

М. І. Махоркін

## ВПЛИВ КЛИНОВИДНОЇ ВСТАВКИ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСОБЛИВІСТЬ НАПРУЖЕНЬ У СКЛАДЕНІЙ КЛИНОПОДІБНІЙ СТРУКТУРІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

*Розглянуто трикомпонентний композитний клин, центральний елемент якого виконано у вигляді вставки із функціонально-градієнтного матеріалу з кутовою градієнтністю. Вставку змодельовано пакетом із 20-ти клинів однакового розхилу, характеристики яких пов'язані відповідною функціональною залежністю. Вивчено вплив розміру вставки та функціональної залежності зміни характеристик матеріалу на порядок сингулярності поля напружень в околі вершини такої системи.*

**Вступ.** Починаючи ще з праць К. Wieghardt [14] (1907), сингулярність напружень поблизу "особливих" точок пружних тіл (наприклад, кутові чи точки, де змінюються стрибкоподібно пружні сталі матеріалу, типи крайових умов тощо) перебуває під пильною увагою дослідників. Це зумовлено в першу чергу тим, що такі точки є концентраторами напружень та осередками розвитку руйнування структури. З вичерпним списком праць, що стосуються результатів дослідження напруженого стану в околі особливих точок в ізотропних матеріалах, можна ознайомитися в оглядах [1, 4, 5, 10–13, 15]. Там же обґрунтовано правомірність використання багатоклинових систем для моделювання таких околів.

Із розвитком технологій у приладобудуванні дедалі частіше використовують функціонально-градієнтні (ФГМ) та анізотропні матеріали, а відтак, постає необхідність вивчати напружений стан поблизу особливих точок, що містяться в таких матеріалах [4, 6, 7].

У працях [5, 8, 9] вивчали сингулярність напружень в околі особливої точки у ФГМ з кутовою градієнтністю (пружні характеристики матеріалу неперервно залежать від кутової полярної координати, а полюс системи координат збігається з особливою точкою). Там же, спираючись на апроксимацію пружних характеристик кусково-сталою функцією, розглянули можливість наближеного визначення особливості напружень. Окремий випадок визначення порядку сингулярності напружень у складеному клині зі вставкою в припущенні, що її модуль зсуву змінюється за квадратичним законом, розглянуто у публікації [12], де досліджено вплив пружних характеристик зовнішніх клинів на порядок сингулярності. Проте, незважаючи на достатню кількість дотичних до згаданої проблематики праць (див. огляди [7, 4, 8, 12]), залишається відкритим питання про вплив закону зміни характеристик на опис напруженого стану в околі відповідних особливих точок.

Нижче вивчено поздовжній зсув складеного трикомпонентного клина, центральний елемент якого виконаний із ФГМ з кутовою градієнтністю. За відомими результатами [2, 10] порівняльно оцінено сингулярність напружень в околі вершини клиноподібної структури для різних функціональних залежностей модуля зсуву вставки та її геометричних параметрів. Такий об'єкт досліджень обраний, зокрема, з фізичних міркувань про дифузійний матеріалів під час їх технологічного з'єднання [3, 4, 11], внаслідок чого в околі точки зламу межі поділу матеріалів й виникає клиновидна інтерфаза, пружна характеристика якої змінюється за деяким законом.

**Математична модель.** Розглянемо антиплову деформацію композитного клина, складеного із трьох клиноподібних елементів  $S_1^*$ ,  $S_2^*$ ,  $S_3^*$  з кутами розхилу біля вістря  $\alpha_1^*$ ,  $\beta$  і  $\alpha_3^*$  відповідно ( $\alpha_1^* + \beta + \alpha_3^* \leq 2\pi$ ) (рис. 1а).

