

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ SH-ХВИЛЬ У КОМПОЗИТАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ТОНКИМИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Запропоновано методикку дослідження ефективних (усереднених) параметрів SH-хвиль у композитних середовищах зі стохастично розподіленими тонкостінними неконтрастними п'єзоелектричними включеннями. Математична модель хвильового явища заснована на дисперсійному співвідношенні Фолді та розв'язку задачі розсіяння хвиль локальною неоднорідністю. Проаналізовано вплив електромеханічних властивостей композиту на ефективні фазові швидкості та коефіцієнти загасання поздовжніх хвиль.

Вступ. Актуальність досліджень хвильових властивостей пружних композитів із множинними тонкостінними неоднорідностями зумовлена проектуванням нових композитних матеріалів, розвитком сучасних методів неруйнівного контролю за їх суцільністю, необхідністю інтерпретації експериментальних геофізичних даних тощо. Останні досягнення теорії хвильових явищ у таких пружних та п'єзокерамічних композитних структурах висвітлені, наприклад, у працях [2, 4, 6, 8, 11–15]. Під час визначення ефективних динамічних параметрів композитних середовищ із незначною концентрацією наповнювачів, коли ефекти множинного перевідбиття хвиль та взаємодії між ними можна знехтувати, зручно користуватись підходами, що ґрунтуються на дисперсійних співвідношеннях Фолді [7, 11, 12]. Нижче на основі цих співвідношень визначено ефективні фазові швидкості та коефіцієнти загасання SH-хвиль у пружних композитах з довільно розподіленими тонкостінними п'єзоелектричними неоднорідностями. Розглянуто неконтрастні наповнювачі, для яких пружні властивості неоднорідностей та матриці несуттєво відрізняються порівняно із малою відносною товщиною включень.

Розсіяння SH-хвиль локальним включенням. Нехай у пружному ізо-тропному просторі з модулем зсуву μ знаходиться тонке прямолінійне п'єзоелектричне включення, що займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| \leq h(x_1)\}$. Тут $h(x_1)$ та $2a$ – товщина та довжина неоднорідності; $x = (x_1, x_2)$ – декартові координати. Матеріал включення належить до кристалографічного класу $6mm$ з пружною і п'єзоелектричною сталими c_{44}^0 і e_{15}^0 та діелектричною проникністю ε_{11}^0 . Відносну товщину включення характеризує малий безрозмірний параметр $\varepsilon = a^{-1} \max_{|x| < a} h(x) = 1$.

Припускаємо, що в матриці поширюється стаціонарна SH-хвиля:

$$u^{in}(x) = u_0 \exp[ik(x_1 \cos \theta_{in} + x_2 \sin \theta_{in})],$$

де u_0 , θ_{in} і k – її амплітуда, кут падіння та хвильове число.

За поздовжнього зсуву відмінні від нуля компоненти векторів переміщень у матриці та включенні $u(x)$ та $u^0(x)$ задовольняють рівняння [1, 5]

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad u(\mathbf{x}) = u^{in}(x) + u^s(x), \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon;$$

$$\Delta u^0(\mathbf{x}) + k_0^2 u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \Delta u^0(\mathbf{x}) - \Delta \varphi_p^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi_p^0(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_{11}^0}{e_{15}^0} \varphi^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon;$$

$$k_0 = kc/c_0, \quad c = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_0 = \sqrt{c_{44}^0(1+\eta^2)/\rho_0}, \quad \eta = e_{15}^0/\sqrt{c_{44}^0 \varepsilon_{11}^0}, \quad (1)$$

де $u^s(x)$ – розсіяне поле переміщень у матриці; $\varphi^0(x)$ – електричний потенціал включення; k , c , ρ і k_0 , c_0 , ρ_0 – хвильові числа, швидкості хвиль та густини матеріалів для матриці і включення відповідно; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку матеріалу включення.

