

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХОДИ ЛЮДИНИ З ЕКЗОСКЕЛЕТОНОМ**

*Побудовано математичну модель ходи людини з екзоскелетомом. Для моделювання використано плоску систему дев'яти твердих тіл, які представляють корпус людини та основні сегменти нижніх кінцівок. Екзоскелетон змодельовано двома стрижневими триланковиками, закріпленими на стегнах, гомілкках та стопах. Стрижні зв'язані між собою циліндричними шарнірами з пружинними пристроями. Сформульовано задачу визначення таких параметрів пружин екзоскелетона, які за заданих кінематичних і динамічних обмежень біотехнічної системи "людина-екзоскелетон" мінімізують заданий цільовий функціонал (квадратичний за моментами м'язових зусиль у суглобах ніг людини). Розроблено методичку побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі, яка ґрунтується на процедурі параметризації узагальнених координат системи кубічними згладжувальними сплайнами, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування.*

Екзоскелетон (екзоскелет) – це зовнішній біомеханічний пристрій, призначений для відновлення (підсилення) локомоційних функцій людини [19]. Він складається із корсета і пари шарнірно прикріплених до нього триланкових шарнірно-важільних механізмів. Корсет закріплюють на корпусі людини, важелі послідовно фіксують на стегнах, гомілкках та стопах. Ланки екзоскелетона повторюють рух нижніх кінцівок людини під час ходи. В його конструкцію можна вмонтувати як активні приводи (електродвигуни з автономним живленням), так і пасивні (наприклад, пружини з регульовальною жорсткістю, пружинно-демпферні пристрої тощо). Раціональним підбором параметрів цих приводів вдається понизити рівень м'язових зусиль у суглобах нижніх кінцівок людини. Одним із результативних підходів, що дає можливість ефективно й обґрунтовано підібрати параметри приводів екзоскелетона, є математичне моделювання. Тому розробка та дослідження математичних моделей ходи людини з екзоскелетомом – важлива задача біомеханіки.

Задачі математичного моделювання ходи людини у різноманітних формулюваннях вивчали у низці праць [1–11, 14–22]. У монографіях [1, 2, 8, 14] відображено результати багатопланових досліджень задач динаміки та оптимізації механічних систем, що моделюють ходу людини, у праці [22] наведено дані експериментальних біомеханічних вимірювань ходи людини. У статтях [5, 7] задачу моделювання ходи людини (у межах плоскої системи семи твердих тіл) формують у вигляді задачі оптимального керування з цільовим функціоналом енерговитрат. Алгоритм розв'язання задачі ґрунтується на параметризації узагальнених координат системи скінченним рядом Фур'є та зведенні вихідної задачі до задачі нелінійного математичного програмування. У працях [3, 4, 6, 9–11] для моделювання ходи людини використовують систему дев'яти твердих тіл (корпус, стегна, гомілки та дволанкові стопи). Ходу розглядають на проміжку подвійного кроку, вважаючи на ньому заданими значення (або області зміни) основних міжланкових кутів нижніх кінцівок. Формують відповідну задачу оптимального керування з функціоналом енерговитрат, для розв'язання якої використовують методи параметричної оптимізації. Частиною узагальнених координат системи параметризують кубічними згладжувальними сплайнами, отримавши задачу нелінійного математичного програмування розв'язують числовими методами. У праці [15] досліджено ходу людини в одноопорній фазі, опорно-руховий апарат змодельовано плоскою системою 11-ти стрижнів з поздовжніми пружними деформаціями. За допомогою

символьних алгоритмів програмного пакета "Mathematica 6.0.3" виведено рівняння руху системи, а також побудовано алгоритм розв'язання прямої задачі динаміки. Робота [16] присвячена побудові критерію оптимальності ходи людини. Автори вводять параметризований функціонал з ваговими коефіцієнтами, у межах яких досліджують вісім різних критеріїв, що характеризують механічні енерговитрати, а також напруження м'язів та їх втому під час ходи. Ґрунтовний огляд основних підходів до математичного моделювання ходи людини наведено в публікації [21].

Низка статей присвячена дослідженню ходи людини з екзоскелетоном. Зокрема, у статті [17] подано огляд екзоскелетонів, описано підходи до реабілітації пацієнтів, які ґрунтуються на використанні активних і пасивних екзоскелетонів та електричної стимуляції м'язів. Аналіз джерел засвідчує, що, поєднуючи керовані екзоскелети та стимуляцію м'язів, можна зменшити енергоспоживання під час ходи пацієнта з ушкодженнями спинного мозку. У праці [18] розглядають квазіпасивний екзоскелетон для сприйняття навантаження під час ходи людини з рюкзаком. У конструкцію екзоскелетона вмонтовано пасивні приводи (пружини та магніто-реологічний демпфер). За допомогою експериментальних вимірювань порівнюють енерговитрати для різних режимів ходи: без екзоскелетона, з квазіпасивним екзоскелетоном, з екзоскелетоном без приводів. Зроблено висновок, що під час ходи з екзоскелетоном енерговитрати зростають на 10% порівняно зі звичайною ходою, хода з екзоскелетом без приводів призводить до зростання енерговитрат на 23%. Деякі підходи до моделювання ходи людини з екзоскелетоном розглядають у праці [20]. Тут наведено біомеханічні вимоги до ходи, описано кінематичні і динамічні її параметри та структуру приводів екзоскелетона. Також досліджено екзоскелетон з пасивними приводами, які моделюють пружинами Бельвіля з різними характеристиками на фазах ходи.