Вважаємо, що зовнішні клини  $S_1^*$  і  $S_3^*$  однорідні та ізотропні з модулями

зсуву  $\mu_1^*$  та  $\mu_3^*$ , а внутрішній клин-вставка  $S_2^*$  зроблений із ФГМ, і його модуль зсуву змінюється у трансверсальному напрямі  $\mu_2^* = \mu(\varphi)$ . Зайняті клинами системи області в полярній системі координат визначимо так (рис. 1а):

$$\begin{aligned} S_1^* &= \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \alpha_1\}, \\ S_2^* &= \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, \alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_1 + \beta\}, \\ S_3^* &= \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, \alpha_1 + \beta \leq \varphi \leq \alpha_1 + \beta + \alpha_2 \leq 2\pi\}. \end{aligned} \quad (1)$$

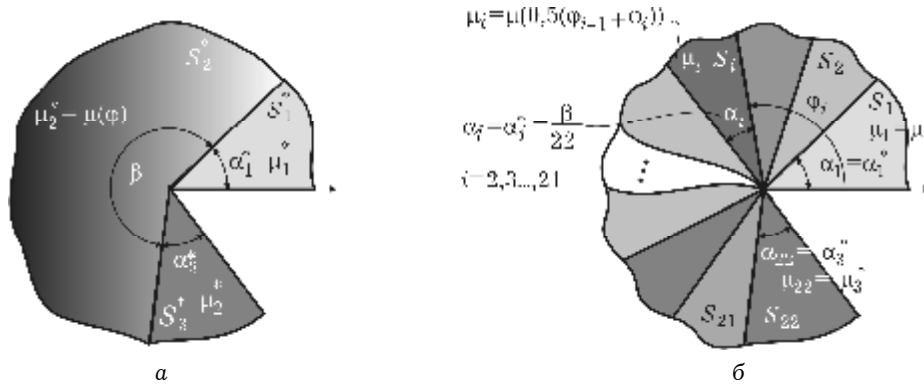


Рис. 1. Композитний клин зі вставкою з функціонально-градієнтного матеріалу.

Зважаючи на відомі результати [2, 8, 9], функціонально-градієнтну вставку  $S_2^*$  допустимо моделювати кусково-однорідним клином, складеним із достатньої кількості клинів з малими кутами розхилу, пружні характеристики яких змінюються від клина до клина за законом  $\mu_k = \mu(\varphi_k^*)$ , де  $\varphi_k^* \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ . Відтак, замінивши клин-вставку  $S_2^*$  пакетом із 20-ти клинів  $S_k$  з кутами розхилу  $\alpha^* = \beta/20$  (така кількість компонентів пакета забезпечувала за наближеного визначення порядку сингулярності в складеному клині зі вставкою з ФГМ відносно похибку, меншу за 5% [2]), замість початкової системи розглядатимемо багатоклиновий композит  $S = \bigcup_{i=1}^{22} S_i$  (рис. 1б), у якому клинові компоненти займають області

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^* = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}, \\ S_k &= \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, \varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k\}, \\ S_{22} &= S_3^* = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, \varphi_{21} \leq \varphi \leq \varphi_{22} \leq 2\pi\}, \end{aligned} \quad (2)$$

а компонентам системи відповідатимуть такі пружні сталі:

$$\mu_1 = \mu_1^*, \mu_k = \mu[0,5(\varphi_{k-1} + \varphi_k)], \mu_{22} = \mu_3^*. \quad (3)$$

Тут  $\varphi_1 = \alpha_1$ ;  $\varphi_{21} = \alpha_1 + 20\alpha^*$ ;  $\varphi_{22} = \alpha_1 + 20\alpha^* + \alpha_3$ ;  $\varphi_k = \varphi_1 + (k-1)\alpha^*$ ;  $k = \overline{2, 22}$ .

Зазначимо, що для клинів, які моделюють вставку з ФГМ, можна обирати й інші кусково-сталі апроксимаційні залежності, пов'язані зі законом зміни модуля зсуву вставки (наприклад,  $\mu_k = \mu(\varphi_{k-1})$  або  $\mu_k = \mu(\varphi_k)$ ).

Таким чином, вивчення порядку сингулярності напруженого стану складеного клина, що містить вставку із ФГМ з кутовою градієнтністю (рис. 1а), на основі результатів праць [2, 8] звели до дослідження порядку

сингулярності у багатоклиновій системі, складеній з 22-х клинів  $S_i$  ( $i = \overline{1, 22}$ ) (рис 1б), характеристики яких обирають відповідно до (2).