Для компонент тензорів напружень $\sigma_{i3}(\mathbf{x})$ і $\sigma_{i3}^0(\mathbf{x})$ у матриці і включенні та вектора електричної індукції $D_i^0(\mathbf{x})$ у включенні маємо [1, 5]:

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}(\mathbf{x}) &= \mu \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon; \\ \sigma_{i3}^0(\mathbf{x}) &= c_{44}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0(x) + \eta^2 \varphi_p^0(x)); \\ D_i^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{15}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0(\mathbf{x}) - \varphi_p^0(\mathbf{x})), \quad i=1,2, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon.\end{aligned}\quad (2)$$

З використанням співвідношень (2) запишемо умови ідеального механічного контакту між складовими композиту:

$$u(x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \gamma \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u^0(x) + \frac{\varepsilon_{15}^0}{c_{44}^0} \varphi^0(x) \right), \quad \gamma = c_{44}^0 / \mu, \quad x \in \partial W_\varepsilon, \quad (3)$$

де γ – відносна жорсткість матеріалу включення. Електрична індукція на ∂W_ε рівна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{\varepsilon_{11}^0}{\varepsilon_{15}^0} \varphi^0(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (4)$$

На безмежності для розсіяного поля $u^s(x)$ виконується умова випромінювання Зоммерфельда:

$$u^s(x) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp(ikr - i\pi/4) f(\theta), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

де $f(\theta)$ – комплексна амплітуда розсіяння хвиль; (r, θ) – полярна система координат $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.

Вважаємо, що матеріал неоднорідності неконтрастний, тобто $\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Динамічну взаємодію такого п'єзоелектричного включення з пружним середовищем асимптотично точно змоделюємо з допомогою ефективних граничних умов [5, 9, 10]:

$$\begin{aligned}\Psi(x_1) &= (1 - \gamma_*) \frac{\partial}{\partial x_1} h(x_1) \frac{\partial u^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + (k^2 - \gamma_* k_0^2) h(x_1) u^{in}(\mathbf{x}), \\ \Phi(x_1) &= \frac{1 - \gamma_*}{\gamma_*} h(x_1) \frac{\partial u^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad \gamma_* = \gamma(1 + \eta^2), \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут $\Phi(x_1)$ і $\Psi(x_1)$ – стрибки переміщень і їхніх похідних по координаті x_2 через серединну лінію включення.

З допомогою інтегрального подання Кірхгофа розв'язку задачі (1)–(6) отримаємо вираз для комплексної амплітуди розсіяння [3, 9]:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= u_0 k_*^2 \varepsilon \left(\frac{\gamma_* - 1}{\gamma_*} \cos \theta \cos \theta_{in} + (\gamma_* - 1) \sin \theta \sin \theta_{in} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\gamma_* \frac{k_0^2}{k^2} - 1 \right) \right) J_{00}(\theta, \theta_{in}), \quad k_* = ka, \quad \gamma_* \frac{k_0^2}{k^2} = \frac{\rho_0}{\rho} (1 + \eta^2),\end{aligned}$$

$$J_{00}(\theta, \theta_{in}) = \int_{-1}^1 g(x) \exp[ik_* (\sin \theta + \sin \theta_{in})] dx. \quad (7)$$

Ефективні динамічні властивості композиту. Розглянемо необмежену пружну матрицю, що містить систему випадково розподілених тонких п'єзоелектричних включень однакової форми. Просторова орієнтація неоднорідностей може бути випадковою або впорядкованою. Усереднену реакцію композиту на динамічне навантаження характеризують дисперсія та загасання хвиль, які спричинені їх розсіянням локальними включеннями [7, 12, 13]. Це явище можна описати за допомогою комплексного хвильового числа

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c_e(\omega)} + i\alpha(\omega), \quad (8)$$

де $c_e(\omega)$, $\alpha(\omega)$ і ω – ефективна фазова швидкість поперечних хвиль, коефіцієнт їх загасання та хвильова частота.

З іншого боку, для хвильового числа виконується дисперсійне співвідношення Фолді [13, 14]:

$$K^2(\omega) = k^2 + \xi_0 F, \quad (9)$$

де ξ_0 – загальний об'єм включень в одиниці об'єму композиту; F – усереднене значення приведеної амплітуди розсіяння поздовжньої хвилі поодиноким включенням «вперед».