Нижче дослідимо ходу людини з пасивним екзоскелетоном. Опорно-руховий апарат моделюємо системою дев'яти твердих тіл: корпус і дві чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілка, дволанкова стопа). Екзоскелетон представляємо шарнірно-стрижневою системою з пасивними приводами (пристрої з кроковою активізацією пружин). Система рухається внаслідок взаємодії сили тяжіння, сил реакцій опорної поверхні та моментів сил у шарнірах. Сили у шарнірах генеруються м'язо-скелетною структурою людини та пружинами екзоскелетона. Ходу моделюємо на проміжку подвійного кроку, де враховуємо "природну" послідовність фаз руху стоп: перекаат через п'ятку, опора на всю стопу, плесно-фаланговий перекаат, перекаат через носок, перенесення стопи. Додатково на рух моделі накладасмо кінематичні та динамічні умови антропоморфного контакту стоп з опорною поверхнею, умови періодичності (за кутами та кутовими швидкостями) руху системи та умови взаємного розміщення стоп у початковий і кінцевий моменти часу руху системи. Мета статті – розробити методику визначення таких параметрів пасивних приводів екзоскелетона, які б зменшили м'язові сили у суглобах людини. Для пошуку цих параметрів використовуємо оптимізаційний підхід до моделювання ходи людини [3, 6]. Оптиміальні параметри пружин визначасмо за два етапи. На першому моделюємо ходу людини з екзоскелетоном без пружин, для цього розв'язуємо відповідну задачу оптимального керування з функціоналом енерговитрат. У результаті отримуємо "еталонні" кінематичні та динамічні характеристики ходи. На другому етапі для побудованого "еталонного" руху системи розв'язуємо задачу оптимізації параметрів пружин за умови мінімізації квадратичного (за моментами м'язових зусиль) функціонала. Алгоритми розв'язання задач ґрунтуються на параметризації узагальнених координат механічної системи кубічними згладжувальними сплайнами, методиці обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування.

**Математична модель ходи людини з екзоскелетом.** Розглянемо ходу людини з екзоскелетом по нерухомій горизонтальній поверхні. Обмежимо дослідженням руху у сагітальній площині  $OXY$  (рис. 1). Опорно-руховий апарат людини моделюємо системою дев'яти твердих тіл: тіло  $NG$  представляє корпус людини, тіла  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  – відповідно стегно, гомілку та дволанкову стопу  $i$ -ої ноги,  $i = 1, 2$ . Тіла зв'язані між собою циліндричними шарнірами  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$ , осі яких перпендикулярні площині  $OXY$ ,  $i=1, 2$ . Екзоскелетон моделюємо двома стрижневими триланковиками, закріпленими на стегні  $NK_i$ , гомілці  $K_iA_i$  і стопі  $A_iH_iM_i$ ,  $i=1, 2$ . Стрижні послідовно зв'язані між собою циліндричними шарнірами з пружинними пристроями. Осі шарнірів екзоскелетона збігаються з осями відповідних шарнірів моделі опорно-рухового апарата. Рух системи відбувається внаслідок взаємодії моментів активних сил  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $w_i$  (генеруються м'язо-скелетною структурою людини), прикладених у шарнірах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$  відповідно, моментів пружних сил  $f_{Ni}$ ,  $f_{Ki}$ ,  $f_{Ai}$  у шарнірах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$  (генеруються пружинами екзоскелетона), сил реакцій опорної поверхні  $\mathbf{R}_i$  та сили тяжіння,  $i = 1, 2$ . Стопи вважаємо безінерційними, а їх маси зосередженими у відповідних гомілковостопних шарнірах. Інерційні властивості стрижнів екзоскелетона враховуємо у характеристиках відповідних сегментів опорно-рухового апарату людини, пружини вважаємо невагомими.

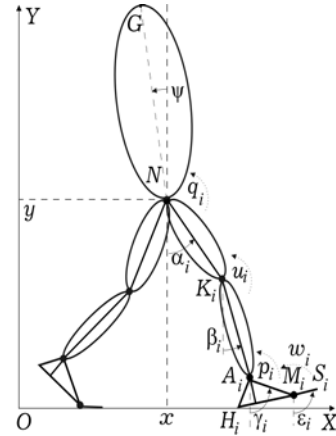


Рис. 1.