Як відомо, поля напружень в околі особливих точок подають у вигляді безмежного ряду [4, 10]:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} K_i r^{-\lambda_i}, \quad (4)$$

де  $r$  – відстань до особливої точки;  $\lambda_i$  – показники, які знаходять з розв'язків відповідних характеристичних рівнянь;  $K_i$  – визначувані різними способами коефіцієнти асимптотичного ряду.

Отже, при  $r \rightarrow 0$  достатньо обмежитися сингулярною частиною ряду. У працях [2, 10] виявлено, що порядок сингулярності напружень у композитному клині, складеному із довільної кількості  $n$  клинів  $S_i$  з довільними механічними (модуль зсуву  $\mu_i$ ) та геометричними характеристиками (кут розхилу біля вершини  $\alpha_i$ ), обчислюють зі співвідношення

$$\lambda_i = 1 - \operatorname{Re}(q_i), \quad (5)$$

де  $q_i$  – корені характеристичного рівняння  $\Delta(q) = 0$ ,  $\operatorname{Re}(q_i) \in (0; 1)$ .

Залежно від умов відповідної крайової задачі теорії пружності характеристичні рівняння  $\Delta(q) = 0$  за позовжнього зсуву мають такий вигляд [10]:

1) за умов першої крайової задачі теорії пружності

$$q \sin(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (6)$$

2) за умов другої крайової задачі

$$\sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (7)$$

3) за умов мішаної крайової задачі

$$\cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (8)$$

якщо зусилля задані при  $\varphi = 0$ , а переміщення – при  $\varphi = \varphi_n$  та

$$q \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (9)$$

якщо зусилля задані при  $\varphi = \varphi_n$ , а переміщення – при  $\varphi = 0$ .

Тут

$$\begin{aligned} L_1^k &= -q \sin q\varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)], \\ L_2^k &= q \cos q\varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_i, \quad \varphi_0 = 0, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Зазначимо, що якщо у (6)–(9) прийняти  $\varphi_n = 2\pi$ , то розв'язки відповідних характеристичних рівнянь описуватимуть сингулярність напружень для півбезмежних тріщини (6), абсолютно жорсткого включення (7) та част-

ково відшарованого абсолютно жорсткого включення (8) і (9), що виходять у точку сходження клинів.

Таким чином, визначення порядку сингулярності напруженого стану у композитному клині зі вставкою з ФГМ (рис. 1а) звели до відшукування розв'язків рівнянь (6)–(9), де прийнято  $n=22$ , а кути розхилу клинів  $\alpha_i$ , їх модулі зсуву  $\mu_i$  та координати ліній спряження елементів системи  $\varphi_i$  задають згідно зі співвідношеннями (2) і (3).

**Числові дослідження та їх аналіз.** Щоб з'ясувати, як впливає закон зміни пружних характеристик вставки з ФГМ на напружено-деформований стан, визначали порядок сингулярності напружень залежно від геометричних параметрів системи. Дослідження виконали для типових законів опису зміни модуля зсуву вставки [4, 5, 8, 9, 12], а саме:

лінійного –

$$\mu(\varphi) = \varphi a + b, \quad \alpha_1^* < \varphi < \alpha_1^* + \beta, \quad (11)$$

де  $a = (\mu_3^* - \mu_1^*)\beta^{-1}$ ,  $b = [\mu_1^*\beta - \alpha_1^*(\mu_3^* - \mu_1^*)]\beta^{-1}$ ;

квадратичного –

$$\mu(\varphi) = \left\{ a \left[ \varphi - (0,5\beta + \alpha_1^*) \right] + b \right\}^2, \quad \alpha_1^* < \varphi < \alpha_1^* + \beta, \quad (12)$$

де  $a = (\sqrt{\mu_3^*} - \sqrt{\mu_1^*})\beta^{-1}$ ,  $b = 0,5(\sqrt{\mu_3^*} + \sqrt{\mu_1^*})$ ;

експоненційного –

$$\mu(\varphi) = be^{a\varphi}, \quad \alpha_1^* < \varphi < \alpha_1^* + \beta, \quad (13)$$

де  $a = (\beta)^{-1} \ln \gamma$ ,  $b = \mu_1^* \gamma^{\frac{\alpha_1^*}{\beta}}$ ,  $\mu_1^* \gamma = \mu_3^*$ .

