

### ВЗАЄМОДІЯ ГАРМОНІЧНОЇ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ НОРМАЛЬНОГО ПАДІННЯ ІЗ НЕОДНОРІДНО ДЕФОРМОВАНИМ ПЛОСКИМ ШАРОМ

*У межах теорії поширення малих пружних збурень у неоднорідно деформованому пружному континуумі сформульовано задачу про взаємодію гармонічної плоскої SH-хвилі нормального падіння із пружним шаром, що перебуває у стані плоскої деформації. Із використанням ітераційного методу отримано її аналітичний розв'язок.*

Дослідження взаємодії пружних хвиль із твердими тілами викликає інтерес дослідників. Зокрема, це стосується проблем, пов'язаних із розробленням методів та засобів для неруйнівного визначення напружено-деформованого стану та ідентифікації неоднорідностей і дефектів у таких об'єктах [1, 4, 6].

Нижче за математичною моделлю поширення малих пружних збурень у неоднорідно деформованому пружному континуумі [5] сформульовано стаціонарну задачу про взаємодію гармонічної плоскої SH-хвилі нормального падіння із пружним шаром, що перебуває у стані плоскої деформації. Для її розв'язування використано ітераційний метод [5], із допомогою якого отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження хвилі. Розглянуто приклад застосування отриманих результатів для опису взаємодії SH-хвилі із навантаженим шаром.

**Формулювання задачі.** Розглянемо ізотропний однорідний пружний шар  $\mathcal{S} : 0 < x_2 < h$ , що розділяє два ізотропні пружні півпростори  $\mathcal{S}^{(1)} : -\infty < x_2 < 0$  та  $\mathcal{S}^{(2)} : h < x_2 < \infty$ ,  $(x_1, x_3) \in \square^2$ . Шар  $\mathcal{S}$  перебуває у стані плоскої деформації, внаслідок чого він акустично неоднорідний та анізотропний. За заданих густини маси  $\rho$ , коефіцієнтів Ляме  $\lambda, \mu$  та Мурнагана  $a, b, c$  акустичні властивості шару в його актуальному стані визначають компоненти тензора деформації  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$ ,  $(i, j = 1, 2)$ ,  $\varepsilon_{33} = \text{const}$ . Середовища  $\mathcal{S}^{(1)}$  та  $\mathcal{S}^{(2)}$  ненапружені, фазові швидкості поперечних плоских хвиль у них рівні  $C^{(k)} = \sqrt{\mu^{(k)}/\rho^{(k)}}$ , де  $\rho^{(k)}$  та  $\mu^{(k)}$  – їхні густини маси та модулі зсуву ( $k = 1, 2$ ).

Нехай у півпросторі  $\mathcal{S}^{(1)}$  у нормальному до поверхні поділу середовищ напрямку падає гармонічна плоска SH-хвиля частоти  $\omega$ :

$$w_I^{(1)}(x_1, x_2, t) = \dot{W}_I^{(1)} \exp(i(K^{(1)}x_2 - \omega t)). \quad (1)$$

Тут  $\dot{W}_I^{(1)}$  – комплексна амплітуда пружної хвилі,  $K^{(1)} = \omega/C^{(1)}$  – хвильове число,  $i = \sqrt{-1}$ .

Відбиті та заломлені поверхнями  $x_2 = 0$  та  $x_2 = h$  хвилі також будуть гармонічними у часі та зберігатимуть SH-поляризацію. Відбита у півпростір  $\mathcal{S}^{(1)}$  та заломлена в середовище  $\mathcal{S}^{(2)}$  хвилі будуть плоскими:

$$\begin{aligned} w_R^{(1)}(x_1, x_2, t) &= \dot{W}_R^{(1)} \exp(-i(K^{(1)}x_2 + \omega t)), \\ w_I^{(2)}(x_1, x_2, t) &= \dot{W}_I^{(2)} \exp(i(K^{(2)}x_2 - \omega t)), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\dot{W}_R^{(1)} = \dot{W}_R^{(1)}(x_1)$ ,  $\dot{W}_I^{(2)} = \dot{W}_I^{(2)}(x_1)$  – комплексні амплітуди,  $K^{(2)} = \omega/C^{(2)}$ . Тут і далі крапка над символом позначає комплексні величини.

