

## СТАЦІОНАРНІ СТОХАСТИЧНІ ПОЛЯ НА ПЛОЩИНІ ТА АЛГОРИТМИ ЇХ ГЕНЕРАЦІЇ

*Побудовано алгоритм генерації випадкового двовимірного об'єкта на площині. Синтезовано алгоритм побудови двовимірного дійсного нормального марківського поля, усі ортогональні перерізи якого є стаціонарними випадковими процесами Орнштейна–Уленбека. Наведено приклади двовимірних нормальних марківських полів.*

**Вступ.** Обчислювальні задачі стохастичного моделювання безпосередньо пов'язані з процедурами синтезу алгоритмів. Під час моделювання, за звичаєм, застосовують припущення про декартову структуру простору, в якому існує випадкова подія. Ці припущення поширюються і на самі випадкові об'єкти, які реалізуються на відрізку або на прямокутнику, або, в врешті-решт, в багатовимірному гіперкубі [1, 2]. Відомі алгоритми реалізуються в декартовій системі також і в тих випадках, коли досліджуваний об'єкт не дуже зручний для опису в прямокутній системі, наприклад, тор або циліндр [2]. Алгоритми генерації двовимірних марківських полів [3, 4] зручні для застосування в прямокутнику, сторони якого паралельні декартовим осям координат на площині. Однак у задачах машинобудування [5], технічної електродинаміки [6], навігації [7] тощо зустрічаємо об'єкти, що не є площинними або прямокутними, а їх статистичну природу не задовільно описується в прямокутній системі координат.

У сучасних працях [8–10] вивчали питання моделювання даних і зображень, використовуючи відповідні алгоритми як засіб аналізу отриманих зображень. У той же час виникає проблема використання марківських випадкових полів у більш складних випадках.

Нижче пропонуються алгоритми побудови двовимірних нормальних марківських полів другого порядку. Це обумовлено необхідністю використання в задачах моделювання динамічних систем рівнянь руху другого та вищих порядків. Досліджена можливість побудови алгоритму генерації двовимірного випадкового об'єкта – нормального марківського поля, який реалізується на плоскій поверхні. У вузлах у середині заданого прямокутника синтезовано стаціонарне і самоузгоджене марківське поле. Під час побудови алгоритму генерації шуканого марківського поля застосовано ієрархічний принцип. При цьому на нижньому рівні ієрархії використовується стандартний генератор нормального «білого» шуму  $u(t)$  з інтенсивністю (середнім квадратичним відхиленням)  $\sigma$ . Послідовним заповненням вузлів сітки можна отримати (генерувати) марківське поле на плоскій поверхні.

**Алгоритми генерації нормальних двовимірних марківських полів на плоскій поверхні.** Алгоритми генерації двовимірних марківських полів застосовують у прямокутнику, сторони якого паралельні декартовим осям координат на площині. Розглянемо алгоритм генерації випадкового об'єкта – нормального марківського поля, який реалізовано на плоскій поверхні.

З переліку можливих варіантів моделей двовимірних випадкових полів дійсне нормальне марківське поле (НМД-поле)  $H(x, y)$  використовують за відсутності додаткових апіорних факторів, оскільки є зручним об'єктом аналізу. Будь-які його ортогональні перерізи є стаціонарними процесами Орнштейна–Уленбека (ОУ-процесами).

Визначальною характеристикою нормального марківського поля є його кореляційний функціонал

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = M[H_1(x, y)H_1(x', y')] = \rho q \sigma^2 \quad (1)$$

з парціальними кореляторами

$$p = \exp(-v_x |x - x'|), \quad q = \exp(-v_y |y - y'|), \quad (2)$$

де  $h = h(x, y)$  – реалізація гаусівського двовимірного поля  $H_1(x, y)$  у прямокутній області  $\{x \in [0, a]; y \in [0, b]\}$  на площині  $xOy$ ;  $\sigma^2 = M[H_0^2(x, y)]$  – інтенсивність породжувального НМД-поля  $H_0(x, y)$ ;  $v_x$  і  $v_y$  – декременти згасання поля вздовж осей  $x$  та  $y$  відповідно.