Використавши функціональні залежності (11)–(13) у поданні (3) та знайшовши корені характеристичних рівнянь (6)–(9), що належать інтервалу (0, 1), за формулою (5) з'ясували порядок сингулярності напружень у розглядуваній системі.

Характерні результати досліджень впливу вигляду функціональної залежності модуля зсуву вставки на порядок сингулярності напружень залежно від кута розхилу вставки подано на рис. 2–4.

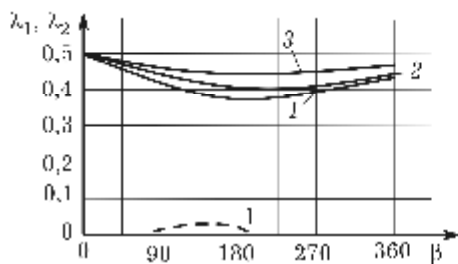


Рис. 2. Значення порядків сингулярності  $\lambda_1$  (суцільні криві) та  $\lambda_2$  (штрихова крива) для першої крайової задачі теорії пружності.

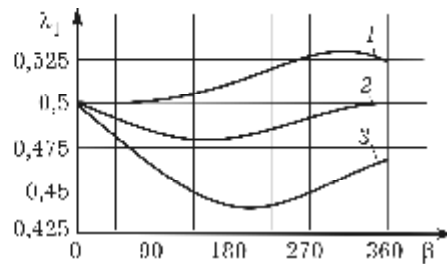


Рис. 3. Значення порядку сингулярності  $\lambda_1$  для другої крайової задачі теорії пружності.

Ці результати відповідають системам, для яких  $\alpha_1^* + \beta + \alpha_3^* = 2\pi$  (кутовий виріз вироджується у розріз), кути розхилу зовнішніх клинів однакові ( $\alpha_1^* = \alpha_3^*$ ), а відношення їхніх модулів зсуву  $\gamma = \mu_3^*/\mu_1^* = 10$  за умов першої (рис. 2), другої (рис. 3) та мішаної (рис. 4) крайових задач. Криві 1–3 на рисунках відтворюють відповідні результати визначення порядку сингу-

лярності напружень для лінійного, квадратичного та експоненціального законів зміни модуля зсуву вставки  $S_2^*$ .

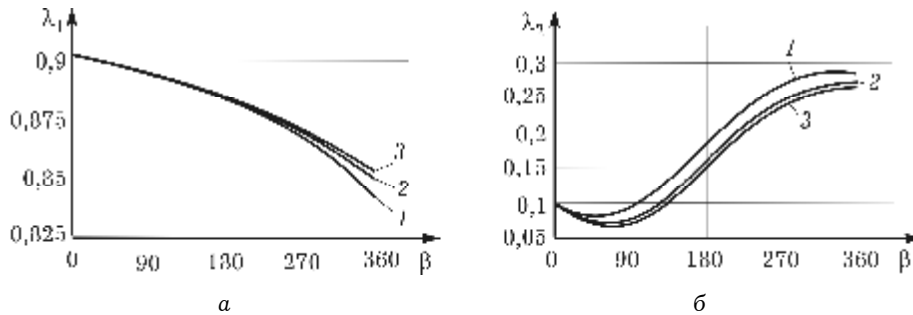


Рис. 4. Значення порядків сингулярності  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  для мішаної задачі теорії пружності (зусилля задані при  $\varphi = 0$ , переміщення – при  $\varphi = \varphi_n$ , а відношення модулів зсуву зовнішніх клинів –  $\mu_3^*/\mu_1^* > 1$ ).

Наведені результати свідчать ось про що.