Для впорядковано орієнтованих наповнювачів справедливе співвідношення

$$F = f(\omega, \theta_{in}),$$

а для випадково орієнтованих параметр F визначають як усереднення амплітуди розсіяння по всіх можливих їх орієнтаціях:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega, \theta_{in}) d\theta_{in}.$$

Тоді зі співвідношень (8), (9) отримуємо вирази для усереднених швидкостей поздовжніх хвиль та коефіцієнта їх загасання у композиті:

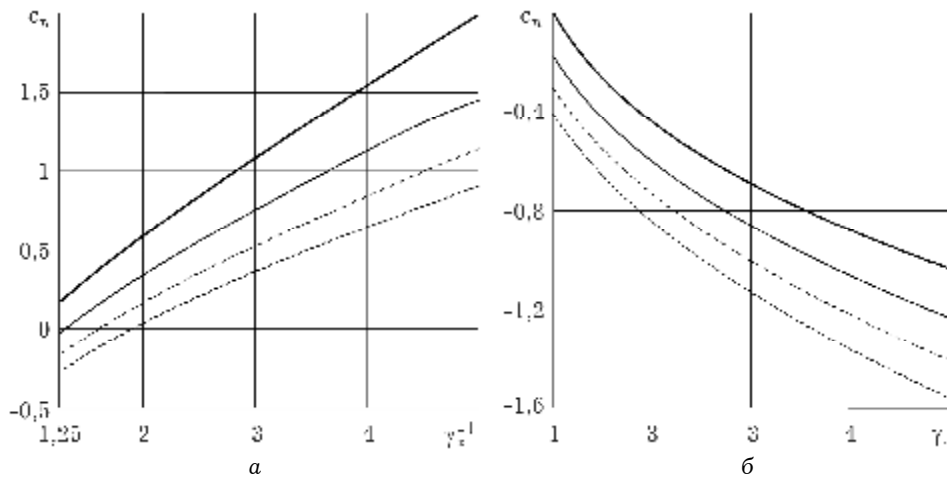
$$c_e(\omega) = \frac{\omega}{\operatorname{Re}[K(\omega)]} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \xi_0 f(\theta_{in}) \right), \quad \alpha(\omega) = \operatorname{Im}[K(\omega)]. \quad (10)$$

Слід зазначити, що наведені вище формули придатні для композитів з низькою концентрацією наповнювачів, коли їх взаємодію можна знехтувати. Правомірність застосування такого підходу для дослідження матричних композитних структур із випадково розподіленими неоднорідностями обґрунтовано в працях [8, 11].

Аналіз числових результатів. Розглянемо пружний композит зі стохастично розподіленими паралельними п'єзоелектричними включеннями. У цьому випадку коефіцієнт загасання $\alpha(\omega) = \operatorname{Im}[K(\omega)] = 0$. Залежність нормованої ефективною швидкості хвилі $c_n = (c_e / c - 1) / \xi_0$ від параметра γ_* , що характеризує відносну жорсткість складових композиту, наведено на рисунку. Суцільні жирні, суцільні тонкі, кусково-штрихові та штрихові лінії нанесені відповідно для значень $\eta = 0$; 0,3; 0,6 та 0,9 (при $\eta = 0$ п'єзоэффект у включенні відсутній).

Як бачимо, зі зростанням параметра γ_* відхилення між швидкостями c_e і c збільшується для відносно жорстких включень та зменшується для менш жорстких наповнювачів. З отриманих результатів можна також встановити, що зі збільшенням коефіцієнта електромеханічного зв'язку η

ефективна швидкість c_e зменшується. Зі співвідношень (7), (10) бачимо, що за параметрів $\mu = c_{44}^0(1 + \eta^2)$ і $\rho = \rho_0(1 + \eta^2)$ тонкі п'єзокерамічні наповнювачі не впливають на ефективну швидкість поширення SH-хвиль у пружному композиті.



Залежності швидкостей c_n від параметра жорсткості γ_* для відносно м'яких (а) та відносно жорстких (б) включень.

