

ОПТИМІЗАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ У ЗАДАНОМУ ПЕРЕРІЗІ ПІВПРСТОРУ, ЩО ПЕРЕБУВАЄ У СТАНІ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Побудовано розв'язок задачі оптимального керування розподілом однієї з компонент тензора напружень у заданому перерізі півпростору, що перебуває у стані плоскої деформації. За функцію керування вибрано потужність внутрішніх теплових джерел, зосереджених у площині, паралельній до межової поверхні. У припущенні існування керування, яке забезпечує точну нижню грань рівномірного відхилення керованого розподілу напружень від заданого, задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності. Побудовано та проаналізовано розв'язок отриманої оберненої задачі.

Вступ. Елементи конструкцій сучасної техніки під час виготовлення та експлуатації часто зазнають впливу високотемпературного доквілля за одночасної дії силового навантаження. Надійність роботи теплонавантажених деталей та вузлів технологічного обладнання істотно залежить, зокрема, і від їх теплового та напружено-деформованого станів, оскільки перевищення температурою, напруженнями чи переміщеннями допустимого значення може призвести до погіршення або втрати їх міцнісних чи функціональних властивостей, або виходу з ладу всієї конструкції [12]. З огляду на це важливе теоретичне і практичне значення мають задачі керування напружено-деформованим станом тіла.

Дослідженню задач оптимізації температурних режимів та напружено-деформованого стану тіл, які перебувають під дією теплових та силових навантажень, присвячені монографії [2, 4, 7, 9]. У праці [7] за допомогою методів варіаційного числення на основі мінімізації функціонала енергії пружної деформації побудовано розв'язки задач оптимізації термонапруженого стану пластин і оболонок. У монографіях [2, 4] сформульовано та досліджено задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням пружних, в'язко-пружних та пружно-пластичних тіл на основі зведення їх до обернених задач термомеханіки.

У працях [8, 14] наведена методика розв'язання задач керування залишковими напруженнями за допомогою температурного поля, а також сформульовано необхідні та достатні умови на температурне поле, яке створює у тілі задані напруження.

Досліджено [10, 11, 13] задачі керування стаціонарними температурними напруженнями ізотропного шару, ідеально спряженого з одним або декількома п'єзоелектричними керамічними шарами. За функцію керування вибрано значення електричного потенціалу, який індукують у п'єзоелектричному керамічному шарі.

У працях [2, 3] розглянуто постави та методи розв'язування задач керування осесиметричними температурними переміщеннями та напруженнями тіл канонічної форми за допомогою внутрішніх джерел тепла. За критерій оптимальності вибрано мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу переміщень чи напружень від заданого.

Нижче сформульовано та досліджено задачу оптимального керування за допомогою внутрішніх теплових джерел розподілом нестационарних температурних напружень у заданому перерізі півпростору, паралельному до межової поверхні.

Формулювання задачі оптимізації. Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний однорідний півпростір, віднесений до прямокутної декартової системи координат. Вважатимемо, що півпростір

за сталої початкової температури $T_0 = \text{const}$ перебуває у ненапруженому стані, його температура змінюється лише за просторовими координатами x_* і y_* і у ньому реалізується плоский деформований стан. Тоді безрозмірне нестационарне температурне поле півпростору $T(x, y, \tau)$ за наявності у ньому внутрішніх теплових джерел та умови конвективного теплообміну за законом Ньютона з довкіллям описують рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \Delta T(x, y, \tau) + Q(x, y, \tau), \quad x \in [0, \infty), \quad y \in (-\infty, \infty), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} - H[T(0, y, \tau) - t(y, \tau)] = 0, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $T(x, y, \tau) = (T_*(x, y, \tau) - T_0)/T_0$, T_* – температурне поле півпростору, $x = x_*/R$, $y = y_*/R$ – безрозмірні декартові координати, $\tau = a\tau_*/R^2$ – безрозмірний час, τ_* – час, a – коефіцієнт температуропровідності, R – деяка характерна довжина, $Q(x, y, \tau) = Q_*(x, y, \tau)R^2/\lambda T_0$ – безрозмірна потужність внутрішніх теплових джерел, $Q_*(x, y, \tau)$ – потужність внутрішніх теплових джерел, λ – коефіцієнт теплопровідності, $H = \alpha R/\lambda$ – безрозмірний коефіцієнт теплообміну, α – коефіцієнт теплообміну, $t(y, \tau) = (t_*(y, \tau) - T_0)/T_0$ – безрозмірна температура довкілля, $t_*(y, \tau)$ – температура довкілля.