Узагальненням відомих конструкцій – перехідних ймовірностей для нормального марківського процесу (ОУ-процесу) може бути перехідна густина розподілу ймовірностей для амплітуди НМД-поля  $H_1(x, y)$  :

$$\begin{aligned} f_H[h(x, y)|h(x', y), h(x, y'), h(x', y')] = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)}\sigma} \exp\{-Q[h(x, y)]\}, \end{aligned} \quad (3a)$$

де  $Q[h(x, y)]$  – квадратична форма для польових змінних

$$Q(x, y) = \frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}.$$

Якщо  $x' \rightarrow -\infty$  або  $y' \rightarrow -\infty$ , отримуємо граничні перехідні густини розподілу ймовірностей

$$f_H[h(x, y)|h(x', y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)}\sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - ph(x', y)]^2}{2(1-p^2)\sigma^2}\right), \quad (3б)$$

$$f_H[h(x, y)|h(x, y')] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)}\sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - qh(x, y')]^2}{2(1-q^2)\sigma^2}\right), \quad (3в)$$

які розглядаємо як перехідні для парціальних ОУ-процесів, а коли  $x' \rightarrow -\infty$  і  $y' \rightarrow -\infty$  отримуємо вершинну густину розподілу ймовірностей рівноважного вигляду

$$f_H(h(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y)]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3г)$$

для випадкової величини – реалізації  $h = h(x, y)$  поля  $H_1(x, y)$  у точці з координатами  $(x, y)$ , звідки зі співвідношень (2)–(3) впливає кореляційна функція (1).

Отже, з явного вигляду квадратичної форми  $Q(x, y)$  у формулі (3a)  $f[h(x, y)|h(x', y), h(x, y'), h(x', y')]$  для перехідної густини для поля  $H_1(x, y)$  можна з'ясувати, що статистична залежність у вибраній точці  $(x, y)$  пов'язана зі значеннями в точках  $(x', y)$  й  $(x, y')$  на сторонах, паралельних осям координат, і зі значенням у точці  $(x', y')$ , розташований у четвертій вершині прямокутника з вершинами  $((x, y); (x', y); (x, y'); (x', y'))$ . Таким чином, перехідна густина (3) дає можливість врахувати кореляції значень нормального поля першого порядку  $H_1(x, y)$  за змінними  $x$  та  $y$ , також їх сумісної кореляції.

**Рівняння руху для амплітуди НМД-поля першого порядку.** Розглянемо на площині декартову систему координат з початком у точці  $(0, 0)$ . Динаміку випадкового поля  $H_1(x, y) = H(x, y)$  у прямокутнику  $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$  можна описати рівнянням, яке узагальнює рівняння Ланжевена для ОУ-процесу:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + v_y\right)h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (4)$$

де  $u(x, y)$  – випадкове поле, яке має властивості гаусівського двовимірного білого шуму з одиничною інтенсивністю. До рівняння (4) додаємо граничні умови, які відповідають двом нормальним стохастичним процесам і описуються рівняннями Ланжевена

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_x\right)h(x, 0) = \sigma u(x, 0), \quad (5a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + v_y\right)h(0, y) = \sigma u(0, y) \quad (5b)$$

та реалізуються вздовж осей  $x$  і  $y$  відповідно; початковій умові відповідатиме значення випадкової величини

$$h(0, 0) = u(0, 0). \quad (5в)$$

Розв'язком рівняння (4) з умовами (5) будуть функції

$$h(x, 0) = \exp(-v_x x) h(0, 0) + \mu^{-1} \int_0^x \exp[-v_x(x-x')] u(x', 0) dx', \quad (6a)$$

$$h(0, y) = \exp(-v_y y) h(0, 0) + v^{-1} \int_0^y \exp[-v_y(y-y')] u(0, y') dy', \quad (6б)$$

$$\begin{aligned} h(x, y) = & \exp(-v_x x - v_y y) h(0, 0) + \mu^{-1} \int_0^x \exp[-v_x(x-x')] u(x', 0) dx' + \\ & + v^{-1} \int_0^y \exp[-v_y(y-y')] u(0, y') dy' + \\ & + (v\mu)^{-1} \int_0^x \int_0^y \exp[-v_x(x-x') - v_y(y-y')] u(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (6в)$$

Можна переконатися, що марківська властивість для поля  $H_1(x, y)$  згідно з (6a) та (6б) виконується вздовж граничних осей  $x$  і  $y$ , а згідно з (6в) – на площині  $x0y$ .

**Алгоритм генерації НМД-поля першого порядку.** Рівняння (4) разом з розв'язком (6) описують динаміку НМД-поля першого порядку, для якого породжувальним є поле  $H_0(x, y)$  білого шуму (“нульового” порядку)  $H_0(x, y) = \sigma u(x, y)$ . На основі розв'язку (6) можна побудувати числовий алгоритм генерації НМД-поля  $H_1(x, y)$ . Цей ієрархічний алгоритм забезпечує генерацію значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марківського поля в прямокутній області зі сторонами  $a$  і  $b$ .