Введемо вектор узагальнених координат досліджуваної механічної системи  $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$ , де  $(x, y)$  – координати точки  $N$  в інерційній системі відліку  $OXY$ ,  $\psi$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\epsilon_i$  – кути відхилення тіл  $NG$ ,  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  від вертикалі,  $i = 1, 2$ . Тоді рух системи можна описати сукупністю диференціальних та алгебричних рівнянь виду [9]

$$\mathbf{A}(\xi)\ddot{\xi} + \mathbf{B}(\xi)\dot{\xi} + \mathbf{g}(\xi) = \mathbf{C}(\xi)\mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{S}(\xi, x_{R1}, x_{R2})\mathbf{f} = 0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  – матриці розмірностей  $7 \times 11$ ,  $7 \times 11$ ,  $7 \times 12$ ,  $4 \times 12$  відповідно,  $\mathbf{b} = (\dot{\xi}_1^2, \dot{\xi}_2^2, \dots, \dot{\xi}_{11}^2)$ ,  $\mathbf{g}$  – вектор розмірності 7,  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,  $x_{Ri}$  – координати вектора  $\mathbf{R}_i$  у системі відліку  $OXY$  та абсциса точки його прикладення,  $\mathbf{f} = (q_1 + f_{N_1}, q_2 + f_{N_2}, u_1 + f_{K_1}, u_2 + f_{K_2}, p_1 + f_{A_1}, p_2 + f_{A_2}, w_1, w_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y})$ ,  $i = 1, 2$ . Компоненти матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  і вектора  $\mathbf{g}$  можна одержати із розгорнутого запису співвідношень (1), (2), наведеного раніше [3, 4]. Тут крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом  $t$ . Система нелінійних диференціальних рівнянь (1) описує динаміку ходи людини з екзоскелетом, система алгебричних рівнянь (2) виражає умови кінестатичної рівноваги безінерційних стоп.

Хода людини в усталеному режимі періодична з періодом, рівним тривалості подвійного кроку, і при цьому характеризується стійкою послідовністю ритмічних фаз руху стоп [13]. Позначимо через  $T_i$  і  $L_i$  тривалість

та довжину кроку  $i$ -ої ноги,  $T = T_1 + T_2$  – тривалість подвійного кроку,  $i = 1, 2$ . На проміжку  $[0, T]$  визначимо послідовність фаз руху стоп, зокрема, для стопи 1-ої ноги:  $t \in [0, \tau_{h1})$  – переكات через п'ятку,  $t \in [\tau_{h1}, \tau_{m1})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m1}, T_1]$  – фаланговий переكات,  $t \in (T_1, \tau_{s1})$  – переكات через носок,  $t \in [\tau_{s1}, T)$  – перенесення стопи над опорною поверхнею; для стопи 2-ої ноги:  $t \in (0, \tau_{s2})$  – переكات через носок,  $t \in [\tau_{s2}, T_1)$  – перенесення стопи над поверхнею,  $t \in [T_1, \tau_{h2})$  – переكات через п'ятку,  $t \in [\tau_{h2}, \tau_{m2})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m2}, T]$  – фаланговий переكات.

На вибраній послідовності фаз повинні виконуватися ритмічні умови

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < T_1 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T, \quad (3)$$

а також кінематичні умови контактування точок стопи  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  з опорною поверхнею:

$$\begin{aligned} x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^\circ, y_{hi}(t) \equiv 0, y_{si} > y_{mi} > 0, \quad t \in [\tau_i, \tau_{hi}), \\ x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^\circ, y_{hi}(t) \equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\ x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^\circ, y_{hi} > 0, y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}], \\ x_{si}(t) &\equiv x_{si}^\circ, y_{hi} > y_{mi} > 0, y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ y_{hi} &> 0, y_{mi} > 0, y_{si} > 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $(x_{mi}, y_{mi})$ ,  $(x_{si}, y_{si})$  – координати точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  у системі  $OXY$ ,  $x_{mi}^\circ = x_{hi}^\circ + l_1$ ,  $x_{si}^\circ = x_{mi}^\circ + l_2$ ,  $x_{h1}^\circ = 0$ ,  $x_{h2}^\circ = x_{h1}^\circ + L_2$ ,  $l_1 = |H_1M_1| = |H_2M_2|$ ,  $l_2 = |M_1S_1| = |M_2S_2|$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_1$ ,  $\tau_3 = T$ .

Із антропоморфності переміщення системи слідує обмеження динамічного характеру:

$$\begin{aligned} R_{iy} &> 0, \quad |R_{ix}| \leq \mu R_{iy}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ R_{iy}(t) &\equiv R_{ix}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad x_{hi}^\circ \leq x_{Ri} \leq x_{si}^\circ, \quad t \in [\tau_i, \tau_{mi}), \\ x_{mi}^\circ &\leq x_{Ri} \leq x_{si}^\circ, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя між стопою та опорною поверхнею.

Задамо умови періодичності руху системи, а також умови взаємного розміщення стоп у початковий  $t = 0$  і кінцевий  $t = T$  моменти часу:

$$\begin{aligned} \xi(T) &= \xi(0) + \mathbf{L}, \quad \dot{\xi}(T) = \dot{\xi}(0), \\ x_{m2}(0) &= x_{h1}^\circ + l_1 - L_1, y_{m2}(0) = 0, \quad x_{h1}(T) = x_{h1}^\circ + L, y_{h1}(T) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\mathbf{L} = (L, 0, \dots, 0)$  – вектор розмірності 11,  $L = L_1 + L_2$  – довжина подвійного кроку.