Висновки. Запропоновано метод визначення ефективних параметрів хвиль у пружному композиті зі стохастично розподіленими неконтрастними п'єзоелектричними тонкими включеннями. Поданий підхід можна узагальнити на динамічні задачі для інших хвильових мод.

Виявлено, що за паралельних випадково розподілених неконтрастних п'єзоелектричних включень відхилення ефективної швидкості в композиті та швидкості хвиль у матриці збільшується для жорсткіших наповнювачів і зменшується для відносно м'яких неоднорідностей. Зі збільшенням коефіцієнта електромеханічного зв'язку ефективна швидкість поздовжньої хвилі знижується. Встановлено умови, за яких п'єзокерамічні наповнювачі не впливають на ефективні параметри композитного середовища.

1. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
2. Кунець Я. І., Матус В. В. Ефективні динамічні параметри матричного композиту з частково відшарованими волокнами неканонічної форми // Акуст. вісник. – 2012. – 15, № 4. – С. 39–45.
3. Максимів Ю. І., Рабош Р. В., Кунець Я. І., Пороховський В. В. Взаємодія SH-хвиль з тонким п'єзоелектричним неконтрастним включенням у пружному півпросторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 97–101.
4. Михаськів В., Кунець Я., Матус В. Ефективна швидкість поздовжньої хвилі у пружному середовищі з дисковими включеннями слабкої контрастності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 131–139.
5. Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В. Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісник Донецьк. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
6. Conoir J. M., Norris A. N. Effective wave numbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers // Wave Motion. – 2010. – 47. – P. 183–197.
7. Foldy L. L. Multiple scattering theory of waves // Phys. Rev. – 1945. – 67. – P. 107–119.

8. Kanaun S. K., Levin V. M. Self-Consistent Methods for Composites. Volume 2 – Wave Propagation in Heterogeneous Materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – 294 p.
9. Kunets Ya. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Rabosh R. V. SH-wave Scattering by Plane Low Contrast Piezoelectric Inclusion // Proc. XXI Int. Seminar/Workshop «Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory» (DIPED–2016). – Tbilisi, 2016. – P. 142–144.
10. Kunets Ya. I., Rabosh R. V. Longitudinal shear of an elastic medium with a thin rectilinear sharp-pointed piezoelectric inclusion of low rigidity // J. of Math. Sci. – 2012. – 180, № 2. – P. 153–160.
11. Martin P. A. Multiple Scattering Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 438 p.
12. Mykhas'kiv V. V. Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass, Chapter 2 // Composites and Their Applications (edited by N. Hu). – Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. – P. 17–36.
13. Mykhas'kiv V. V., Kunets' Y. I., Matus V. V., Burchak O. V., Balalaev O. K. Parametrization of the propagation of elastic waves in a medium with ensembles of disc-shaped inclusions // Mater. Sci. – 2018. – 54, Iss. 1. – P. 130–137.
14. Mykhas'kiv V., Kunets Ya., Matus V., Khay O. Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions // Int. J. of Struct. Integrity. – 2018. – 9, № 2. – P. 219–232.
15. Pasternak Ia. Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelastic medium // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2012. – 36, № 5. – P. 799–811.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ВОЛН В КОМПОЗИТАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ТОНКИМИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Предложена методика исследования эффективных (усредненных) параметров SH-волн в композитных средах со стохастически распределенными тонкостенными неконтрастными пьезоэлектрическими включениями. Математическая модель волнового процесса основана на дисперсионном соотношении Фолди и решении задачи рассеяния упругих волн локальным рассеивателем. Проанализировано влияние электромеханических свойств композита на эффективные фазовые скорости и коэффициенты затухания продольных волн.

MATHEMATICAL MODEL OF SH-WAVE PROPAGATION IN COMPOSITES WITH DISTRIBUTED THIN PIEZOELECTRIC INCLUSIONS

The method to study the effective (averaged) parameters of SH-waves in composite media with stochastically distributed thin-walled non-contrast piezoelectric inclusions is proposed. Mathematical model of the wave phenomenon is based on the Foldy's dispersion relation and solution for scattering problem by the local obstacle. The influence of electromechanical properties of the composite on effective phase velocities and damping coefficients of longitudinal waves is analyzed.