Задачу термомпружності для півпростору, яка відповідає температурно-умові полю $T(x, y, \tau)$, опишемо системою диференціальних рівнянь [6]

$$\begin{aligned} (1-\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-2\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} &= \alpha_T (1+\nu) \frac{\partial T}{\partial x}, \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1-2\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} &= \alpha_T (1+\nu) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad u_z = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

за умов

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma_{xy}|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

де u_x, u_y, u_z – компоненти вектора переміщень, σ_{xx}, σ_{xy} – компоненти тензора напружень, ν – коефіцієнт Пуассона, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Припустимо, що теплові джерела $Q(x, y, \tau)$ зосереджені у деякій площині півпростору $x = x_0$ ($x_0 \geq 0$, $x_0 = \text{const}$), паралельній до межової поверхні, тобто $Q(x, y, \tau) = u(y, \tau)\delta(x - x_0)$ і їх безрозмірною потужністю $u(y, \tau)$ можна керувати. Тут $u(y, \tau) = u_*(y, \tau)R^2/\lambda T_0$, $u_*(y, \tau)$ – потужність теплових джерел.

Задача керування полягає у відшуванні такої функції $u(y, \tau)$, яка у кожен момент часу забезпечуватиме мінімум рівномірного відхилення керованого розподілу сумарних температурних напружень

$\sigma(x, y, \tau) = \sigma_{xx}(x, y, \tau) + \sigma_{yy}(x, y, \tau)$ у заданому перерізі півпростору $x = x_1$ ($x_1 \geq 0, x_1 = \text{const}$) від заданого $\varphi_*(y, \tau)$, тобто забезпечуватиме мінімум функціонала

$$J(u) = \max_{y \in [0, \infty)} |\sigma(x_1, y, \tau; u) - \varphi_*(y, \tau)|, \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad y \in (-\infty, \infty), \quad (6)$$

де $\tau_m = \text{const}$.

Не зменшуючи загальності приймемо, що температурне поле $T(x, y, \tau)$ є парною функцією координати y . Можна показати [2], що компоненти тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ пов'язані із величиною σ співвідношеннями [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s \sigma(\eta, \xi, \tau) \left[e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] \times \\ &\quad \times \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{xy}(x, y, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s \sigma(\eta, \xi, \tau) \left[e^{-s(x+\eta)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-s|x-\eta|} \operatorname{sign}(x-\eta) \right] \cos(s\xi) \sin(sy) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy}(x, y, \tau) &= \sigma - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s \sigma(\eta, \xi, \tau) \left[e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] \times \\ &\quad \times \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Тому, керуючи сумарними напруженнями σ , можна опосередковано керувати також кожною з компонент $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$. Зокрема, з наведених формул (7) випливає, що керування, яке забезпечує нульовий розподіл сумарних напружень $\sigma(x_1, y, \tau) \equiv 0$ у площині $x = x_1$, забезпечує нульовий розподіл кожної з компонент $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ у цій площині.

Побудова розв'язку задачі. Припустимо, що існує таке керування, яке забезпечує точну нижню грань функціонала (6), що еквівалентно рівності [2, 3]

$$\sigma(x_1, y, \tau; u) = \varphi_*(y, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad y \in [0, \infty). \quad (8)$$

Використавши відомі методи інтегрування диференціальних рівнянь (4) за умов (5) [6], подамо розв'язок задачі термопружності для півпростору у вигляді інтегральних залежностей компонент тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ від неявно заданого температурного поля:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, \tau) &= -\frac{\alpha_T E}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s T(\eta, \xi, \tau) \left[(1+2sx)e^{-s(x+\eta)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-s|x-\eta|} \right] \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy}(x, y, \tau) &= -\frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \left(-2T(x, y, \tau) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s T(\eta, \xi, \tau) \left[(3-2sx) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta \right), \\ \sigma_{xy}(x, y, \tau) &= -\frac{\alpha_T E}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s T(\eta, \xi, \tau) \left[(1-2sx)e^{-s(x+\eta)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ e^{-s|x-\eta|} \operatorname{sign}(x-\eta) \cos(s\xi) \sin(sy) ds d\xi d\eta, \quad (9)$$

де E – модуль Юнга.

