

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛООВОГО СТАНУ БАГАТОКЛИНОВОЇ СИСТЕМИ

Розглянуто стаціонарну задачу теплопровідності для багатоклинової системи. З використанням формулювання фізичної задачі у вигляді узагальненої задачі спряження запропоновано методику побудови у явній формі виразів розподілу температурних полів у такій системі. Побудовано у замкнутому вигляді вирази, що описують розподіл температурних полів у двоклиновій системі. Досліджено поведінку температурних полів за різних фізичних та геометричних параметрів системи.

Вступ. У композитних елементах конструкцій сучасної техніки зазвичай присутні злами поверхонь з'єднань матеріалів, тріщини, гострокінцеві включення, вирізи тощо. Ці та інші недосконалості межі поділу матеріалів зумовлюють збурення фізико-механічних полів, вивчати які важливо для прогнозування міцності та роботоздатності конструкцій. Під час досліджень цих збурень такі околиці моделюють з'єднаними клиноподібними областями (плитами) зі спільною вершиною (ребром), а сформульовані крайові задачі для неоднорідних областей переважно розв'язують, використовуючи метод спряження [9, 14–16].

У сучасних працях основну увагу дослідники звертали на вивчення в околі зламів меж поділу матеріалів особливостей полів напружень ([2, 9, 13–16]). Водночас порівняно мало уваги приділено з'ясуванню поведінки в таких околицях температурних полів, що необхідно для аналізу термомеханічної поведінки елементів конструкцій, що зазнають дії різних теплових навантажень.

Питання теплопровідності композитного клина розглянуто у праці [3]. Задача визначення та контролю температури у безмежній клиновій області сформульована у [12], де описано також методику її розв'язання за допомогою функціонала Ляпунова та методу конформних відображень. Аналогію між переміщеннями за повздовжнього зсуву та розподілом температури вперше зауважено у праці Г. С. Кіта [4] та детально проаналізовано у [8]. Про можливість використання в задачах стаціонарної теплопровідності для багатоклинових композитів розв'язків антиплоскої задачі теорії пружності для аналогічних систем йдеться у публікаціях [6, 9, 10, 14].

Нижче запропоновано методику визначення стаціонарних температурних полів у багатоклиновому композиті, обумовлених внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Вона ґрунтується на використанні формулювання узагальненої задачі спряження для кусково-однорідних тіл [5], яка адаптована для багатоклинових областей [11]. Методика дає змогу уникнути необхідності розв'язувати систему $2n$ рівнянь (n – кількість клинів у композиті), що вимагає класичний метод спряження.

Формулювання задачі. Розглянемо клиновий композит товщиною $2h$, складений із довільної кількості n ідеально з'єднаних між собою однорідних клинів S_i ($i = \overline{1, n}$) з кутами розхилу α_i , які мають спільне прямолінійне ребро OO' та теплоізовані лицьові поверхні (рис. 1а). Композит нагрівається внутрішніми джерелами-стоками тепла потужності $q_i = \pm q_i(r)$ ($i = \overline{1, n-1}$), які розподілені на поверхнях спряження ($\varphi = \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$) i -го та $i+1$ -го клинів. На зовнішніх гранях $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_n$ системи виконуються умови теплообміну першого чи другого родів або їх комбінації.