Хвильове поле в неоднорідно деформованому шарі шукатимемо у вигляді

$$w(x_1, x_2, t) = \dot{W}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t). \quad (3)$$

Для визначення невідомої амплітуди  $\dot{W}(x_1, x_2)$  використаємо модель поширення малих пружних збурень у неоднорідно деформованому середовищі [5]. У результаті прийдемо до рівняння

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( [1 + \mu_1(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_1} + D\varepsilon_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( [1 + \mu_2(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_2} + D\varepsilon_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right] \dot{W} + k^2 \dot{W} = 0, \quad (4)$$

де  $k = \omega/C$ ,  $C = \sqrt{\mu/\rho}$ ;  $F = 2b/\mu$ ,  $D = c/\mu$ ;

$$\mu_1(x_1, x_2) = (F + D)(\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + \varepsilon_{33}) + F\varepsilon_{22}(x_1, x_2),$$

$$\mu_2(x_1, x_2) = F\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + (F + D)(\varepsilon_{22}(x_1, x_2) + \varepsilon_{33}).$$

На поверхнях поділу середовищ  $x_2 = 0$  та  $x_2 = h$  виконуються умови ідеального механічного контакту для пружних збурень:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x_1, 0) - \dot{W}_R^{(1)}(x_1) &= \dot{W}_I^{(1)}, \\ \left[ \bar{B} \dot{W}(x_1, x_2) \right]_{x_2=0} + i\tilde{\mu}^{(1)} K^{(1)} \dot{W}_R^{(1)}(x_1) &= i\tilde{\mu}^{(1)} K^{(1)} \dot{W}_I^{(1)}; \\ \dot{W}(x_1, h) - \dot{W}_I^{(2)}(x_1) \exp(iK^{(2)}h) &= 0, \\ \left[ \bar{B} \dot{W}(x_1, x_2) \right]_{x_2=h} - i\tilde{\mu}^{(2)} K^{(2)} \dot{W}_I^{(2)}(x_1) \exp(iK^{(2)}h) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\tilde{\mu}^{(1)} = \mu^{(1)}/\mu$ ,  $\tilde{\mu}^{(2)} = \mu^{(2)}/\mu$ ,  $\bar{B}$  – диференціальний оператор:

$$\bar{B} = (1 + \mu_2(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2} + D\varepsilon_{12} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Диференціальне рівняння (4) із залежними від координат коефіцієнтами разом із крайовими умовами (5) визначають хвильове поле у шарі  $\mathcal{S}$  у поданні (3).

**Ітераційний метод розв'язування задачі.** Для більшості конструкційних матеріалів коефіцієнти Ляме і Мурнагана одного порядку [1]. Оскільки початкові деформації  $\varepsilon_{ij}$  пружні, то для них значення функцій  $\mu_1(x_1, x_2)$  та  $\mu_2(x_1, x_2)$  малі порівняно з одиницею. Це дає можливість наближено розв'язати задачу, застосовуючи ітераційний алгоритм [5].

З цією метою перепишемо рівняння (4) у вигляді

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (1 + \mu_2(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \bar{N} + k^2 \right] \dot{W}(x_1, x_2) = 0, \quad (6)$$

де  $\bar{N}$  – диференціальний оператор:

$$\bar{N} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ (1 + \mu_1(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_1} + D\varepsilon_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + D \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right).$$

Для кожної компоненти тензора деформації  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$  введемо функцію відхилення  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(x_1, x_2)$  від її середньоінтегрального значення  $\bar{\varepsilon}_{ij}(x_1)$  на

відрізку  $x_2 \in [0, h]$  при  $x_1 = \text{const}$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(x_1, x_2) = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2) - \bar{\varepsilon}_{ij}(x_1), \text{ де } \bar{\varepsilon}_{ij}(x_1) = \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon_{ij}(x_1, x_2) dx_2. \quad (7)$$