**Оптимізація параметрів екзоскелетона.** Параметри екзоскелетона оптимізуємо в межах симетричної ходи людини, за якої рух однієї ноги повторює рух іншої із запізненням у часі  $\tau_2 = 0.5T$ . Із симетричності випливає, що одинарні кроки рівні між собою як за тривалістю  $T_1 = T_2 = \tau_2$ , так і по довжині  $L_1 = L_2 = 0.5L$ . Також вважаємо, що параметри частини конструкції екзоскелетона для правої та лівої кінцівок попарно рівні між собою. Не-

хай пасивний привід у шарнірі  $k$  складається зі шести пружин, схематично зображених на рис. 2, та має такий загальний момент пружних сил

$$f_k = \begin{cases} c_{k1}(\eta_{k1} - \eta_k) + c_{k2}(\eta_{k2} - \eta_k) + c_{k3}(\eta_{k3} - \eta_k), & \eta_k > \eta_{k3}, \\ c_{k1}(\eta_{k1} - \eta_k) + c_{k2}(\eta_{k2} - \eta_k), & \eta_k \in [\eta_{k2}, \eta_{k3}], \\ c_{k1}(\eta_{k1} - \eta_k), & \eta_k \in [\eta_{k1}, \eta_{k2}], \\ 0, & \eta_k \in [\eta_{k4}, \eta_{k1}], \\ c_{k4}(\eta_{k4} - \eta_k), & \eta_k \in [\eta_{k5}, \eta_{k4}], \\ c_{k4}(\eta_{k4} - \eta_k) + c_{k5}(\eta_{k5} - \eta_k), & \eta_k \in [\eta_{k6}, \eta_{k5}], \\ c_{k4}(\eta_{k4} - \eta_k) + c_{k5}(\eta_{k5} - \eta_k) + c_{k6}(\eta_{k6} - \eta_k), & \eta_k < \eta_{k6}, \end{cases} \quad (7)$$

де  $\eta_k$  – міжланковий кут у шарнірі  $k$ ;  $c_{kj}$ ,  $\eta_{kj}$  – коефіцієнт жорсткості та кут ненавантаженого стану пружини  $j$ ,  $j = \overline{1, 6}$ . Тут символічний індекс  $k \in \{N_i, K_i, A_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , символами  $N_1$ ,  $N_2$  позначено один і той же шарнір  $N$  (див. рис. 1). Введені кути відраховуємо відносно прямої  $kk'$ , додатний напрям відліку – проти годинникової стрілки. Зауважимо, що згідно з прийнятим вище припущенням  $f_{N_1} = f_{N_2}$ ,  $f_{K_1} = f_{K_2}$ ,  $f_{A_1} = f_{A_2}$ . Очевидно, що введені параметри пружин повинні задовольняти обмеження:

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_{kj} \leq c_{kj}^{(1)}, \quad j = \overline{1, 6}, \\ -180^\circ &\leq \eta_{k6} \leq \eta_{k5} \leq \eta_{k4} \leq \eta_{k1} \leq \eta_{k2} \leq \eta_{k3} \leq 180^\circ, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $c_{kj}^{(1)}$ ,  $k \in \{N_i, K_i, A_i\}$ ,  $j = \overline{1, 6}$ ,  $i = 1, 2$  – задані сталі величини.

Введемо позначення міжланкових кутів у шарнірах системи  $N_i, K_i, A_i$ :  $\eta_{N_i} = \alpha_i - \psi$ ,  $\eta_{K_i} = \alpha_i - \beta_i$ ,  $\eta_{A_i} = \gamma_i - \beta_i - \bar{\gamma}_i$ , де  $\bar{\gamma}_i = 90^\circ - \varphi_{M_i}$ ,  $\varphi_{M_i} = \angle A_i M_i H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Кут  $\eta_{N_i}$  описує відхилення стегна  $NK_i$  відносно корпусу  $NG$ , кут  $\eta_{K_i}$  – відхилення гомілки  $K_i A_i$  відносно стегна  $NK_i$ , кут  $\eta_{A_i}$  – відхилення нормалі до основи стопи  $H_i M_i$  відносно гомілки  $A_i K_i$  [4]. Нехай задано двосторонні обмеження на міжланкові кути:

$$\eta_k^{(0)}(t) \leq \eta_k(t) \leq \eta_k^{(1)}(t), \quad t \in [0, T], \quad k \in \{N_i, K_i, A_i\} \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Тут  $\eta_k^{(0)}$ ,  $\eta_k^{(1)}$  – задані на проміжку  $[0, T]$  функції, які визначають області допустимих значень міжланкових кутів,  $k \in \{N_i, K_i, A_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Ці функції побудовані раніше [22] на підставі усереднення (для груп пацієнтів) даних експериментальних біомеханічних досліджень ходи людини.