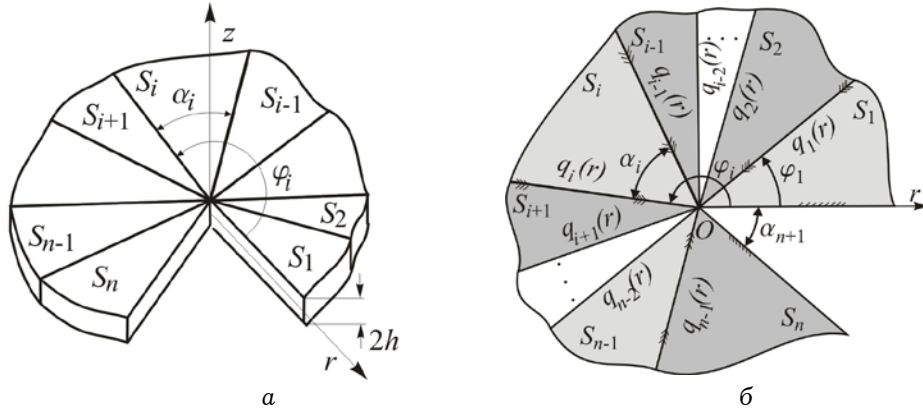


Рис. 1. Схема багатоклинового композиту.

Відтак визначення теплового стану такої системи полягає у відшуванні в кожній із областей S_i ($i = \overline{1, n}$) деякої функції $t_i = t_i(r, \varphi)$, котра за довільного $-h < z < h$ (рис. 1б) задовольнятиме рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_i}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i. \quad (1)$$

На лініях з'єднання областей $\varphi = \varphi_i$ виконуються умови ідеального теплового контакту

$$t_{i+1}|_{\varphi=\varphi_i} = t_i|_{\varphi=\varphi_i}, \quad \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} - \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} = q_i, \quad (2)$$

а на зовнішніх гранях – крайові умови першого роду

$$t_1|_{\varphi=0} = T_0, \quad t_n|_{\varphi=\varphi_n} = T_n, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad (3)$$

другого роду

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{r}{\lambda_n} q_0, \quad \frac{\partial t_n}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{r}{\lambda_n} q_n, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \int_0^{\varphi_n} \sum_{i=0}^n q_i(r) dr = 0; \quad (4)$$

мішані умови (на одній грані задані умови першого роду, а на іншій – другого)

$$t_1|_{\varphi=0} = T_0, \quad \frac{\partial t_n}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{r}{\lambda_n} q_n, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (5)$$

або

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{r}{\lambda_n} q_0, \quad t_n|_{\varphi=\varphi_n} = T_n, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (6)$$

Тут $T_0 = T_0(r)$, $T_n = T_n(r)$, $q_0 = q_0(r)$, $q_n = q_n(r)$ – значення температури та теплових потоків на берегах системи; λ_i – коефіцієнт теплопровідності матеріалу відповідного клина.

Формулювання узагальненої задачі спряження. Продовжимо функцію температури t_i , диференціальні оператори $\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2}$, $\frac{\partial t_i}{\partial r}$ та сталі в області S_i коефіцієнти λ_i на всю область $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ у вигляді функції

$$\left\{ \frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2}, \frac{\partial t_i}{\partial r}, t_i, \lambda_i \right\} \square f(r, \varphi) = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) S_+(\varphi - \varphi_i). \quad (7)$$

Врахувавши зв'язок між узагальненими і класичними похідними [5] та умови ідеального теплового контакту (2), замість системи n рівнянь (1) з умовами (2) отримаємо частково вироджене диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} C_i \delta_+(\varphi - \varphi_i). \quad (8)$$

Тут $C_i = C_i(r) = -r \frac{q_i}{\lambda_{i+1}} - \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i-0}$, $\delta_+(\zeta)$ – функція Дірака.

Тепер розглядаємо композит як єдину область з кусково-однорідними характеристиками, де виконується рівняння (8) із крайовими умовами (3)–(6), обраними залежно від конкретної задачі. Сформульовану так задачу називатимемо узагальненою задачею спряження для стаціонарного теплового стану багатоклинового композиту.