У результаті приходимо до ітераційної послідовності рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\left( [1 + \bar{\mu}_2(x_1)] \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k^2 \right) \dot{W}^{[p+1]}(x_1, x_2) = -(\bar{T} + \bar{N}) \dot{W}^{[p]}(x_1, x_2), \quad (8)$$

де  $\bar{T} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \bar{\mu}_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right]$ ,  $\bar{\mu}_2(x_1) = F \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) + (F + D)(\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) + \varepsilon_{33})$ ,

$\tilde{\mu}_2(x_1, x_2) = F \tilde{\varepsilon}_{11}(x_1, x_2) + (F + D) \tilde{\varepsilon}_{22}(x_1, x_2)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  – номер ітерації.

За нульове наближення виберемо розв'язок рівняння

$$\left( [1 + \bar{\mu}_2(x_1)] \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k^2 \right) \dot{W}(x_1, x_2) = 0. \quad (9)$$

Верхній індекс [0] для нульової ітерації тут і надалі не записуємо.

**Розв'язок задачі у нульовому наближенні.** Розв'язком рівняння (9) є суперпозиція плоских хвиль, відбитих поверхнями  $x_2 = 0$  та  $x_2 = h$ :

$$\dot{W}(x_1, x_2) = \dot{W}_I(x_1) \exp(iK(x_1)x_2) + \dot{W}_R(x_1) \exp(-iK(x_1)x_2), \quad (10)$$

де  $K(x_1) = \omega/\bar{C}(x_1)$ ,  $\bar{C}(x_1) = C\sqrt{1 + \bar{\mu}_2(x_1)}$ .

Підпорядковуючи розв'язки (10) умовам (5), отримаємо крайові умови для рівняння (9):

$$\begin{aligned} s^{(1)}(x_1) \dot{W}_I(x_1) + \delta^{(1)}(x_1) \dot{W}_R(x_1) &= 2Z^{(1)} \dot{W}_I^{(1)}, \\ \delta^{(2)}(x_1) \dot{W}_I(x_1) \exp(2iK(x_1)h) - s^{(2)}(x_1) \dot{W}_R(x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $Z^{(1)} = \rho^{(1)}C^{(1)}$ ,  $\bar{Z}(x_1) = \rho\bar{C}(x_1)$ ,  $Z^{(2)} = \rho^{(2)}C^{(2)}$  – акустичні опори середовищ  $\mathcal{S}^{(1)}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}^{(2)}$  відповідно:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}(x_1) &= Z^{(1)} - \bar{Z}(x_1), \quad \delta^{(2)}(x_1) = \bar{Z}(x_1) - Z^{(2)}; \\ s^{(1)}(x_1) &= Z^{(1)} + \bar{Z}(x_1); \quad s^{(2)}(x_1) = \bar{Z}(x_1) + Z^{(2)}. \end{aligned}$$

Із системи рівнянь (11) визначимо амплітуди хвильового поля  $\dot{W}_I(x_1)$  та  $\dot{W}_R(x_1)$  у шарі  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \dot{W}_I(x_1) &= \frac{2Z^{(1)}s^{(2)}(x_1) \dot{W}_I^{(1)}}{\delta^{(1)}(x_1)\delta^{(2)}(x_1) \exp(2iK(x_1)h) + s^{(1)}(x_1)s^{(2)}(x_1)}, \\ \dot{W}_R(x_1) &= \frac{2Z^{(1)}\delta^{(2)}(x_1) \exp(2iK(x_1)h) \dot{W}_I^{(1)}}{\delta^{(1)}(x_1)\delta^{(2)}(x_1) \exp(2iK(x_1)h) + s^{(1)}(x_1)s^{(2)}(x_1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Із першої та третьої умов системи (5) отримаємо вирази для амплітуд відбитої  $\dot{W}_R^{(1)}$  та заломленої  $\dot{W}_I^{(2)}$  шаром хвиль:

$$\dot{W}_R^{(1)}(x_1) = \dot{W}(x_1, 0) - \dot{W}_I^{(1)}, \quad \dot{W}_I^{(2)}(x_1) = \dot{W}(x_1, h) \exp(-iK^{(2)}h). \quad (13)$$