Позначимо вектором  $\mathbf{c} = (c_{kj}, \eta_{kj}, j = \overline{1, 6}, k \in \{N_1, K_1, A_1\})$  параметри пружин екзоскелетона, які оптимізуватимемо;  $\mathbf{u} = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2)$  – вектор керувань механічної системи. Оптимізуємо у два етапи. На першому обчислюємо кінематичні та динамічні характеристики ходи людини без екзоскелетона. Формулюємо таку задачу.

**Задача 1.** Для заданих обмежень на міжланкові кути (9) знайти такий рух системи  $\xi_n^*(t)$  та відповідне керування  $\mathbf{u}_n^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , які з урахуван-

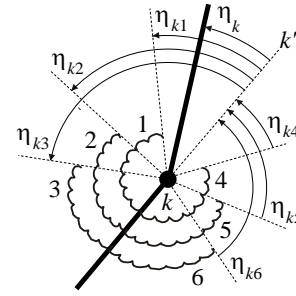


Рис. 2.

ням рівнянь (1), (2) та умов (3)–(6) мінімізують функціонал

$$E = \frac{1}{L} \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 (|q_i \dot{\eta}_{Ni}| + |u_i \dot{\eta}_{Ki}| + |p_i \dot{\eta}_{Ai}| + |w_i \dot{\eta}_{Mi}|) \right] dt. \quad (10)$$

Функціонал (10) характеризує питомі (на одиницю довжини) механічні енерговитрати системи на проміжку подвійного кроку [2–7, 10].

Розв'язок задачі 1 побудуємо за допомогою методики параметричної оптимізації [4]. Відповідно до кількості ступенів вільності системи на ритмічних фазах руху вводимо множину незалежно варійованих функцій, які апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вузлах (параметрами оптимізації). Частина цих параметрів визначаємо із кінематичних умов (4), (6), решту умов задовольняємо за допомогою процедури штрафних функцій, попередньо подавши обмеження виду  $g^{(0)}(t) \leq g(t) \leq g^{(1)}(t)$  в інтегральній формі

$$V = \int_0^T [(g - g^{(1)})_+ + (g^{(0)} - g)_+] dt, \quad (11)$$

де позначено:  $(v)_+ = v$ , якщо  $v \geq 0$ , і  $(v)_+ = 0$ , якщо  $v < 0$ . Статичну невизначеність системи на двоопорних фазах руху  $t \in \Lambda = [0, \tau_{s2}] \cup [T_1, \tau_{s1}]$  вирішуємо до визначенням (за допомогою кубічних Ермітових многочленів) функцій  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$ ,  $t \in \Lambda$ ,  $R_{ix}(t)$ ,  $t \in [\tau_{3-i}, \tau_{si}]$ ,  $i = 1, 2$ , за їх граничними значеннями на суміжних одноопорних фазах та значеннями перших похідних у граничних точках (останні також додаємо до параметрів оптимізації). Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, із рівнянь руху (1), (2) знаходимо параметричне сімейство керувань  $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$ , де  $\mathbf{z}$  – вектор параметрів оптимізації. Після підстановки керувань  $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$  у вираз для функціонала (10) отримуємо функцію багатьох змінних  $E(\mathbf{z})$ . У результаті задачу 1 зводимо до задачі нелінійного математичного програмування:

$$E(\mathbf{z}) + \langle \lambda, \mathbf{V}(\mathbf{z}) \rangle \rightarrow \min_{\mathbf{z}}, \quad (12)$$

де  $\lambda$  – вектор заданих величин (штрафних коефіцієнтів), вектор-функцію  $\mathbf{V}(\mathbf{z})$  отримуємо із відповідних обмежень у (3)–(6), (9) з урахуванням їх інтегрального зображення (11). Окрім цього, компоненти вектора  $\mathbf{V}$  містять модулі величин розриву других похідних  $\ddot{y}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_1(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_2(t)$  у моменти часу  $t=0, T_1, T$ , а також штраф за порушення монотонності функцій  $x_{R1}$ ,  $x_{R2}$ .

Побудований субоптимальний закон руху системи  $\xi_N^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , використовуємо на другому етапі під час безпосередньої оптимізації параметрів екзоскелетона. Відповідна задача оптимізації має таке формулювання.

**Задача 2.** Для заданої ходи людини  $\xi_N^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , знайти такі параметри пружин  $\mathbf{c}^*$  та таке керування  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , які з урахуванням рівнянь (1), (2) та умов (8) мінімізують функціонал

$$P = \int_0^T \sum_i^2 [q_i^2(t) + u_i^2(t) + p_i^2(t)] dt \quad (13)$$

Квадратичний функціонал (13) дає можливість оцінити рівень м'язових зусиль у суглобах нижніх кінцівок людини. Підбір параметрів пружин екзоскелетона за умови його мінімізації дасть можливість зменшити м'язові зусилля.