Побудова розв'язку. Для розв'язування узагальненої задачі домножимо рівняння (8) на r^2 та застосуємо до нього і до крайових умов (3)–(6) перетворення Мелліна [7]. Відтак, у просторі зображень рівняння (8) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \tilde{t}}{\partial \varphi} + p^2 \tilde{t} = - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\tilde{f}_{qi}}{\lambda_{i+1}} + \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i-0} \delta_+(\varphi - \varphi_i) \right], \quad (9)$$

а умови (3)–(6), залежно від типу крайової задачі, будуть:

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\tilde{q}_0}{\lambda_n}, \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{\tilde{q}_n}{\lambda_n}; \quad (10)$$

$$\tilde{t} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{T}_0, \quad \tilde{t} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{T}_n; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\tilde{q}_0}{\lambda_n}, \quad \tilde{t} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{T}_n(p); \quad (12)$$

$$\tilde{t} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{T}_0, \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{\tilde{q}_n}{\lambda_n}. \quad (13)$$

Тут $\tilde{t} = \tilde{t}(p, \varphi)$, $\tilde{f}_{qi} = \tilde{q}_i(p+1)$, $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_0(p+1)$, $\tilde{q}_n = \tilde{q}_n(p+1)$, $\tilde{T}_0 = \tilde{T}_0(p)$, $g \square \{t, r q_i, r q_0, r q_n, T_0, T_n\}$, $\tilde{g}_n = \tilde{g}_n(p)$ – трансформанти Мелліна [7].

Розв'язок крайової задачі (9)–(13) знайдено за допомогою методу варіації сталої з використанням алгебри узагальнених функцій:

$$\begin{aligned} \tilde{t} = & - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{f}_{qi} + (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \tilde{L}_3^i \right) \sin[p(\varphi - \varphi_i)] (p \lambda_{i+1})^{-1} S_+(\varphi - \varphi_i) + \\ & + A \left(\cos p \varphi - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) (p \lambda_{i+1})^{-1} \tilde{L}_1^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i) \right) + \\ & + B \left(\sin p \varphi - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) (p \lambda_{i+1})^{-1} \tilde{L}_2^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\tilde{L}_1^i = \tilde{L}_1^i(p)$, $\tilde{L}_2^i = \tilde{L}_2^i(p)$, $\tilde{L}_3^i = \tilde{L}_3^i(p)$ визначають рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_1^i &= -p \sin p\varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \lambda_{k+1}^{-1} \tilde{L}_1^k \cos [p(\varphi_i - \varphi_k)], \\
\tilde{L}_2^i &= p \cos p\varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \lambda_{k+1}^{-1} \tilde{L}_2^k \cos [p(\varphi_i - \varphi_k)], \\
\tilde{L}_3^1 &= 0, \quad \tilde{L}_3^i = -\sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{f}_{qk} (p+1) + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \lambda_{k+1}^{-1} \tilde{L}_3^k) \cos [p(\varphi_i - \varphi_k)],
\end{aligned} \tag{15}$$

а функції $A = A(p)$, $B = B(p)$ залежать від заданих умов.

1) Якщо задано умови теплообміну першого роду (3), то

$$\begin{aligned}
B &= \Delta_2^{-1} \left\langle \tilde{T}_n - p^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (\tilde{f}_{qi} - (\lambda_{i+1} - \lambda_i) L_3^i) \lambda_{i+1}^{-1} \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{T}_0 p^{-1} \left(p \cos p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} L_1^i \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right) \right\rangle, \\
A &= \tilde{T}_0, \quad \Delta_2 = \sin p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) p^{-1} \lambda_{i+1}^{-1} L_2^i \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)].
\end{aligned} \tag{16}$$

2) Якщо задано умови теплообміну другого роду (4), то

$$\begin{aligned}
A &= \Delta_1^{-1} \left\langle \tilde{q}_n \lambda_n^{-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (\tilde{f}_{qi} - (\lambda_{i+1} - \lambda_i) L_3^i) \lambda_{i+1}^{-1} \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{q}_0 (p\lambda_1)^{-1} \left\{ p \cos p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} L_2^i \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right\} \right\rangle, \\
B &= \frac{\tilde{q}_0}{p\lambda_1}, \quad \Delta_1 = -p \sin p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} L_1^i \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)].
\end{aligned} \tag{17}$$