За допомогою формул (9) сумарні температурні напруження $\sigma(x, y, \tau)$ виразимо через температурне поле так:

$$\sigma(x, y, \tau) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left(-T(x, y, \tau) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s T(\eta, \xi, \tau) e^{-s(x+\eta)} \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta \right). \quad (10)$$

Скориставшись інтегральними перетвореннями Фур'є і Лапласа [1], запишемо розв'язок задачі теплопровідності (1)–(3)

$$\begin{aligned} T(x, y, \tau) = & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau t(\xi, \theta) G_1(\eta, y, s, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau u(\xi, \theta) G_2(\eta, y, s, x_0, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\eta, y, s, \xi, \tau - \theta) = & \frac{2H}{\pi} \left[\frac{e^{-s^2(\tau-\theta)}}{\sqrt{\pi(\tau-\theta)}} e^{-\frac{\eta^2}{4(\tau-\theta)}} - He^{\eta H + (H^2 - s^2)(\tau-\theta)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right) \right] \times \\ & \times \cos(sy) \cos(s\xi), \\ G_2(\eta, y, s, x_0, \xi, \tau - \theta) = & \frac{2}{\pi} \left[He^{(x_0+\eta)H + H^2\tau - (H^2 + s^2)\theta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta + x_0 + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{e^{-s^2(\tau-\theta)}}{2\sqrt{\pi(\tau-\theta)}} \left(e^{-\frac{(\eta+x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} + e^{-\frac{(\eta-x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} \right) \right] \cos(sy) \cos(s\xi). \end{aligned}$$

Підставивши температурне поле (11) у вираз для сумарних напружень (10) і використавши умову (8), отримаємо інтегральне рівняння першого роду на шукану функцію $u(y, \tau)$:

$$\int_0^\infty \int_0^\tau K(y, x_0, x_1, \xi, \tau - \theta) u(\xi, \theta) d\theta d\xi = \Phi(y, \tau), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} K(y, x_0, x_1, \xi, \tau - \theta) = & \int_0^\infty A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) \cos(s\xi) \cos(sy) ds, \\ A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) = & - \frac{e^{-s^2(\tau-\theta)}}{2\sqrt{\pi(\tau-\theta)}} \left(e^{-\frac{(x_1+x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} + e^{-\frac{(x_1-x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} \right) + \\ & + He^{(x_1+x_0)H + (H^2 - s^2)(\tau-\theta)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_1 + x_0 + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right) - \\ & - \frac{H+s}{H-s} s e^{s(x_0-x_1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2s(\tau-\theta) + x_0}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right) + \\ & + \frac{2sH}{H-s} e^{x_0H - sx_1 + (H^2 - s^2)(\tau-\theta)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_0 + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right) + s e^{-s(x_0+x_1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2s(\tau-\theta) - x_0}{2\sqrt{\tau-\theta}} \right), \\ \Phi(y, \tau) = & \varphi(y, \tau) - \int_0^\infty \int_0^\tau \int_0^\tau t(\xi, \theta) K_1(s, x_1, \tau - \theta) \cos(s\xi) \cos(sy) d\theta d\xi ds, \end{aligned}$$

$$K_1(s, x_1, \tau - \theta) = H^2 e^{x_1 H + (H^2 - s^2)(\tau - \theta)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 + 2H(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) - \frac{2sH}{H - s} e^{-sx_1} \left[s \operatorname{erfc}(s\sqrt{\tau - \theta}) - H \operatorname{erfc}(H\sqrt{\tau - \theta}) \right] - \frac{H}{\sqrt{\pi(\tau - \theta)}} e^{-s^2(\tau - \theta) - \frac{x_1^2}{4(\tau - \theta)}},$$

$\varphi(y, \tau) = (1 - \nu) \varphi_*(y, \tau) / \alpha_T E$, $\operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erfc}(x)$ – інтеграли ймовірностей [1].