Для першої крайової задачі (рис. 2) порядок сингулярності зі збільшенням кутового розхилу вставки зменшується від значення  $\lambda_1 = 0,5$  (відсутність вставки), після чого збільшується, залишаючись при цьому меншим за  $\lambda_1 = 0,5$ , навіть коли розглядають тріщину в матриці з ФГМ. Мінімального значення порядок сингулярності набуває за виродження вставки у півплощину  $\beta = \pi$ . Вплив закону зміни модуля зсуву матеріалу вставки проявляється у тому, що найменшими значення порядку сингулярності будуть за вставки, зробленої з матеріалу, модуль зсуву якого змінюється за лінійним законом, а найбільшими – за експоненціальним.

Для другої крайової задачі теорії пружності (рис. 3) значення порядку сингулярності будуть найменші, якщо модуль зсуву матеріалу вставки змінюється згідно з експоненціальним законом, а найбільші – коли за лінійним. Якщо зміну модуля зсуву описує експоненціальний закон, порядок сингулярності змінюється подібно, як для першої крайової задачі: його значення спершу зменшуються зі збільшенням кута розхилу вставки, а потім зростають, залишаючись при цьому меншими за  $\lambda_1 = 0,5$ . Середніми є значення порядку сингулярності напружень за використання вставки, модуль зсуву матеріалу якої змінюється за квадратичним законом. У цьому випадку після досягнення мінімуму вони зростають, а для  $\beta$ , близьких до  $\beta = 2\pi$ , наближено дорівнюють 0,5. Якщо ж зміну модуля зсуву вставки задає лінійний закон, то для значень  $\beta < \pi/2$  порядок сингулярності близький до  $\lambda_1 \approx 0,5$ . Для  $\beta > \pi/2$  він зростає, досягнувши максимуму при  $\beta \approx 5\pi/3$ , після чого спадає, залишаючись при цьому більшим, ніж 0,5.

Якщо на берегах розрізу задано умови мішаної задачі теорії пружності (рис. 4), окрім максимального  $\lambda_1$  (рис. 4a), необхідно брати до уваги менший за значенням порядок сингулярності  $\lambda_2$  (рис. 4б). Максимальні значення порядку сингулярності 0,84 <  $\lambda_1$  < 0,905 для різних законів зміни коефіцієнта Пуассона матеріалу вставки мало відрізняються, а для  $\beta < \pi$  практично рівні між собою. Найбільші значення порядок сингулярності набуває, коли закон зміни модуля зсуву вставки описує експоненціальна залежність, а найменші – коли лінійна. Якщо система перебуває за умов мішаної задачі теорії пружності, то на інтервалі (0;1), окрім максимальних значень  $\lambda_1$ , наявні також і менші за значенням порядки сингулярності  $\lambda_2$ , що належать інтервалу

(0,05;0,3) (рис. 4б). Тоді породжена ними особливість є істотною, а отже, під час оцінювання напружено-деформованого стану в структурі розглянутого типу слід враховувати член ряду (4), який їх містить. Найбільших значень  $\lambda_2$  набувають, якщо модуль зсуву вставки змінюється за лінійною залежністю, а найменших – коли експоненційною (рис. 4б).

Для першої та другої крайових задач теорії пружності також може існувати більше одного значення порядку сингулярності (наприклад, перша крайова задача, коли модуль зсуву матеріалу вставки змінюється за лінійним законом (рис. 2)) для різних геометричних параметрів системи. Проте, оскільки тут  $\lambda_2 = 1$ , сингулярність, породжена ним, є мала, а отже, членом ряду (4), де вона міститься, можна знехтувати [12].

**Висновки.** Описана процедура визначення порядку сингулярності напружень в околі особливої точки клиновидної структури, що містить елементи з ФГМ. Її використано для встановлення порядку сингулярності у двокомпонентному клині зі вставкою з ФГМ з кутовою градієнтністю. Проаналізовано вплив законів зміни модуля зсуву вставки на порядок сингулярності напружень у спаяній із клинів матриці за наявності тріщини, що виходить у точку сходження клинів.