3) Якщо задані умови мішаного типу, то слід розглядати два варіанти:

а) мішані умови задані співвідношеннями (5)

$$\begin{aligned}
B &= \Delta_3^{-1} \left\langle \tilde{q}_n \lambda_n^{-1} - \sum_{i=1}^{n-1} [\tilde{f}_{qi} - (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \tilde{L}_3^i] \lambda_{i+1}^{-1} \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)] - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{T}_0 \left(-p \sin p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} \tilde{L}_1^i \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right) \right\rangle, \\
A &= \tilde{T}_0, \quad \Delta_3 = p \cos p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} \tilde{L}_2^i \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)];
\end{aligned} \tag{18}$$

б) мішані умови задані співвідношеннями (6)

$$\begin{aligned}
A &= \Delta_4^{-1} \left\langle \tilde{T}_n + p^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} [\tilde{f}_{qi} - (\lambda_{i+1} - \lambda_i) L_3^i(p)] \lambda_{i+1}^{-1} \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)] - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{q}_0 p^{-1} \lambda_{i+1}^{-1} \left(p \sin p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \lambda_{i+1}^{-1} L_2^i \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)] \right) \right\rangle, \\
B_1 &= \frac{1}{p\lambda_{i+1}}, \quad \Delta_4 = \cos p\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) p^{-1} \lambda_{i+1}^{-1} L_1^i \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)].
\end{aligned} \tag{19}$$

Застосування до (14) оберненого перетворення Мелліна дає такий вираз для визначення температурного поля у кусково-однорідному клиновому композиті:

$$t = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{t}(p, \varphi) r^{-p} dp. \tag{20}$$

В інтегралі (20) підінтегральна функція аналітична в довільній смузі $\text{Re } p_i < s < \text{Re } p_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), де p_i – корені знаменника $\Delta_j(p) = 0$, $j = \overline{1, 4}$, $\text{Re } p_{i-1} < \text{Re } p_i < \text{Re } p_{i+1}$. Отже за параметр s під час інтегрування можна обрати довільне число із даного інтервалу.

Усталений тепловий стан у двоклиновому композиті. Для прикладу визначимо розподіл температури всередині системи, складеної із двох з'єднаних між собою однорідних ізотропних клинів S_1 та S_2 з кутами роз-

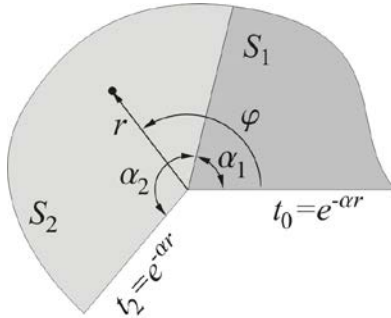


Рис. 2. Схема двоклинової системи.

хилу α_1 і α_2 та коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 (рис. 2).

На вільних берегах системи задані умови теплообміну першого роду (3)

$$t|_{\varphi=0} = e^{-ar}, \quad t|_{\varphi=\varphi_2} = e^{-ar},$$

які після застосування до них перетворення Мелліна набудуть вигляду

$$\tilde{t}|_{\varphi=0} = a^{-p}\Gamma(p), \quad \tilde{t}|_{\varphi=\varphi_2} = a^{-p}\Gamma(p), \quad (21)$$

де $\Gamma(p)$ – гамма-функція, a – коефіцієнт зосередження температури.

