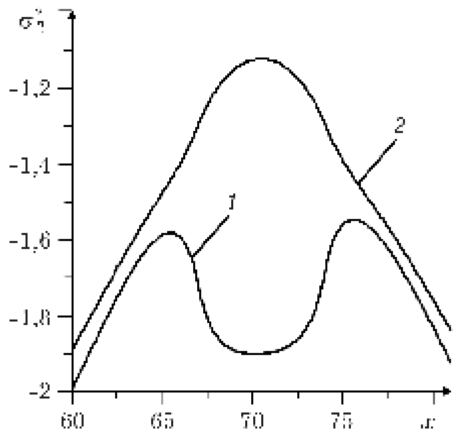

Рис. 2.

Зі зниженням коефіцієнта тепловіддачі, прогин в оболонці також зменшиться, а напруження матимуть локальний максимум.

Висновки. Розв’язано складні системи диференціальних рівнянь термопружності зі змінними коефіцієнтами біля шуканих функцій без розділення на окремі рівняння чи зі застосуванням комплексних функцій. Виявлено, що навіть систему з диференціальним рівнянням четвертого порядку можна звести до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду.

1. *Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А.* Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 288 с.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
3. *Чиж А. І.* Термонапружений стан нескінченної циліндричної оболонки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі і температурою зовнішнього середовища // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 157–163.
4. *Akbari M., Kiani Y., Eslami M. R.* Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports // Acta Mech. – 2014. – 226, № 3. – P. 897–915.
5. *Duc Nguyen Dinh, Pham Dinh Nguyen.* The Dynamic Response and Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite (FG-CNTRC) Truncated Conical Shells Resting on Elastic Foundations // Materials. – 2017. – № 10. – P. 1194.
6. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin plates and shells: Theory, Analisys and Applications. – New York: Marcel Dekker, 2001 – 652 p.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СРЕЗАННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТМИ ТЕПЛООТДАЧИ

Приведен метод решения системы уравнений термоупругости в перемещениях для тонкой срезанной конической оболочки с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи на лицевых поверхностях. Метод заключается в сведении системы дифференциальных уравнений к системе линейных интегральных уравнений второго рода. Исследовано влияние переменных коэффициентов теплоотдачи на прогиб и температурные напряжения в оболочке.

THERMAL STRESSES IN AXISYMMETRIC CUT CONICAL SHELL WITH PIECEWISE CONSTANT HEAT TRANSFER COEFFITSIENTS

The method of solving the system of thermoelasticity equations in displacements for a thin cut conical shell with a piecewise constant coefficients of heat transfer on the front surfaces is given. The method consists in the reduction of the system of differential equations to the system of linear integral equations of the second kind. The influence of variable coefficients of heat transfer on deflection and temperature stresses in a shell is investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.11.18