Отже, вихідна задача оптимізації (6) зведена до оберненої задачі термопружності [2,7], яку описує рівняння (12) і яка полягає у визначенні потужності внутрішніх теплових джерел, розміщених у площині $x = x_0$, за заданим у площині $x = x_1$ розподілом сумарних температурних напружень. Перейдемо до розв'язування рівняння (12). Застосувавши до нього за координатою y інтегральне перетворення Фур'є, у просторі зображень отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра першого роду типу згортки за змінною τ для відшукування зображення за Фур'є шуканого керування:

$$\int_0^\tau A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) u_F(s, \theta) d\theta = \Phi_F(s, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]. \quad (13)$$

Тут

$$\Phi_F(s, \tau) = \varphi_F(s, \tau) - \int_0^\tau q_F(s, \theta) K_1(s, x_1, \tau - \theta) d\theta,$$

$\Phi_F(s, \tau)$, $\varphi_F(s, \tau)$, $q_F(s, \theta)$, $u_F(s, \theta)$ – зображення за Фур'є [1] відповідно функцій $\Phi(s, \tau)$, $\varphi(y, \tau)$, $q(y, \theta)$ і $u(y, \theta)$:

$$u_F(s, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(y, \theta) \cos(sy) dy,$$

$s \in [0, \infty)$ – параметр перетворення Фур'є.

Аналіз ядра інтегрального рівняння (13) свідчить, що воно на розглядуваному проміжку $[0, \tau_m]$ є обмеженим і $A(s, x_0, x_1, 0) \neq 0$. Це дає можливість звести його до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду:

$$u_F(s, \tau) + \int_0^\tau \frac{A_1(s, x_0, x_1, \tau - \theta)}{A(s, x_0, x_1, 0)} u_F(s, \theta) d\theta = \frac{M_F(s, \tau)}{A(s, x_0, x_1, 0)}, \quad (14)$$

де $M_F(s, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_F(s, \tau)$, $A_1(s, x_0, x_1, \tau - \theta) = \frac{\partial}{\partial \tau} A(s, x_0, x_1, \tau - \theta)$.

Побудуємо наближений розв'язок рівняння (14). Для цього скористаємось лінійною сплайн-апроксимацією функції $u_F(s, \tau)$ за часовою змінною τ [5]. Розіб'ємо часовий інтервал $[0, \tau_m]$ на m інтервалів довжиною $h = \tau_m / m$ і на кожному з них подамо функцію $u_F(s, \tau)$ у вигляді

$$u_F(s, \tau) = u_F^{(i-1)}(s) \frac{\tau_i - \tau}{h} + u_F^{(i)}(s) \frac{\tau - \tau_{i-1}}{h}, \quad (s, \tau) \in [0, \infty) \times [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad (15)$$

де $\tau_i = hi$, $u_F^{(i)}(s) = u_F(s, \tau_i)$. Підставивши подання (15) у рівняння (14), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$u_F^{(1)}(s) = \frac{h\Psi_F^{(1)}(s)}{B_1 + h},$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \Theta_{ki} u_F^{(i)}(s) + u_F^{(k)}(s) = \frac{h\Psi_F^{(k)}(s)}{B_k + h}, \quad k = 2, \dots, m, \quad (16)$$

яка апроксимує інтегральне рівняння (14). Тут

$$\begin{aligned}\Psi_F^{(k)}(s) &= M_F(s, \tau_k) / A(s, x_0, x_1, 0), \\ \Theta_{ki} &\equiv a_{k-i} = (A_{i+1} + B_i) / (B_k + h), \\ A_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [\tau_i - \theta] A_1(s, x_0, x_1, \tau_k - \theta) / A(s, x_0, x_1, 0) d\theta, \\ B_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [\theta - \tau_{i-1}] A_1(s, x_0, x_1, \tau_k - \theta) / A(s, x_0, x_1, 0) d\theta.\end{aligned}$$

Вигляд системи (16) дає змогу безпосередньо записати рекурентну формулу для визначення невідомих $u_F^{(i)}(s)$, $1 \leq i \leq m$. Матриця системи (16) є нижньою трикутною з подіагонально рівними елементами:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{i+1} < a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Знаючи $u_F^{(i)}(s)$, $1 \leq i \leq m$, за формулою обернення для інтегрального перетворення Фур'є [7]

$$u^{(i)}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u_F^{(i)}(s) \cos(sy) ds, \quad 0 \leq i \leq m, \quad (17)$$

числово знаходимо розв'язок задачі оптимізації у дискретні моменти часу τ_i .