Розглянемо на площині  $x0y$  прямокутник з однією з вершин, розміщеною в точці  $(0, 0)$ . Виберемо сітку вузлів  $\{0 \leq j \leq N_x, 0 \leq k \leq N_y\}$  з кроком  $\Delta_x$  уздовж осі  $x$  і з кроком  $\Delta_y$  уздовж осі  $y$  так, щоб  $N_x = a / \Delta_x$  і  $N_y = b / \Delta_y$ .

Тоді шуканий ієрархічний алгоритм генерації значень  $h_{j,k}$  НМД-поля  $H_1(x, y)$  за допомогою техніки, описаної раніше [2], зручно подати такими кроками.

**Крок 1.** Генерація значення поля у вершині ( $j = 0, k = 0$ ):

$$a_{0,0} = u_{0,0}. \quad (7a)$$

**Крок 2.** Генерація значення ОУ-процесу вздовж  $x$ -границі прямокутника ( $j > 0, k = 0$ ):

$$a_{j+1,0} = pa_{j,0} + \sqrt{1-p^2}u_{j+1,0}. \quad (7б)$$

Крок 3. Генерація значення ОУ-процесу вздовж  $y$ -границі прямокутника ( $j = 0, k > 0$ ):

$$a_{0,k+1} = qa_{0,k} + \sqrt{1-q^2}u_{0,k+1}. \quad (7в)$$

Крок 4. Послідовне (зліва направо) та пошарове заповнення значеннями поля внутрішніх вузлів прямокутника ( $j > 0, k > 0$ ):

$$a_{j+1,k+1} = pa_{j,k+1} + qa_{j+1,k} - pqa_{j,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}u_{j+1,k+1}. \quad (7г)$$

Крок 5. Нормування одержаного поля ( $j \geq 0, k \geq 0$ ):

$$h_{j,k} + a_{j,k} / \sqrt{4v_x v_y}. \quad (7д)$$

У виразах (7)  $p = \exp(-v_x \Delta_x)$  і  $q = \exp(-v_y \Delta_y)$ , де  $v_x$  і  $v_y$  – парціальні декременти,  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  – відстані між вузлами вздовж осей  $x$  і  $y$ .

Підкреслимо, що за вибраних значень  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  (тобто, за кількості кроків  $N_x$  та  $N_y$ , які відповідають заданим розмірам прямокутника зі сторонами  $a$  і  $b$ ) інтенсивність у числовому алгоритмі необхідно перенормувати так, щоб енергія НМД-поля  $H_1(x, y)$ , що припадає на одиницю площині, збігалася з заданою за будь-якої кількості кроків.

Із формули (7) можна одержати величини математичного очікування для значень  $h_{j,k}$  і  $h_{j,k}^2$  для будь-яких  $(j, k)$ -вузлів поля  $H_1(x, y)$ :

$$M[h_{j,k}] = 0, \quad M[h_{j,k}^2] = \frac{\sigma^2}{4v_x v_y} = \text{const}, \quad (8)$$

якщо послідовно знижувати значення  $j$ -індексу, а потім – значення  $k$ -індексу, і нарешті, знайти безумовне рівноважне середнє. Таким чином, алгоритм (7) генерації значень випадкового поля  $H_1(x, y)$  в прямокутнику на площині є стаціонарним.

**Програмна реалізація алгоритму генерації НМД-поля першого порядку  $H_1(x, y)$ .** Основні фрагменти алгоритму (7) для генерації НМД-поля першого порядку в програмному середовищі MathCAD наведено на рис. 1. Реалізація ґрунтується на застосуванні програмного давача гаусівського нормального “білого” шуму `gnorm`. Виклик такого давача здійснює функція

$$\text{WhiteNoise}(x, y) := \text{norm}(1, 0, 1)_0$$

Програмну реалізацію генерації масиву розміром  $(N_x \times N_y)$  значень НМД-поля нульового порядку (“білого” шуму  $P0$ ) виконує функція

$$\begin{aligned} F0 &:= \text{matrix}(N_x, N_y, \text{WhiteNoise}) \cdot \sigma \\ H0 &:= \text{Re}(F0) \end{aligned}$$

Програмну реалізацію процедури збільшення порядку випадкового марківського поля основної частини алгоритму (7) у програмному середовищі MathCAD здійснюють такими функціями

За допомогою процедури `Pole1(...)` на основі двовимірного масиву `OldF` генеруються значення двовимірного породжувального масиву `NewF`. Параметрами алгоритму є парціальні декременти  $v_x$  і  $v_y$ , аргументи-масиви кожний розмірами  $(N_x \times N_y)$  породжувального `OldF` та породженого `NewF`