Звідси визначимо коефіцієнти відбивання  $A_R(x_1) = \dot{W}_R^{(1)}(x_1)/\dot{W}_I^{(1)}$  та проходження  $\dot{A}_T(x_1) = \dot{W}_I^{(2)}(x_1)/\dot{W}_I^{(1)}$  хвилі крізь шар:

$$\begin{aligned} \dot{A}_R(x_1) &= \frac{s^{(1)}(x_1)\delta^{(2)}(x_1)\exp(2iK(x_1)h) + \delta^{(1)}(x_1)s^{(2)}(x_1)}{\delta^{(1)}(x_1)\delta^{(2)}(x_1)\exp(2iK(x_1)h) + s^{(1)}(x_1)s^{(2)}(x_1)}, \\ \dot{A}_T(x_1) &= \frac{4Z^{(1)}\bar{Z}(x_1)\exp(i(K(x_1) - K^{(2)})h)}{\delta^{(1)}(x_1)\delta^{(2)}(x_1)\exp(2iK(x_1)h) + s^{(1)}(x_1)s^{(2)}(x_1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Енергетичні коефіцієнти відбивання  $R(x_1)$  та проходження  $T(x_1)$  матимуть вигляд [3]

$$R(x_1) = \frac{\Omega^{(1)}(x_1)\Omega^{(2)}(x_1) - 4Z^{(1)}\bar{Z}(x_1)^2 Z^{(2)} + \Gamma^{(1)}(x_1)\Gamma^{(2)}(x_1)\cos(2K(x_1)h)}{\Omega^{(1)}(x_1)\Omega^{(2)}(x_1) + 4Z^{(1)}\bar{Z}(x_1)^2 Z^{(2)} + \Gamma^{(1)}(x_1)\Gamma^{(2)}(x_1)\cos(2K(x_1)h)},$$

$$T(x_1) = \frac{8Z^{(1)}\bar{Z}(x_1)^2 Z^{(2)}}{\Omega^{(1)}(x_1)\Omega^{(2)}(x_1) + 4Z^{(1)}\bar{Z}(x_1)^2 Z^{(2)} + \Gamma^{(1)}(x_1)\Gamma^{(2)}(x_1)\cos(2K(x_1)h)},$$

$$\text{де} \quad \Gamma^{(1)}(x_1) = \delta^{(1)}(x_1)s^{(1)}(x_1), \quad \Gamma^{(2)}(x_1) = \delta^{(2)}(x_1)s^{(2)}(x_1),$$

$$\Omega^{(1)}(x_1) = (s^{(1)}(x_1))^2 - 2\bar{Z}(x_1)Z^{(1)}, \quad \Omega^{(2)}(x_1) = (s^{(2)}(x_1))^2 - 2\bar{Z}(x_1)Z^{(2)}.$$

**Визначення хвильового поля на першій ітерації.** Розв'язок рівняння (8) на першій ітерації шукатимемо у вигляді

$$\dot{W}^{[1]}(x_1, x_2) = \dot{W}(x_1, x_2) + \square \dot{W}(x_1, x_2), \quad (15)$$

де ітераційна поправка  $\square \dot{W}(x_1, x_2)$  задовольняє неоднорідне диференціальне рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k^2 \right) \square \dot{W}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (16)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{-1}{1 + \bar{\mu}_2(x_1)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \bar{\mu}_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} [1 + \mu_1(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + D \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) \right] \dot{W}(x_1, x_2).$$