Числова апробація методик. Для прикладу дослідимо поведінку керування, яке забезпечує нульові сумарні напруження межевої поверхні півпростору, що нагрівається тепловим потоком за законом

$$q(y, \tau) = q_0 \exp(-\beta^2 R^2 y^2) (1 - \exp(-c_0 \tau)), \quad (18)$$

де $\beta^2, q_0, c_0 = \text{const}$.

Розподіл безрозмірного теплового потоку $q(y, \tau)/q_0$ за координатою y , розрахований за формулою (18) для значень параметрів $\beta^2 R^2 = 9$, $c_0 = 10$ в моменти часу $\tau = 0.1; 0.3; 0.5$, зображено на рис. 1 кривими 1–3. Криві 1–4 на рис. 2 відтворюють поведінку за координатою y безрозмірного керування $\tilde{u}(y, \tau) = -\beta R u(y, \tau) / \sqrt{\pi} q_0$, відповідно для значень параметра $x_0 = 0; 0.1; 0.3; 0.5$ при $\beta^2 R^2 = 9$, $c_0 = 10$ у момент часу $\tau = 0.1$. Як бачимо, при $x_0 = 0$ знайдене керування збігається з розподілом теплового потоку $q(y, \tau)/q_0$ при $\tau = 0.1$, що отримуємо також безпосередньо із формул (16), (17), поклавши $x_0 = 0$. Зі збільшенням значення координати x_0 у знайденому керуванні з'являється коливний характер, амплітуда і частота якого зростають. Аналогічна поведінка і знайденого керування за координатою y і зі зростанням параметра $\beta^2 R^2$ за сталого x_0 (рис. 3). Криві 1–5 тут відповідають значенням $\beta^2 R^2 = 1; 9; 16; 25; 36$, $x_0 = 0.3$ і $\tau = 0.1$. Отже, забезпечити нульові сумарні напруження межевої поверхні півпростору без додаткового підігріву можна лише за близького розташування стоків тепла від межевої поверхні.

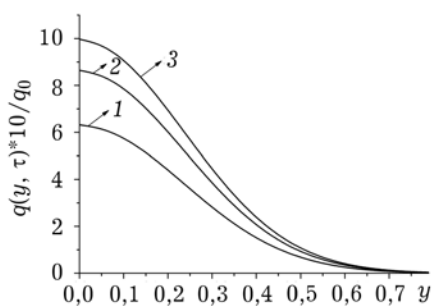


Рис. 1.

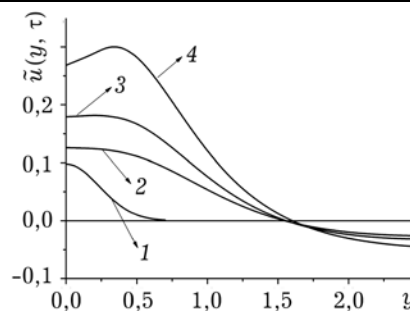


Рис. 2.

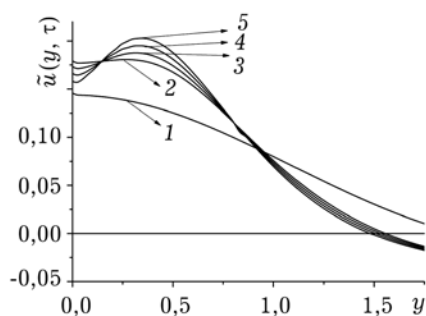


Рис. 3.

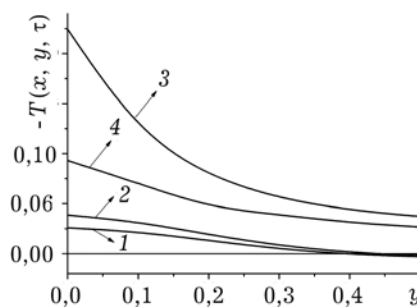


Рис. 4.