полів.

```

Pole1(OldF, v_x, v_y) :=
  NewF ← OldF
  p ← exp(-v_x·Δx)
  q ← exp(-v_y·Δy)
  pq = p·q
  sqrt_p ← √(1 - (|p|)²)
  sqrt_q ← √(1 - (|q|)²)
  sqrt_pq ← sqrt_p·sqrt_q
  A0,0 ← OldF0,0
  for j ∈ 1..rows(NewF) - 1
    Aj,0 ← p·Aj-1,0 + sqrt_p·OldFj,0
  for k ∈ 1..cols(NewF) - 1
    A0,k ← q·A0,k-1 + sqrt_q·OldF0,k
  for j ∈ 1..rows(NewF) - 1
    for k ∈ 1..cols(NewF) - 1
      Aj,k ← p·Aj-1,k + q·Aj,k-1 - pq·Aj-1,k-1 + sqrt_pq·OldFj,k
  for j ∈ 0..rows(NewF) - 1
    for k ∈ 0..cols(NewF) - 1
      NewFj,k ←  $\frac{A_{j,k}}{\sqrt{4·v_x·v_y}}$ 
  NewF

```

Рис. 1. Реалізація процедури Pole1(...) збільшення порядку випадкового марківського поля (7) у програмному середовищі MathCAD.

Програмну реалізацію Pole1 генерації значень НМД-поля першого порядку  $H_1(x, y)$  виконання алгоритму (7) у програмному середовищі MathCAD здійснюють за функціями

```

F1 := Pole1(F0, v_x, v_y)
H1 := Re(F1)

```

За допомогою процедури Pole1(...) на основі двовимірного масиву  $H_0(x, y)$  породжувального поля здійснюють генерацію значень породженого поля у вигляді двовимірного масиву  $H_1(x, y)$ , порядок якого на одиницю більший.

Результат генерації двовимірного масиву H0 заданого розміру (50×50), який відповідає полю нормального «білого» шуму  $H_0(x, y)$  з інтенсивністю  $\sigma = 0.25$ , наведен на рис. 2. На цьому та наступних рисунках подано як функцію двох змінних  $x$  та  $y$ . Масштаб усіх осей однаковий.

Результат генерації двовимірного масиву H1 заданого розміру (50×50), який відповідає нормальному марківському полю  $H_1$  першого порядку з де-

крементами  $v_x = 1.0$ ,  $v_y = 1.0$  та інтенсивністю  $\sigma = 0.25$ , наведено на рис. 3.

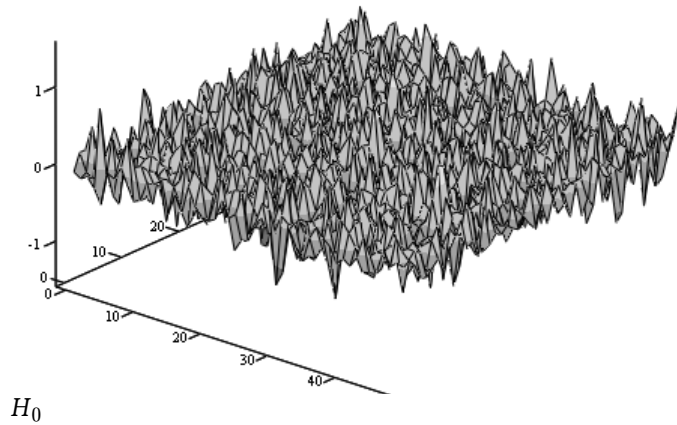


Рис. 2. Поле «білого» шуму  $H_0$ ;  $N_x = 50$ ,  $\Delta_x = 1$ ,  $N_y = 50$ ,  $\Delta_y = 1$ ,  $\sigma = 0.25$ .