Крайові умови (5) із урахуванням (11) для (16) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \left[ \left( \tilde{\mu}^{(1)}K^{(1)} - i\bar{B} \right) \square \dot{W}(x_1, x_2) \right]_{x_2=0} &= iD\varepsilon_{12}(x_1, 0) \dot{W}'(x_1, 0) + \\ &+ K(x_1)\bar{\mu}_2(x_1, 0) [\dot{W}_R(x_1) - \dot{W}_I(x_1)], \\ \left[ \left( \tilde{\mu}^{(2)}K^{(2)} + i\bar{B} \right) \square \dot{W}(x_1, x_2) \right]_{x_2=h} &= -iD\varepsilon_{12}(x_1, h) \dot{W}'(x_1, h) + \\ &+ K(x_1)\bar{\mu}_2(x_1, h) [\dot{W}_I(x_1)u_I(x_1, h) - \dot{W}_R(x_1)u_R(x_1, h)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут введено позначення:

$$u_I(x_1, x_2) = \exp(iK(x_1)x_2), \quad u_R(x_1, x_2) = \exp(-iK(x_1)x_2).$$

Задачу (16), (17) редукуємо до задачі з однорідними крайовими умовами шляхом вибору функції  $H(x_1, x_2)$ , що задовольняє неоднорідні умови (17) та має вигляд

$$H(x_1, x_2) = D_I(x_1)u_I(x_1, x_2) + D_R(x_1)u_R(x_1, x_2) + F(x_1). \quad (18)$$

Підставимо подання (18) у крайові умови (17). У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} D_I(x_1) &= [R_{22}(x_1)F_I(x_1) - R_{12}(x_1)F_R(x_1)]/G(x_1), \\ D_R(x_1) &= [-R_{21}(x_1)F_I(x_1) + R_{11}(x_1)F_R(x_1)]/G(x_1), \\ F(x_1) &= -[\dot{W}_I(x_1) + D_I(x_1)]u_I(x_1, h) - [\dot{W}_R(x_1) + D_R(x_1)]u_R(x_1, h). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} G(x_1) &= 4iK(x_1)\{\mu + \mu_2(x_1, h)\} \sin(u(x_1)/2) \left[ \frac{K(x_1)\sigma(x_1, 0) \cos(u(x_1)/2)}{-i\mu^{(1)}K^{(1)} \sin(u(x_1)/2)} - \right], \\ F_R(x_1) &= -\mu^{(2)}K^{(2)}\dot{W}(x_1, h) - K(x_1)\tilde{\mu}_2(x_1, h)[\dot{W}_I(x_1)u_I(x_1, h) - \dot{W}_R(x_1)u_R(x_1, h)], \\ F_I(x_1) &= \mu^{(1)}K^{(1)}\dot{W}(x_1, h) + K(x_1)\tilde{\mu}_2(x_1, 0)[\dot{W}_I(x_1) - \dot{W}_R(x_1)], \\ R_{11}(x_1) &= K(x_1)\{\mu + \mu_2(x_1, 0)\} - 2i\mu^{(1)}K^{(1)} \sin(u(x_1)/2)\sqrt{u_I(x_1, h)}, \\ R_{12}(x_1) &= -K(x_1)\{\mu + \mu_2(x_1, 0)\} + 2i\mu^{(1)}K^{(1)} \sin(u(x_1)/2)\sqrt{u_R(x_1, h)}, \\ R_{21}(x_1) &= K(x_1)\{\mu + \mu_2(x_1, h)\}u_I(x_1, h), \\ R_{22}(x_1) &= -K(x_1)\{\mu + \mu_2(x_1, h)\}u_R(x_1, h), \quad u(x_1) = \arg(u_I(x_1, h)). \end{aligned}$$

Системою фундаментальних розв'язків однорідного рівняння (16) є функції  $u_I(x_1, x_2)$  та  $u_R(x_1, x_2)$ . Тоді із урахуванням (18) розв'язок крайової задачі (16), (17) подамо у вигляді

$$\square \dot{W}(x_1, x_2) = u_I(x_1, x_2)\square \dot{W}_I(x_1, x_2) + u_R(x_1, x_2)\square \dot{W}_R(x_1, x_2) + H(x_1, x_2), \quad (19)$$

де функції  $\square \dot{W}_I(x_1, x_2)$  та  $\square \dot{W}_R(x_1, x_2)$  визначатимемо як [2]

$$\begin{aligned} \square \dot{W}_I(x_1, x_2) &= \frac{i}{2k} \int_0^{x_2} g(x_1, y) u_R(x_1, y) dy, \\ \square \dot{W}_R(x_1, x_2) &= \frac{i}{2k} \int_{x_2}^h g(x_1, y) u_I(x_1, y) dy. \end{aligned}$$

Тут  $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - k^2 F(x_1)$ .