Розподіл безрозмірної температури півпростору $T(x, y, \tau)$ за координатою y при $x_0 = 0.3$ і $\tau = 0.1$ для значень координати $x = 0; 0.1; 0.3; 0.4$ описують відповідно криві 1–4 на рис. 4. Як бачимо, температурне поле $T(x, y, \tau)$ досягає мінімального від'ємного значення за координатою x при $x = x_0$ і прямує до нуля, коли x безмежно зростає.

Висновки. Сформульовано задачу оптимального керування розподілом однієї з компонент тензора напружень у заданому перерізі півпростору, паралельному до межової поверхні. За критерій оптимальності вибрано мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу сумарних напружень від заданого, а за функцію керування – потужність внутрішніх теплових джерел. На основі припущення про існування точної нижньої грані критерію оптимальності сформульована задача оптимізації зведена до оберненої задачі термопружності, яку описує двовимірне інтегральне рівняння першого роду. З використанням перетворення Фур'є за просторою координатою отримане інтегральне рівняння зведено до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду типу згортки для знаходження шуканого керування. Розв'язок рівняння Вольтерра побудовано наближено з допомогою лінійної сплайн-апроксимації.

За нагріву півпростору тепловим потоком досліджено поведінку знайденого оптимального керування, яке забезпечує нульовий розподіл кожної з компонент тензора напружень на межовій поверхні півпростору.

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
3. Вигак В. М., Колесов В. С., Ясинский А. В. Оптимизация термоупругих осесимметричных напряжений в заданном сечении тонкой круглой пластины с помощью источников тепла // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 8. – С. 63–70.

4. Григолюк Е. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.
5. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплаины в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
6. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вищ. шк., 1975. – 216 с.
7. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т.5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович, А. В. Ясінський – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.
8. Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусов П. В. Остаточные напряжения: теория и приложения. — М.: Наука, 1982. – 112 с.
9. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 280 с.
10. Ashida, F., Sakata S., Matsumoto K. Control of thermal stress in a piezo-composite disk // J. of Thermal Stresses. – 2007. – **30**, № 9-10. – P. 1025-1040.
11. Ashida F., Sakata S., Matsumoto K. Structure design of a piezoceramic composite disk for control of thermal stress // J. Appl. Mech. – 2008. – **75**, № 6. – P. 61009-1 – 61009-8.
12. Ding S., Li G., Luo B. Active control thermal-loading method to ameliorate stress in aeroengine turbine disk // J. of Thermophysics and Heat Transfer. – 2013. – **27**, № 2. – P. 274-285.
13. Elsavafa E., Ashida F., Sakata S. Optimum structure design of a multilayer piezo-composite disk for control of thermal stress // J. of Thermal Stresses. – 2012. – **35**, № 9. – P. 805-819.
14. Nyashin Y. I., Ilialov O. R. Optimization problem for obtaining a prescribed residual stress distribution: formulation and solution // Int. J. of Mech. Sci. – 1995. – **37**, № 5. – P. 485-493.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАНОМ СЕЧЕНИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ПРЕБЫВАЮЩЕМ В СОСТОЯНИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Построено решение задачи оптимального управления распределением одной из компонент тензора напряжений в заданном сечении полупространства, пребывающем в плоском деформируемом состоянии. В качестве функции управления выбрана мощность внутренних источников тепла, расположенных в плоскости, параллельной к граничной поверхности. В предположении существования управления, обеспечивающего точную нижнюю грань равномерного отклонения управляемого распределения напряжений от заданного, задача оптимизации сведена к обратной задаче термоупругости. Построены и проанализированы решения полученной обратной задачи.

OPTIMIZATION OF THE TRANSIENT TEMPERATURE STRESSES IN THE GIVEN SECTION OF THE HALF SPACE, WHICH IS IN A PLANE STRAIN STATE

The paper considers the statement and the solution of optimal distribution control problem of one of the components of the stress tensor in a given section of a half-space, which is in the plane-strain condition. For the power control function is selected internal heat sources, located in a plane parallel to the boundary surface. The original optimization problem is reduced to the inverse problem of thermoelasticity, in the assumption of existing of the control providing infimum uniform deviation managed stress distribution from the set. The numerical analysis of the solution's optimization problem behaviour is provided.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
15.09.14