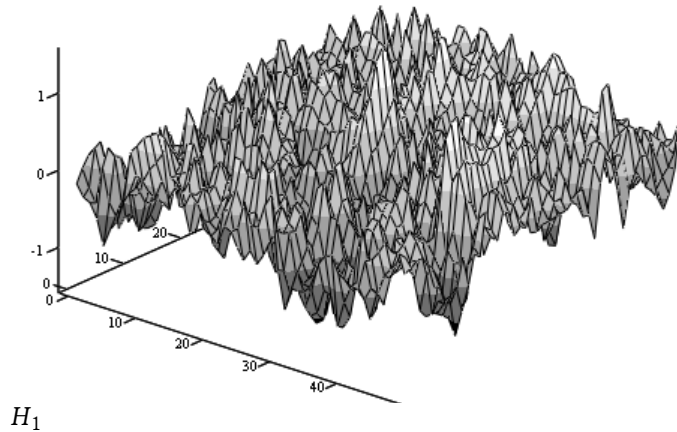


Рис. 3. Нормальне марківське поле першого порядку  $H_1$ . Параметри:  $N_x = 50$ ,  $\Delta_x = 1$ ,  $N_y = 50$ ,  $\Delta_y = 1$ ,  $v_x = 0.3$ ,  $v_y = 0.3$ ,  $\sigma = 0.25$ .

**Рівняння руху для амплітуди НМД-поля другого порядку.** Вважатимемо, що флуктуації НМД-поля за обидвома змінними є ОУ-процесами другого порядку, які описують рівнянням руху Ланжевена:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (9a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (9b)$$

де  $\beta_x, \Omega_x$  та  $\beta_y, \Omega_y$  – парціальні декременти і частоти, що відповідають руху вздовж осей  $x$  й  $y$ . Тоді рівняння для НМД-поля  $H_2(x, y)$  другого порядку можна записати у вигляді

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) h(x, y) = \sigma u(x, y). \quad (10)$$

Нехай  $\gamma_{1,x}, \gamma_{2,x}$ , а також  $\gamma_{1,y}, \gamma_{2,y}$  – розв’язки рівнянь

$$\gamma^2 + 2\beta_x\gamma + \Omega_x^2 = 0, \quad \gamma^2 + 2\beta_y\gamma + \Omega_y^2 = 0, \quad (11)$$

тоді рівняння (10) можна записати у вигляді систем з двох рівнянь:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{1,x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{1,y}\right)h_1(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (12a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{2,x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{2,y}\right)h_2(x, y) = h_1(x, y). \quad (12б)$$

З рівнянь (12) випливає, що для НМД-поля другого порядку  $H_2(x, y)$  твірним генератором є НМД-поле  $H_1(x, y)$  першого порядку так само, як для НМД-поля  $H_1(x, y)$  першого порядку твірним генератором буде поле білого шуму  $H_0(x, y) = u(x, y)$  «нульового» порядку. Ця властивість виконується за умови, що на роль нових ефективних декрементів вибрані два набори  $\gamma_{1,x}, \gamma_{1,y}$  та  $\gamma_{2,x}, \gamma_{2,y}$  згідно з (11).

Порівнюючи рівняння (9), (12) з рівняннями (4), (5) та з розв'язком (6), отримуємо розв'язок  $h_2(x, y)$  для НМД-поля  $H_2(x, y)$  другого порядку

$$g(x, 0) = \exp(-\gamma_{1,x}x)g(0, 0) + \gamma_{1,y}^{-1} \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')]u(x', 0)dx', \quad (13a)$$

$$g(0, y) = \exp(-\gamma_{1,y}y)g(0, 0) + \gamma_{1,x}^{-1} \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')]u(0, y')dy', \quad (13б)$$

$$g(x, y) = \exp(-\gamma_{1,x}x - \gamma_{1,y}y)g(0, 0) + \\ + \gamma_{1,y}^{-1} \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')]u(x', 0)dx' + \gamma_{1,x}^{-1} \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')]u(0, y')dy' + \\ + (\gamma_{1,x}\gamma_{1,y})^{-1} \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{1,x}(x-x') - \gamma_{1,y}(y-y')]u(x', y')dx'dy', \quad (13в)$$

а також

$$h(x, 0) = \exp(-\gamma_{2,x}x)h(0, 0) + \gamma_{2,y}^{-1} \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')]g(x', 0)dx', \quad (13г)$$

$$h(0, y) = \exp(-\gamma_{2,y}y)h(0, 0) + \gamma_{2,x}^{-1} \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')]g(0, y')dy', \quad (13д)$$

$$h(x, y) = \exp(-\gamma_{2,x}x - \gamma_{2,y}y)h(0, 0) + \\ + \gamma_{2,y}^{-1} \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')]g(x', 0)dx' + \gamma_{2,x}^{-1} \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')]g(0, y')dy' + \\ + (\gamma_{2,x}\gamma_{2,y})^{-1} \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{2,x}(x-x') - \gamma_{2,y}(y-y')]g(x', y')dx'dy', \quad (13е)$$

$$h_2(x, y) = \frac{h(x, y)}{\sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}}\sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}}}. \quad (13ж)$$

**Алгоритм генерації НМД-поля другого порядку  $H_2(x, y)$ .** Рівняння (9) разом з розв'язком (13) описують динаміку НМД-поля другого порядку  $H_2(x, y)$ , яке породжується полем «білого» шуму (нульового порядку)  $u(x, y)$ .