Отриманий на першій ітерації розв'язок (19) є функцією компонент тензора початкової деформації, що дає можливість оцінити вплив неоднорідності поля початкових деформацій на параметри відбивання та проходження хвилі.

Із використанням (19) отримаємо такі вирази поправок відбитої у середовище  $S^{(1)}$  та заломленої у  $S^{(2)}$  хвиль:

$$\square \dot{W}_R^{(1)}(x_1) = \square \dot{W}(x_1, 0), \quad \square \dot{W}_I^{(2)}(x_1) = \square \dot{W}(x_1, h) \exp(-iK^{(2)}h). \quad (20)$$

**Приклад.** Розглянемо взаємодію SH-хвилі із шаром, компоненти деформації якого визначають формули:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) &= \frac{q}{4Ec^3} (x_2^3(2+\nu) - 3x_2(x_1^2 + \nu c^2) - 2\nu c^3), \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2) &= \frac{-q}{4E} (x_2^3(2\nu+1) - 3x_2(\nu x_1^2 + c^2) + 2c^3), \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) &= \frac{3q}{8\mu} (x_2^2 - c^2) x_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут  $q$  – дійсна стала,  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу шару.

Пружні властивості середовищ та шару є однакові  $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho = 1.16 \cdot 10^3$  [кг/м<sup>3</sup>],  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu = 1.862 \cdot 10^9$  [Н/м<sup>2</sup>].

Для деформованого стану (21) характерно те, що середньоінтегральні значення компонент деформації не залежать від координати  $x_1$ . Тому коефіцієнти відбивання та проходження, отримані у нульовому наближенні, також незалежні від неї. Однак уже в першому наближенні така залежність проявляється.

Вплив градієнтності поля початкових деформацій на параметри відбивання та проходження хвилі ілюструють рис. 1–6.

На рис. 1–4 зображено залежності модулів  $|\Delta \dot{W}_R^{(1)}(x_1)|$  і  $|\Delta \dot{W}_I^{(2)}(x_1)|$  та фаз  $\delta^{(1)}(x_1)$  і  $\delta^{(2)}(x_1)$  першого ітераційного уточнення для амплітуд відбитої і заломленої хвиль. На рис. 5 та 6 наведено координатні залежності коефіцієнтів відбивання  $R(x_1)$  та заломлення  $T(x_1)$  за енергією. Криві 1–3 на всіх рисунках відповідають різним значенням зовнішнього навантаження  $P$  шару: 1 –  $P = q$ ; 2 –  $2q$ ; 3 –  $0.5q$ .

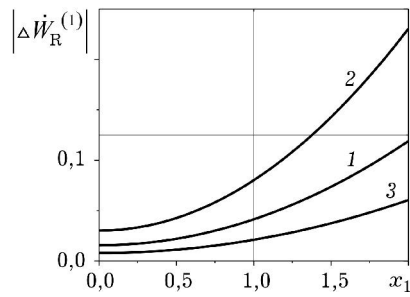


Рис. 1.

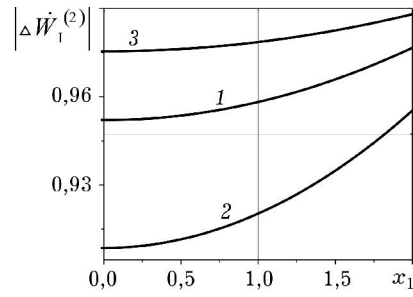


Рис. 2.