Алгоритм розв'язання задачі 2 також ґрунтується на методиці обернених задач динаміки. Після підставлення у рівняння руху (1), (2) заданого

закону руху  $\xi_N^*(t)$  та виразу для моменту пружних сил екзоскелетона (7) одержимо параметричне сімейство вектора керувань  $\mathbf{u}(t, \mathbf{c})$  і цільову функцію  $P(\mathbf{c})$ . Враховуючи динамічні обмеження (5), остаточно отримуємо задачу нелінійного математичного програмування:

$$P(\mathbf{c}) + \langle \tilde{\lambda}, \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{c}) \rangle \rightarrow \min_{\mathbf{c} \in \Omega}, \quad (14)$$

де  $\Omega$  – узгоджена з умовами (8) множина допустимих значень параметрів оптимізації, вектор-функцію  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{c})$  отримуємо із умов (5) з урахуванням подання (11),  $\tilde{\lambda}$  – відповідний вектор штрафних коефіцієнтів.

**Числове моделювання ходи людини з екзоскелетом.** Опишемо окремі результати розв'язання сформульованих вище задач. Позначимо лінійні та масоінерційні характеристик моделі:  $m$ ,  $r$ ,  $J$  – маса корпусу  $NG$ , віддаль від його центра маси до точки  $N$  та його момент інерції відносно  $N$ ;  $a_i = |NK_i|$ ,  $m_{ai}$ ,  $r_{ai}$ ,  $J_{ai}$  – довжина та маса стегна  $NK_i$ , віддаль від його центра маси до точки  $N$  та момент його інерції відносно  $N$ ;  $b_i = |K_iA_i|$ ,  $m_{bi}$ ,  $r_{bi}$ ,  $J_{bi}$  – довжина та маса гомілки  $NK_i$ , віддаль від її центра маси до точки  $K_i$  та її момент інерції відносно  $K_i$ ;  $m_{fi}$  – зосереджена у точці  $A_i$  сумарна маса стопи  $i$ -ої ноги,  $i = 1, 2$ .

Ходу людини моделювали з такими параметрами:  $m = 46.7$  кг,  $r = 0.39$  м,  $J = 7.1$  Нм<sup>2</sup>,  $a_1 = a_2 = 0.47$  м,  $m_{a1} = m_{a2} = 8.82$  кг,  $r_{a1} = r_{a2} = 0.257$  м,  $J_{a1} = J_{a2} = 0.279$  Нм<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 0.53$  м,  $m_{b1} = m_{b2} = 3.88$  кг,  $r_{b1} = r_{b2} = 0.219$  м,  $J_{b1} = J_{b2} = 0.253$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{f1} = m_{f2} = 1.2$  кг,  $l_1 = 0.19$  м,  $l_2 = 0.1$  м,  $A_1M_1 = A_2M_2 = 0.17$  м,  $\varphi_{M1} = \varphi_{M2} = 38^\circ$ . Тривалість подвійного кроку  $T = 1.14$  с, довжини одинарних кроків  $L_1 = L_2 = 0.755$  м, коефіцієнт тертя  $\mu = 0.9$ . Межі  $\eta_k^{(0)}(t)$ ,  $\eta_k^{(1)}(t)$  ( $k \in \{N_i, K_i, A_i\}$ ,  $i = 1, 2$ ) областей допустимих значень міжланкових кутів задавали згідно з даними праці [22]. Під час обчислень масоінерційні властивості елементів екзоскелетона враховували у значеннях параметрів відповідних сегментів нижніх кінцівок (ланки екзоскелетона вважали сталевими трубами із зовнішнім 0.016 м і внутрішнім 0.014 м діаметрами та сумарною масою 1.39 кг). Допустимі значення коефіцієнтів жорсткості пружин задавали  $c_{kj}^{(1)} = 100$ ,  $k \in \{N_i, K_i, A_i\}$ ,  $j = \bar{1}, \bar{6}$ ,  $i = 1, 2$ .

Параметри числової схеми алгоритму набували значень, аналогічних до таких у статті [4]. Виконували одну ітерацію методу зовнішніх штрафних функцій, при цьому штрафні коефіцієнти для обмежень (4)–(6) набували значень:  $\lambda_{N_i} = \lambda_{K_i} = 8000$ ,  $\lambda_{A_i} = 12000$ ,  $i = 1, 2$ . Для мінімізації зведених цільових функцій (12), (14) використовували гібридний генетичний алгоритм з дійсним кодуванням [12], згідно з яким розмір популяції задавали у 300 особин, максимальну кількість генерацій 500, ймовірність схрещування хромосом 0.95, ймовірність схрещування мутації 0.85. Обчислення виконували на комп'ютері з процесором Intel Core I7 3610M, 2.3Ghz.

У результаті розв'язання задачі 1 отримали мінімальні енерговитрати  $E^* = 145$  Дж/м. При цьому значення функціонала (13)  $P = 5963$ . Після розв'язання задачі 2 мінімальне його значення (13) стало  $P^* = 1154$ , відповідно енерговитрати  $E = 109$  Дж/м. Отримані числові дані свідчать, що за допомогою екзоскелетона з оптимальними значеннями параметрів введених пружинних пристроїв (7) можна суттєво зменшити енерговитрати на ходу людини. Для досліджуваної механічної моделі це зменшення становить 24,8 %. Відповідні оптимальні значення параметрів пружин екзоскелетона наведені в таблиці.