За допомогою розв'язку (13) можна побудувати числовий алгоритм генерації НМД-поля  $H_2(x, y)$ . Цей алгоритм також, як і для поля  $H_1(x, y)$ , буде ієрархічним алгоритмом генерації значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марківського поля в прямокутній області зі сторонами  $a$  та  $b$ . Для такого ж прямокутника з вершиною в точці з координатами  $(0,0)$  на координатній площині  $xOy$  визначимо сітку вузлів  $\{0 \leq j \leq N_x, 0 \leq k \leq N_y\}$  з кроком  $\Delta_x$  по осі  $x$  та з кроком  $\Delta_y$  по осі  $y$ , для якої  $N_x = a / \Delta_x$  і  $N_y = b / \Delta_y$ .

Тоді шуканий ієрархічний алгоритм генерації значень  $h_{j,k}$  НМД-поля  $H_2(x, y)$  за допомогою відомої техніки [2] зручно подати такими кроками.

Крок 1. Генерація значення у вершині ( $j = 0, k = 0$ ):

$$a_{0,0} = u_{0,0}. \quad (14a)$$

Крок 2. Генерація значення ОУ-процесу (загалом комплекснозначного) уздовж  $x$ -границі прямокутника ( $j > 0, k = 0$ ):

$$a_{j+1,0} = p_1 a_{j,0} + \sqrt{1 + p_1^2} u_{j+1,0}. \quad (14б)$$

Крок 3. Генерація значення ОУ-процесу (загалом комплекснозначного) уздовж  $y$ -границі прямокутника ( $j = 0, k > 0$ ):

$$a_{0,k+1} = q_1 a_{0,k} + \sqrt{1 + q_1^2} u_{0,k+1}. \quad (14в)$$

Крок 4. Послідовне (зліва-направо та пошарове) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника ( $j > 0, k > 0$ ):

$$a_{j+1,k+1} = p_1 a_{j,k+1} + q_1 a_{j+1,k} - p_1 q_1 a_{j,k} + \sqrt{(1 - p_1^2)(1 - q_1^2)} u_{j+1,k+1}. \quad (14г)$$

Крок 5. Нормування одержаного поля ( $j \geq 0, k \geq 0$ ):

$$g_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{\sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}}}. \quad (14д)$$

У виразах (14а)-(14д)  $p_1 = \exp(-\gamma_{1,x}\Delta_x)$ ,  $q_1 = \exp(-\gamma_{1,y}\Delta_y)$ , де  $\gamma_{1,x}$  і  $\gamma_{1,y}$  – перша пара парціальних декрементів,  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  – кроки вузлів уздовж осей  $x$  і  $y$ .

Крок 6. Генерація значення у вершині ( $j = 0, k = 0$ ):

$$g_{0,0} = a_{0,0}. \quad (14е)$$

Крок 7. Генерація значення ОУ-процесу (загалом комплекснозначного) уздовж  $x$ -границі прямокутника ( $j > 0, k = 0$ ):

$$g_{j+1,0} = p_2 g_{j,0} + \sqrt{1 - p_2^2} a_{j+1,0}. \quad (14ж)$$

Крок 8. Генерація значення ОУ-процесу (загалом комплекснозначного) уздовж  $y$ -границі прямокутника ( $j = 0, k > 0$ ):

$$g_{0,k+1} = q_2 g_{0,k} + \sqrt{1 - q_2^2} a_{0,k+1}. \quad (14з)$$

Крок 9. Послідовне (зліва-направо та пошарове) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника ( $j > 0, k > 0$ ):

$$g_{j+1,k+1} = p_2 g_{j,k+1} + q_2 g_{j+1,k} - p_2 q_2 g_{j,k} + \sqrt{(1 - p_2^2)(1 - q_2^2)} a_{j+1,k+1}. \quad (14и)$$

Крок 10. Нормування одержаного поля ( $j \geq 0, k \geq 0$ ):

$$h_{j,k} = \frac{g_{j,k}}{\sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}}}. \quad (14к)$$

У виразах (14е)-(14к)  $p_2 = \exp(-\gamma_{2,x}\Delta_x)$ ,  $q_2 = \exp(-\gamma_{2,y}\Delta_y)$ , де  $\gamma_{2,x}$  і  $\gamma_{2,y}$  – перша пара парціальних декрементів,  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  – кроки вузлів уздовж осей  $x$  і  $y$ .