На основі аналізу отриманих результатів, з'ясовано, що:

- вибираючи закон зміни модуля зсуву вставки із ФГМ, можна суттєво вплинути на порядок сингулярності в околі вістря тріщини;
- вставка може як посилювати, так і послаблювати порядок сингулярності залежно від геометричних параметрів системи та вибору закону опису зміни пружної характеристики;
- вставка з ФГМ найчастіше спричиняє появу додаткових доданків у сингулярній частині асимптотичного ряду (4).

Запропонована процедура відкриває широкі можливості для прогнозування міцності та надійності структур, що містять інтерфази з таких матеріалів, а також для використання подібних вставок, щоб зменшити порядок сингулярності напружень у багатоклинових пакетах.

1. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. Махоркін М. І., Скрипочка Т. А. Сингулярність напружень у багатоклиновій системі з пов'язаними між собою пружними характеристиками її елементів за антиплоскої деформації // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. – 2017. – № 2. – С. 170–179.
3. Atkinson C. On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics // Int.J. Fract.–1977. – 13, № 6 – P. 807–820.
4. Carpinteri A., Paggi M. On the asymptotic stress field in angularly non-homogeneous materials // Int. J. Fract.–2005. – 135, № 4. – P. 267–283.
5. Carpinteri A., Paggi M. Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics // J. of mech. of mat. and struct. – 2011. – 6, №1. – P. 113–125.
6. Fedorov A. Yu., Matveenko V.P. Investigation of Stress Behavior in the Vicinity of Singular Points of Elastic Bodies Made of Functionally Graded Materials // J. Appl. Mech. – 2018. – 85, № 6. –P. 061008-1 – 061008-13.
7. Hu X.F., Yao W.A., S. T. Yang S.T. A Symplectic Analytical Singular Element for Steady-State Thermal Conduction With Singularities in Anisotropic Material // J. of heat transfer . – 2018. – 140, № 9. – P. 091301-1–091301-13
8. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – 61. – P. 87–93.
9. Linkov A. M., Koshelev V. F. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – 43. – P. 5909–5930.

10. Makhorkin M., Sulym H. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation // Civil and envir. engin. reports. – 2010. – 5. – P. 235–251.
11. Marur P. R., Tippur H. V. Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient // Int. J. Solids Struct. – 2000. – 37. – P. 5353–5370.
12. Tikhomirov V. V. Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material // St. Petersburg Polytechnical University J.: Physics and Mathematics. – 2015. – 1, № 3. – P. 278–286.
13. Wang J.-Sh., He X., Qin Q.-H. Singularity analysis of electro-mechanical fields in angularly inhomogeneous piezoelectric composites wedges // IUTAM Bookseries. – 2011. – 24. – P. 153–161.
14. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper // Z. Math. Phys. – 1907. – 55. – P. 60–103.
15. Xiaofei H. Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation // Acta Mech. Solida Sinica. – 2013. – 26, № 2. – P. 151–160.

**ВЛИЯНИЕ КЛИНОВИДНОЙ ВСТАВКИ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА НА ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНОЙ КЛИНОВИДНОЙ СТРУКТУРЕ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

*Рассмотрен трехкомпонентный композитный клин, центральный элемент которого выполнен в виде вставки из функционально-градиентного материала с угловой градиентностью. Вставка смоделирована пакетом из 20-ти клиньев с одинаковыми углами раствора, характеристики которых связаны соответствующей функциональной зависимостью. Изучено влияние размера вставки и функциональной зависимости изменения характеристик материала на порядок сингулярности поля напряжений в окрестности вершины такой системы.*

**EFFECT OF A WEDGE TYPE INSERT OF THE FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL ON THE STRESS SINGULARITY IN A COMPOSITE WEDGE STRUCTURE UNDER ANTIPLANE DEFORMATION**

*A three-component composite wedge, the central element of which is made as an insert of a functionally graded material with angular gradientness, is considered. The insert is modeled by a 20 wedge package of the same angle, characteristics of which are related by the corresponding functional dependence. The effect of insert size and functional dependence of material characteristics changes on the order of stress singularity in the vicinity of the such system vertex is studied.*