$k \backslash c^*$	$c_{k1}^*$	$\eta_{k1}^*$	$c_{k2}^*$	$\eta_{k2}^*$	$c_{k3}^*$	$\eta_{k3}^*$	$c_{k4}^*$	$\eta_{k4}^*$	$c_{k5}^*$	$\eta_{k5}^*$	$c_{k6}^*$	$\eta_{k6}^*$
$N_1$	2.1	15.5	5.3	26.2	81.0	56.0	3.3	-6.7	5.1	-12.7	15.1	-22.5
$K_1$	22.0	61.4	28.2	112.1	0.6	148.2	99.2	-5.7	2.4	-14.2	99.0	27.2
$A_1$	5.0	-1.2	3.3	9.7	29.7	32.8	12.8	-22.6	91.4	-37.5	19.4	-47.1

Кінематичні та динамічні характеристики субоптимального процесу, отриманого у результаті розв'язання задачі 1, зображено на рис. 3–11. Тут час  $t$  виражено у відсотках щодо тривалості подвійного кроку, кути – в градусах, динамічні характеристики віднесено до сумарної маси системи та виражено: моменти – в Нм/кг, реакції – в Н/кг. Штриховими лініями вказані області зміни відповідних характеристик, побудовані згідно з результатами праці [22]. На рис. 3–5 побудовані графіки міжланкових кутів у тазобедренному, колінному та гомілковостопному суглобах, відповідні моменти м'язових зусиль зображені на рис. 6–9, горизонтальна та вертикальна складові сил реакцій опорної поверхні – на рис. 10 і 11. Жирними лініями на рис. 6–8 позначені відповідні моменти м'язових зусиль, отримані у результаті розв'язання задачі 2 (хода людини з екзоскелетом з оптимальними параметрами пасивних приводів). На рис. 7 графік моменту сил для ходи з пасивним приводом повністю збігся з графіком моменту сил для ходи без приводу. Пасивний привід виду (7) не зменшив м'язові зусилля у колінному суглобі. Це викликано тим, що отримані оптимальні значення  $\eta_{K,j}^*$  ( $j = 1, 6$ ) кутів навантаження пружин пасивного приводу у колінному суглобі виходять за межі області зміни (9) міжланкового кута у цьому суглобі, тобто під час ходи привід не активізується. Аналіз графіків на рис. 6 і 8 свідчить, що у тазостегновому та гомілковостопному суглобах запропоновані оптимальні пасивні приводи екзоскелетона суттєво зменшують м'язові зусилля. Зокрема, для досліджуваної біотехнічної системи це зменшення становить відповідно 59 і 36%.

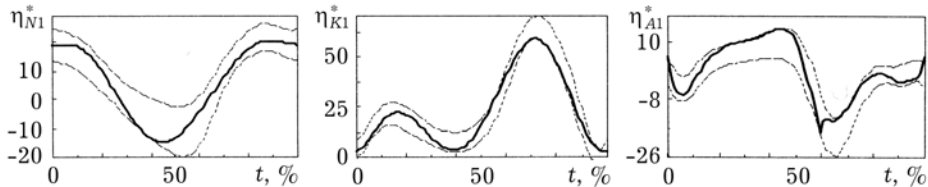


Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

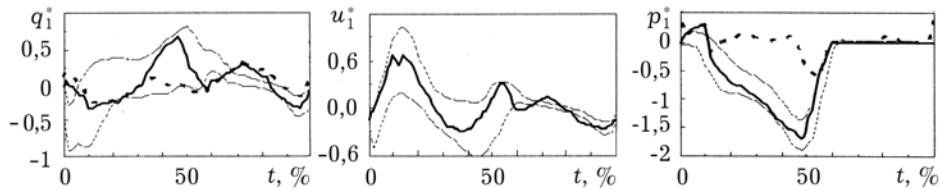


Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

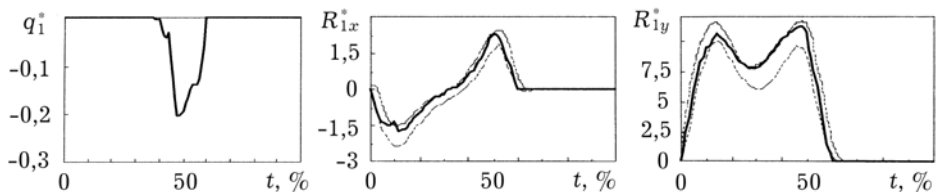


Рис. 9.

Рис. 10.

Рис. 11.



**Висновки.** Побудовано математичну модель ходи людини з пасивно керованим (за допомогою пружинних пристроїв) екзоскелетом. У межах моделі розроблено алгоритм розрахунку таких параметрів екзоскелетона та закону руху біосистеми, які за заданих кінематичних і динамічних обмежень мінімізують цільовий функціонал (квадратичний за моментами м'язових зусиль в основних суглобах нижніх кінцівок). Числові розрахунки підтвердили ефективність запропонованого підходу до моделювання та оптимізації ходи людини з пасивним екзоскелетом.