Зазначимо, що у вибраних кроках  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  (тобто за кількості кроків  $N_x$ ,  $N_y$ , що відповідають заданим розмірам прямокутника  $a$  і  $b$ ) інтенсивність у числовому алгоритмі необхідно перенормувати так, щоб енергія НМД-поля другого порядку  $H_2(x, y)$ , яка припадає на одиницю площі, збігалася із заданою за будь-якої кількості кроків.



З (14) слідує для  $h_{j,k}$  у будь-якому  $(j,k)$ -вузлі поля  $H_2(x,y)$ , що для значень математичних сподівань виконується

$$M[h_{j,k}] = 0, \quad M[h_{j,k}^2] = \frac{\sigma^2}{16v_{1,x}v_{1,y}v_{2,x}v_{2,y}} = \text{const}, \quad (15)$$

якщо послідовно знижувати значення  $j$ -індексу, а потім –  $k$ -індексу і, врешті-решт, знайти безумовне рівноважне середнє.

Таким чином, алгоритм генерації значень випадкового поля  $H_2(x,y)$  у прямокутнику на площині (14) є також стаціонарним.

**Програмна реалізація алгоритму генерації НМД-поля другого порядку.** Програмна реалізація генерації значень НМД-поля другого порядку  $H_2$  у середовищі MathCAD, яка здійснюється в результаті послідовної генерації двох полів першого порядку, має такий вигляд:

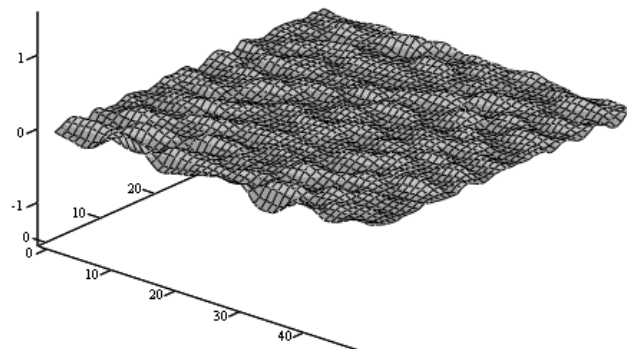
$$\begin{aligned} \text{Pole2}(H_0) &:= \begin{cases} F1 \leftarrow \text{Pole1}(H_0, R_{x_2}, R_{y_2}) \\ \text{Pole1}(F1, R_{x_1}, R_{y_1}) \end{cases} \\ F2 &:= \text{Pole2}(F0) \end{aligned}$$

Зауважимо, що для генерації поля  $F1$ , породжувальним є поле «білого» шуму  $H_0$ . Як параметри  $R_{x_1}$ ,  $R_{y_1}$  та  $R_{x_2}$ ,  $R_{y_2}$  використовувались значення декрементів  $\gamma_{1,x}$ ,  $\gamma_{1,y}$  та  $\gamma_{2,x}$ ,  $\gamma_{2,y}$ , які знаходили як розв'язки рівнянь (11). Враховуючи, що загалом нові декременти  $R_{x_1}$ ,  $R_{y_1}$  та  $R_{x_2}$ ,  $R_{y_2}$  можуть набувати комплексних значень, а результуюче поле  $P_2$  є дійсною величиною, із результату знаходили реальну частину (уявна частина  $P_2$  тут мала через машинну точність та нехтується).

Результат генерації двовимірного масиву  $P_2$  заданих розмірів  $(50 \times 50)$ , що відповідає нормальному марківському полю другого порядку  $H_2$  з інтенсивністю  $\sigma = 0.25$ , наведено на рис. 4. Як бачимо, вплив вибраних для моделювання значень декрементів  $\beta_x = 0.3$ ,  $\beta_y = 0.3$  та власних частот  $\Omega_x = 1.0$ ,  $\Omega_y = 1.0$  призвів до згладжування форми генерованого поля  $H_2$ .

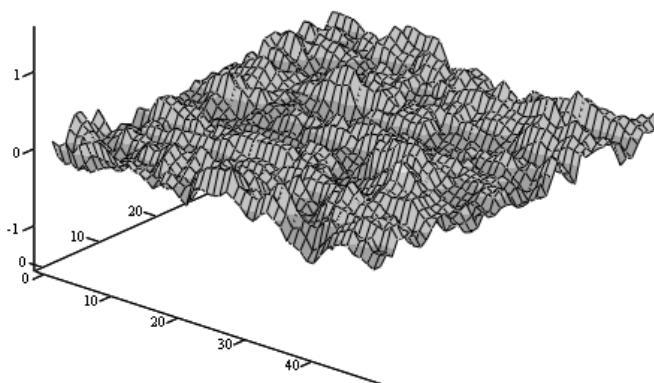
Зауважимо, що для поля  $H_2$  існують обидві перші похідні.