Тепер, використовуючи описану вище методику, на основі подань (14)–(16) запишемо вираз для трансформанти розподілу температури:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(p, \varphi) = & a^{-p}\Gamma(p)\Delta^{-1} \left\langle 0, 5 \{ 2\lambda_2 \sin p\varphi - (\lambda_1 + \lambda_2) \sin [p(\varphi - \varphi_2)] + \right. \\ & \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) \sin [p(\varphi - 2\varphi_1 + \varphi_2)] \right\} - 2(\lambda_1 - \lambda_2) \times \\ & \times \sin [p(\varphi - \varphi_1)] \sin \left[p \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2} \right) \sin \frac{p\varphi_2}{2} \right] S_+(\varphi - \varphi_1) \Bigg\rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

де $\Delta = \Delta(p) = \lambda_2 \sin p\varphi_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos p\varphi_1 \sin [p(\varphi_2 - \varphi_1)]$.

Таким чином, розподіл температури в композиті описуватиме вираз (20), в якому вигляд функції $\tilde{t}(p, \varphi)$ визначає вираз (22).

Значення $p = 0$ є полюсом підінтегральної функції, а найближчий до $p = 0$ полюс лежить у точці p_1 ($\text{Re } p_1 = \min \{ \text{Re } p_i \in (0; 1) \}$, причому p_i – корені рівняння $\lambda_2 \sin p\varphi_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos p\varphi_1 \sin [p(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0$). Тому функція $\tilde{t}(p, \varphi)$ є аналітичною у смузі $0 < s < \text{Re } p_1$. Якщо покласти $p = s + i\sigma$ ($s \in (0; p_1)$) та перейти до границі при $s \rightarrow 0$, то можна брати інтеграл по уявній осі з обходом нуля по малому півколу проти годинникової стрілки (приріст інтеграла в точці $p = 0$ дорівнює лишку підінтегральної функції, помноженому на πi). Отже, для опису розподілу температури отримаємо вираз

$$t(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t_\Gamma(\sigma, r) [t_t(\sigma, \varphi) + t_s(\sigma, \varphi) S_+(\varphi - \varphi_1)]}{\Delta(\sigma)} d\sigma, \quad (23)$$

де $t_\Gamma(\sigma, r) = \Gamma_1(\sigma) \cos(\sigma \ln ar) + \Gamma_2(\sigma) \sin(\sigma \ln ar)$,

$$\Gamma_1(\sigma) = \text{Re}[\Gamma(i\sigma)], \quad \Gamma_2(\sigma) = \text{Im}[\Gamma(i\sigma)],$$

$$t_t(\sigma, \varphi) = 2\lambda_2 \text{sh } \sigma\varphi - (\lambda_1 + \lambda_2) \text{sh}[\sigma(\varphi - \varphi_2)] + (\lambda_1 - \lambda_2) \text{sh}[\sigma(\varphi - 2\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$t_s(\sigma, \varphi) = 4(\lambda_1 - \lambda_2) \text{sh}[\sigma(\varphi - \varphi_1)] \text{sh} \left[\sigma \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] \text{sh} \frac{\sigma\varphi_2}{2},$$

$$\Delta(\sigma) = 2(\lambda_2 - \lambda_1) ch\sigma\varphi_2 sh[\sigma(\varphi_1 - \varphi_2)] + 2\lambda_2 sh\sigma\varphi_2.$$

Цей інтеграл збіжний і може бути обчислений стандартними числовими методами.

Зазначимо, що коли кути розхилу клинів однакові $\alpha_2 = \alpha_1$ ($\varphi_2 = 2\varphi_1 < \pi/2$), під час відшукування оригіналу за формулою (20) можна скористатися теоремою про згортку [1, 7]. Тоді отримаємо такий вираз:

$$t(r, \varphi) = \frac{1}{2\varphi_1} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{r}{\tau} \cos \varphi} \sin\left(\frac{r}{\tau} \sin \varphi\right) + e^{-\frac{r}{\tau} \cos(\varphi - 2\varphi_1)} \sin\left[\frac{r}{\tau} \sin(\varphi - 2\varphi_1)\right] \right\} \frac{1}{1 + (ar)^{\pi/2\varphi_1}} \frac{1}{\tau} d\tau. \tag{24}$$

Аналогічний вираз температурного поля одержали під час розв'язування цієї задачі методом класичної задачі спряження.