1. *Белецкий В. В.* Двухногая ходьба: Модельные задачи динамики и управления. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. — К.: Наук. думка, 1989. – 188 с.
3. *Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 88–93.
4. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.
5. *Бербюк В. Є., Красюк Г. В., Нищенко Н. І.* Математичне моделювання динаміки ходи людини у сагітальній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 40, № 4. – С. 127–138.
6. *Бербюк В. Є., Литвин Б. А.* Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керованих процесів біодинамічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 153–161.
7. *Бербюк В. Е., Нищенко Н. И.* Энергетически-оптимальное управление движением человека в фазе опоры на протезированную ногу // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 75–86.
8. *Бордюк В. А., Ларин В. Б., Тимошенко А. Г.* Задачи управления шагающими аппаратами. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
9. *Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Задачі математичного моделювання ходи людини з врахуванням біомеханічних експериментальних даних // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 51–62.
10. *Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Математична модель та програмний комплекс для аналізу динамічних характеристик ходи людини на протезі гомілки // Відбір і обробка інформації. – 2012. – Вип. 36 (112). – С. 29–38.
11. *Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. А.* Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 162–171.
12. *Литвин Б.* Модифікація паралельного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18. – С. 229–239.
13. *Скворцов Д. В.* Клинический анализ движений. Анализ походки. – Иваново: Изд. НПЦ “Стимул”, 1996. – 344 с.
14. *Формальский А. М.* Перемещение антропоморфных механизмов. – М.: Наука, 1982. – 368 с.
15. *Чигарев А. В., Борисов А. В.* Моделирование управляемого движения двухногого антропоморфного механизма // Рос. журн. биомеханики. – 2011. – 15, № 1 (51). – С. 74–88.
16. *Ackermann Marko, Bogert van den Antonie J.* Optimality principles for modelbased prediction of human gait // J. of Biomechanics. – 2010. – 43. – P. 1055–1060.
17. *Antonio J. del-Ama, Aikaterini D. Koutsou, Juan C. Moreno et al.* Review of hybrid exoskeletons to restore gait following spinal cord injury // J. of Rehabilitation Research & Development. – 2012. – 49, № 4. – P. 497–514.

18. *Conor James Walsh, Ken Endo, Hugh Herr.* A quasi-passive leg exoskeleton for load-carrying augmentation // Intern. J. of Humanoid Robotics. – 2007. – 4, № 3 – P. 487–506.
19. *Hugh Herr.* Exoskeletons and orthoses: classification, design challenges and future directions // J. of NeuroEngineering and Rehabilitation. – 2009. – 6. – P. 21–29.
20. *Pons J. L., Moreno J. C., Brunetti F. J., Rocon E.* Lower-Limb Wearable Exoskeleton // Rehabilitation Robotics / book edited by Sashi S. Kommur: I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, 2007. – P. 471–498.
21. *Ren L. Howard D. Kenney L.* Computational Models to Synthesize Human Walking // J. of Bionic Eng. – 2006. – 3. – P. 127–138.
22. *Winter D. A.* The biomechanics and motor control of human gait. – Waterloo: Univ. of Waterloo Press, Canada, 1991. – 140 p.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХОДЬБЫ ЧЕЛОВЕКА С ЭКЗОСКЕЛЕТОНОМ

*Построена математическая модель ходьбы человека с экзоскелетом. Для моделирования использована система девяти твердых тел, представляющих корпус человека и основные сегменты нижних конечностей. Экзоскелет смоделирован двумя стержневыми трёхзвенниками, закрепленными на бёдрах, голених и стопах. Стержни связаны между собой цилиндрическими шарнирами с пружинными устройствами. Сформулирована задача определения таких параметров пружин экзоскелетона, которые при заданных кинематических и динамических ограничениях на биотехническую систему “человек–экзоскелетон” минимизируют заданный целевой функционал (квадратичный по моментам мышечных усилий в суставах ног человека). Разработана методика построения приближенного решения сформулированной задачи, базирующаяся на процедуре параметризации обобщенных координат системы кубическими сглаживающими сплайнами, концепции обратных задач динамики и численных методах математического программирования.*

#### MATHEMATICAL MODELING OF HUMAN GAIT WITH EXOSKELETON

*The mathematical model of the human gait with exoskeleton is built. The plane system of 9 rigid bodies, that describes trunk and main chains of lower extremities is used for modelling. The exoskeleton is modelled by two three link rod, fixed on hips, knee and feet. Rods are joined by cylindrical hinges with spring devices. The problem for determining of the parameters of the exoskeleton springs, which under given kinematics and dynamic restrictions of the biotechnical system “man-exoskeleton” minimized the given objective functional (squares of torques of the muscles forces in the human legs joints) is formulated. The methodology for building approximate solution of the formulated problem, which is based on parameterization procedure of the model's generalized coordinates by the cubic smoothing splines, inverse dynamic approach and numerical methods of the mathematical programming is developed.*