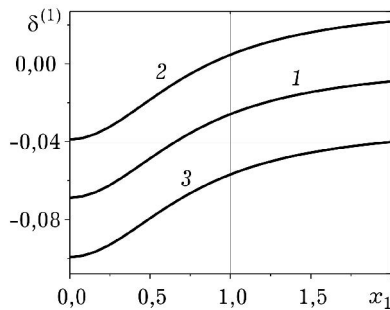


Рис. 3.

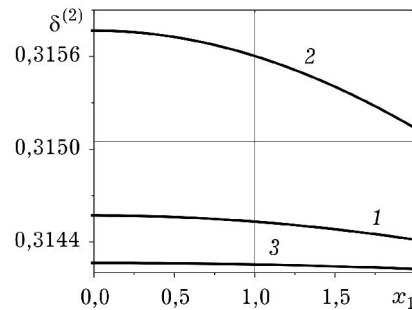


Рис. 4.

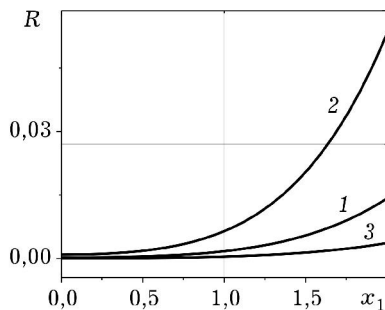


Рис. 5.

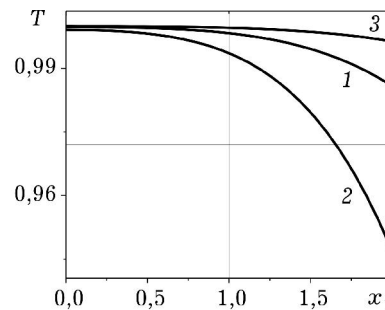


Рис. 6.

**Висновки.** Отримано аналітичний розв'язок крайової задачі, що описує взаємодію пружної SH-хвилі із шаром, який перебуває у напружено-деформованому стані плоскої деформації. На цій основі встановлено співвідношення, які визначають амплітудні, енергетичні та фазові характеристики відбитої й заломленої хвиль залежно від розподілів компонент початкової деформації у шарі. Отримані співвідношення можна використати для розроблення методів неруйнівного визначення параметрів напружено-деформованого стану об'єктів із використанням ультразвукових методів

1. Алешин Н. П., Белый В. Е., Вopilкин А. Х. и др. Методы акустического контроля металлов. – М.: Машиностроение, 1989. – 456 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Основы акустики. – К.: Наук. думка, 2007. – 640 с.
4. Кунець Я. І., Матус В. В., Міщенко В. О., Рабош Р. В. Розсіяння імпульсів SH-хвиль тонким прямолінійним п'єзоелектричним включенням малої жорсткості у пружному середовищі // Прикл. проблеми механіки і математики – 2013. – Вип. 11. – С. 129–134.
5. Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. – Львів: СПОЛОМ", 2008. – 152 с.
6. Sharma M. D. Effect of initial stress on reflection at the free surface of anisotropic elastic medium // J. of Earth System Sc. –2007. – **116**, N 6. – P. 537–551.

#### **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ SH-ВОЛНЫ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ С НЕОДНОРОДНО ДЕФОРМИРОВАННЫМ ПЛОСКИМ СЛОЕМ**

*В рамках теории распространения малых упругих возмущений в неоднородно деформированном упругом континууме сформулирована задача о взаимодействии гармонической плоской SH-волны нормального падения с упругим слоем, пребывающим в состоянии плоской деформации. С использованием итерационного метода получено ее аналитическое решение.*

#### **INTERACTION OF HARMONIC ELASTIC SH-WAVE NORMAL INCIDENCE WITH INHOMOGENEOUSLY DEFORMED PLANAR LAYER**

*The problem for interaction of normally incident elastic SH-wave with an elastic layer being in a state of plane strain has been formulated within the theory of propagation of small elastic disturbances in inhomogeneously strained continuum and its analytical solution was obtained with the use of the iterative method.*