Для однорідного клина, на гранях якого в точках $r < r_1$ підтримується стала температура T , а в точках $r > r_1$ вона нульова, отримані з (14)–(16) вирази для обчислення температури збіглися з відомими результатами [7].

Числові дослідження та висновки. Використовуючи подання (23), визначили розподіл температури у двоклиновій системі за різних фізико-механічних і геометричних параметрів. На рис. 3 проілюстровано розподіл температури, коли $\alpha_1 = 2\pi/3$, $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\lambda_1, \lambda_2 = 100\lambda_1$, $a = 0,5$.

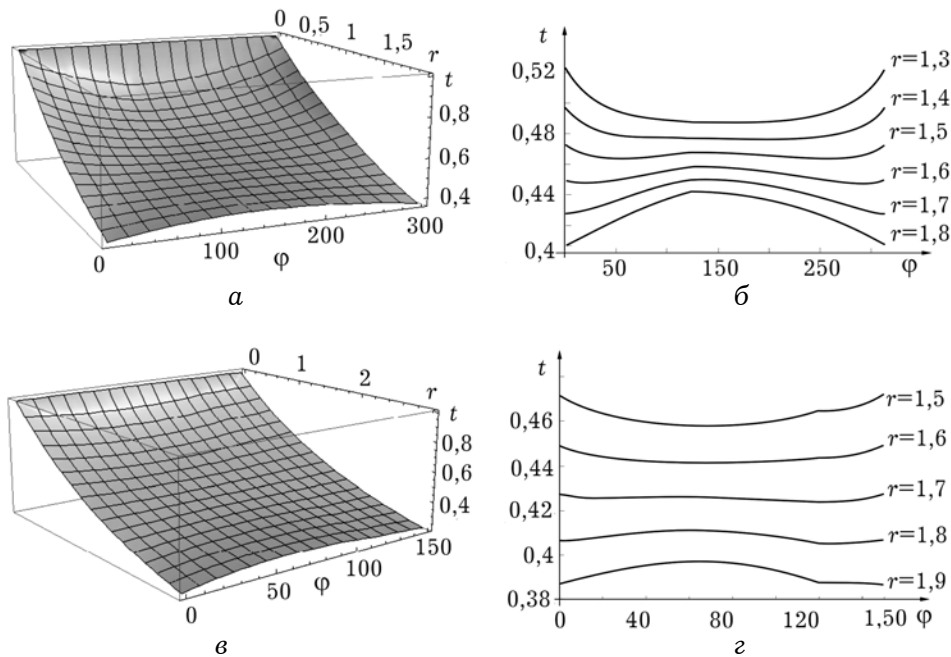


Рис. 3. Результати числових досліджень: а, б – при $k = 4$ ($\alpha_2 = 8\pi/3$);
в, г – при $k = 0,25$ ($\alpha_2 = \pi/3$).

На рис. 3а, в зображено розподіл температури залежно від полярних координат r, φ , а на рис. 3б, г – на сталій віддалі від вістря системи. Як бачимо, температура в околі вершини спадає з віддаленням від країв системи. Проте на певній віддалі від вершини ситуація змінюється на протилежну і локальний екстремум температури є вищий, ніж температура берегів системи (значення крайових умов) на тій самій відстані від вершини

(рис. 3б, з). Виявили, що ця відстань залежить, у першу чергу, від коефіцієнта зосередження температури a на торцях системи і менше – від фізичних та геометричних характеристик.

Коли компоненти системи мають однакові кути розхилу $\alpha_1 = \alpha_2 < \pi/4$, обчислені за допомогою виразу (23), значення температурного поля збіглися з результатами обчислень за виразом (24). Результати досліджень за довільних $\alpha_1 = \alpha_2$ дали змогу зробити висновок, що за однакових кутів розхилу розподіл температури залежить лише від крайових умов та кутів розхилу та не залежить від фізичних характеристик системи.