На рис. 5 наведено результат такого ж поля, але з декрементами  $\beta_x = 1.5$ ,  $\beta_y = 1.5$  та частотами  $\Omega_x = 0.3$ ,  $\Omega_y = 1$ . Тут проявляються зміни в топографії згенерованого поля. Слід зауважити, що для генерованого поля  $H_2(x,y)$  існують похідні  $\partial / \partial x$  і  $\partial / \partial y$  за обидвома незалежними змінними  $x$  і  $y$ .



$H_2$

Рис. 4. Нормальне марківське поле другого порядку  $H_2$ . Параметри:  $N_x = 50$ ,  $\Delta_x = 1$ ,  $N_y = 50$ ,  $\Delta_y = 1$ ,  $\beta_x = 0.3$ ,  $\Omega_x = 0.3$ ,  $\beta_y = 0.3$ ,  $\Omega_y = 1.0$ ,  $\sigma = 0.25$ .



$H_2$

Рис. 5. Нормальне марківське поле другого порядку  $H_2$ . Параметри:  $N_x = 50$ ,  $\Delta_x = 1$ ,  $N_y = 50$ ,  $\Delta_y = 1$ ,  $\beta_x = 1.5$ ,  $\Omega_x = 0.3$ ,  $\beta_y = 1.5$ ,  $\Omega_y = 1$ ,  $\sigma = 0.25$ .

**Висновок.** Алгоритми, що використовують для генерації шуканих полів, аналогічні добре відомим алгоритмам ковзного середнього опрацювання випадкових процесів. Для випадкових полів теоретичний опис подано в праці [3].

У статті запропоновано реалізацію алгоритму генерації випадкових нормальних марківських полів першого та другого порядків та отримано їх візуалізацію на площині. Цей результат можна використати під час моделювання динамічних процесів на випадкових поверхнях, зокрема, руху транспортних засобів, дослідження відображень променів від збурених оболонок. В подальшому виникає задача моделювання випадкових нормальних марківських полів на довільних поверхнях [11, 12], які допускають декартову дискретизацію вузлів.

1. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. – М.: Физматгиз, 1961. – 280 с.
2. Харин Ю. С., Степанова М. Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. – Минск: «Университетское», 1987. – 304 с.
3. Nabibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image. // Proc. IEEE. – 1972. – **60**, № 7. – Р. 878–883.
4. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
5. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. – М.: Советское радио, 1970. – 384 с.
6. Ярлыков М. С. Статистическая теория навигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.
7. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
8. Li, S. Markov Random Field Modeling in Image Analysis. Springer-Verlag. 3rd Edition. 2009. – 371 p.
9. Blake A., Kohli P., Rother C. Markov Random Fields for Vision and Image Processing. – MIT Press, 2011. – 480 p.
10. Min Li. Markov Random Field-Edge-Centre Image/Video Processing. A Dissertation Ph. D. – 2007.
11. Мазманишвили А. С., Щербань В. Е. Моделирование марковских случайных

последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля // Электронное моделирование. 1996. – **18**, № 2. – С. 93–95.

12. Мазманішвілі А. С. Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра // Электронное моделирование. – 1998. – **20**, № 6. – С. 65–69.

#### **СТАЦИОНАРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ И АЛГОРИТМЫ ИХ ГЕНЕРАЦИИ**

*Рассматривается построение алгоритма генерации случайного двумерного объекта на плоскости. Синтезован алгоритм построения двумерного вещественного нормального марковского поля первого и второго порядка, у которого ортогональные сечения являются стационарными случайными процессами Орнштейна–Уленбека. Приведены примеры двумерных нормальных марковских полей.*

#### **STATIONARY STOCHASTIC FIELDS ON THE PLANE AND ALGORITHMS OF ITS GENERATION**

*The algorithm of construction for generating a random two-dimensional object on the plane is considered. The algorithm to construct a two-dimensional real normal Markov field of the first and second order is synthesized. Any orthogonal cross-sections are stationary random Ornstein–Uhlenbeck process. The examples of two-dimensional normal Markov fields are given.*

<sup>1</sup>Харків. нац. автомобільно-дорожний ун-т, Харків

<sup>2</sup>Сумськ. держ. ун-т, Суми