Таким чином, використовуючи для визначення температурних полів у багатоклинових системах формулювання узагальненої задачі спряження, вдається уникнути розв'язування системи $2n$ рівнянь (n – кількість клинів у композиті), чого вимагає класичний метод спряження. Розглянутий приклад засвідчує ефективність запропонованого підходу для побудови замкнутого аналітичного вигляду виразів розподілу температури всередині багатоклинової системи. Достовірність результатів перевірено розв'язанням цієї задачі іншими методиками та збігом у частковому випадку з відомим результатом.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: в 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 344 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, №2. – С. 12–34.
3. Каламкарров А. А., Кудрявцев Б. А., Рудакова О. Б. Теплопроводность многослойного композитного клина // Инж. физ. журн., 1993. – **64**, № 4. – С. 487–491.
4. Кит Г. С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – №4. – С. 336–340.
5. Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
6. Мойсеенок А. П. Решение двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа в клиновидно-слоистой среде с применением в теплопроводности и теории упругости // Вісник ОНУ ім. І. І. Мечнікова. Сер. Математика і механіка. – 2012. – **17**, № 3(15) – С. 120–125.
7. Онищук В. Интегральні перетворення в задачах механіки деформівного твердого тіла. – Львів: ЛДУ, 1998. – 148 с.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: ДВЦ НТШ, 2007. – 716 с.
9. Carpinteri A., Paggi M. Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics // J. of mech. of mat. and struct. – 2011. – **6**, № 1. – P. 113–125.
10. Chyanbin Hwu, Lee W. J. The singularity in multi-material wedges under thermal loading // Key engineering materials – advances in fracture and failure prevention. – 2004. – **261–263**. – P. 345–350.
11. Makhorkin M., Sulym H. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation // Civil and environmental engin. reports. – 2010. – № 5. – P. 235–251.
12. Rastgoftar H., Moslehy F. A. A an inverse method for controlling the temperature distribution in infinite wedge domain // ASME 2012: Intern. Mech. Engin. Congress and Exposition, Houston, Texas, November 9–15, 2012. – **7**. – P. 2759–2763.
13. Wang J.-Sh., He X., Qin Q.-H. Singularity analysis of electro-mechanical fields in angularly inhomogeneous piezoelectric composites wedges // IUTAM Bookseries. –2011. – **24**. – P. 153–161.

14. Paggi M., Carpinteri A., Orta R. A mathematical analogy and a unified asymptotic formulation for singular elastic and electromagnetic fields at multimaterial wedges// Journal of Elasticity. – 2010. – **99**, № 2. – P. 131–146.
15. Shahani A. R. Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bonded materials // Archive of Appl. Mech. – 2006. – **75**, № 6–7. – P. 405–411.
16. Shahani A. R., Ghadiri M. Analysis of bonded finite wedges with an interfacial crack under anti-plane shear loading// J. of mech. Eng. sc. – 2009. – № 221. – P. 2213–2223.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОКЛИНОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена стационарная задача теплопроводности для многоклиновой системы. С использованием формулировки физической проблемы в виде обобщенной задачи сопряжения предложена методика конструирования в явной форме выражений распределения температурных полей в такой системе. Построены в замкнутом виде выражения, описывающие распределение температурных полей в двухклиновой системе. Исследовано поведение температурных полей при различных физических и геометрических параметрах системы.

DETERMINATION OF STATIONARY THERMAL STATE OF A MULTIWEDGE SYSTEM

A stationary heat conduction problem for a multi-wedge system is considered. The methods of construction explicitly the expressions of the temperature fields distribution in such a system are offered, basing on the formulation of generalized conjugation problem. The expressions in a closed form are constructed which describe the temperature fields distribution in a two-wedge system. The behavior of temperature fields for different physical and geometric parameters of the system is studied.