УДК 539.3

Б. В. Процюк[1], В. М. Синюта[2]

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ КУЛІ

Запропоновано методику визначення термопружного стану, зумовленого центрально-симетричним температурним полем та поверхневими однорідними навантаженнями, у шаруватій ізотропній кулі з урахуванням залежності від температури і координати модулів пружності, коефіцієнтів лінійного розширення та Пуассона. Методика передбачає розв'язання відносно радіальних переміщень систем інтегро-алгебричних рівнянь, отриманих з інтегрального подання розв'язку задачі для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними. При цьому використано функцію Гріна задачі пружності для однорідної кулі. Числові дослідження виконано для тришарової кулі з функціонально-градієнтним шаром.

З використанням узагальнених функцій і функції Гріна у працях [8, 9] визначення термопружного стану, зумовленого центрально-симетричними температурними полями та однорідними поверхневими навантаженнями, у шаруватих ізотропних тілах зі сферичними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури і координати модулів пружності і коефіцієнтів лінійного розширення за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона зведено до розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно зведених радіальних напружень. На основі підходу [10], який передбачає також застосування узагальнених функцій і функції Гріна задачі пружності для однорідного тіла, розроблено методику визначення одновимірного термопружного стану шаруватих куль з урахуванням змінності і коефіцієнтів Пуассона. Тут приходимо до необхідності розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень.

Зауважимо, що інші методи розв'язання задач термопружності для сферичних тіл зі змінними фізико-механічними характеристиками (ФМХ) наведені раніше [1–4, 7, 12–15].

Формулювання задачі термопружності. Розглянемо пружне тіло, складене із ідеально контактуючих концентрично розташованих порожнистих ізотропних куль з різними ФМХ. Вважаємо, що обмежувальні сферичні поверхні тіла перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень σ_0, σ_n, зокрема, тіло знаходиться в температурному полі, яке описує функція

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[t_{i+1}(r) - t_i(r)\right] S(r - r_i), \tag{1}$$

де $t_p(r)$, ($p = \overline{1,n}$) – відомі розподіли температур, якщо $r_{p-1} < r < r_p$, r, r_0 і r_p – віднесені до характерного лінійного розміру l відповідно радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус p-го шарів; n – кількість шарів, $S(\zeta)$ – функція Гевісайда.

Визначимо термопружний стан тіла з урахуванням залежності ФМХ складових від температури і кординати. Для цього використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{2}$$

та співвідношення

$$\sigma_r = c(r)\frac{du}{dr} + 2\lambda(r)\frac{u}{r} - c^*(r)\Phi(r),$$

$$\sigma_{\varphi} = \lambda(r)\frac{du}{dr} + 2[\lambda(r)+\mu(r)]\frac{u}{r} - c^{*}(r)\Phi(r), \tag{3}$$

де віднесене до l радіальне переміщення $u(r)$ задовольняє рівняння з узагальненими похідними

$$\frac{d}{dr}\left[c(r)\frac{du}{dr}\right] + 2\frac{d}{dr}\left[\lambda(r)\frac{u}{r}\right] + 4\mu(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{d}{dr}[c^{*}(r)\Phi(r)] \tag{4}$$

і граничні умови

$$\sigma_r\big|_{r=r_0} = -\sigma_0, \qquad \sigma_r\big|_{r=r_n} = -\sigma_n. \tag{5}$$

Тут функції $c(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$, $\lambda(r) = \dfrac{E(t,r)\nu(t,r)}{[1+\nu(t,r)][1-2\nu(t,r)]}$, $\mu(r) = \dfrac{E(t,r)}{2[1+\nu(t,r)]}$, $c^{*}(r) = \dfrac{E(t,r)}{1-2\nu(t,r)}$ мають вигляд (1); функції $E(t,r)$, $\nu(t,r)$ і $\Phi(r)$ у межах p-го шару збігаються відповідно з модулями пружності $E_p(t_p,r)$, коефіцієнтами Пуассона $\nu_p(t_p,r)$ і $\Phi_p(r) = \int\limits_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta,r)d\zeta$; $\alpha_{tp}(t_p,r)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення p-го шару;

Інтегральне подання розв'язку. Перейдемо від диференціального формулювання задачі на визначення переміщень до її подання в інтегральній формі за допомогою отриманої як частковий випадок [5] функції Гріна

$$G(r,\rho) = \frac{1}{3c_0}\left\{\frac{r}{\rho^2}S(\rho-r) + \frac{\rho}{r^2}S(r-\rho) + \frac{\rho r}{r_n^3 - r_0^3}\left[\psi_0^{(1)}(\rho) + \frac{kr_0^3}{r^3}\psi_n^{(1)}(\rho)\right]\right\}, \tag{6}$$

яка є розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{G}{r}\right) = -\frac{1}{c_0\rho^2}\delta(r-\rho), \tag{7}$$

$$\tau_r\big|_{r=r_0} = \tau_r\big|_{r=r_n} = 0. \tag{8}$$

Тут і далі $\psi_m^{(i)}(\rho) = 1/k + (-2)^{i-1} r_m^3/\rho^3$, $i = 1,2$, $m = 0,n$; $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака, $k = 0.5(1+\nu_0)/(1-2\nu_0)$, $c_0 = \lambda_0 + 2\mu_0$; λ_0, μ_0, ν_0 – значення з інтервалу зміни $\lambda_1(r)$, $\mu_1(r)$, $\nu_1(t_1,r)$ відповідно; $\tau_r = c_0\dfrac{\partial G(r,\rho)}{\partial r} + 2\lambda_0\dfrac{G(r,\rho)}{r}$.

Домножимо (4) на $r^2 G(r,\rho)$ і проінтегруємо отримане рівняння з урахуванням (7) у межах від r_0 до r_n:

$$\frac{c(\rho)u(\rho)}{c_0} = \left\{r^2 G\sigma_r - \left[r^2\frac{\partial G}{\partial r}c(r) + 2r\lambda(r)G\right]u\right\}\Big|_{r_0}^{r_n} + \int_{r_0}^{r_n}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 G)c^{*}(r)\Phi(r)dr +$$

$$+\int_{r_0}^{r_n}\left[r^2\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{dc(r)}{dr}\right)_{кл} + 2rG\left(\frac{d\lambda(r)}{dr}\right)_{кл}\right]udr + \sum_{i=1}^{n-1}\left(K_{ci}r_i^2\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=r_i} + 2K_{\lambda i}r_i\,G\big|_{r=r_i}\right)u_i(r_i), \tag{9}$$

де $K_{ci} = c_{i+1}(r_i) - c_i(r_i)$, $K_{\lambda i} = K_{ci} - 2K_{\mu i}$, $K_{\mu i} = \mu_{i+1}(r_i) - \mu_i(r_i)$; індекс «*кл*» означає, що відповідна похідна класична.

Система інтегро-алгебричних рівнянь для визначення переміщень. Замінивши в (9) інтеграли по товщині кулі їх сумою по товщині шарів, після відповідних перетворень з урахуванням граничних умов (5) та функції Гріна (6) прийдемо до такої системи інтегро-алгебричних рівнянь відносно переміщень p-го шару $u_p(\rho)$:

$$c_p(\rho)u_p(\rho) = u_{tp}(\rho) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\rho^2}V_{cp}(\rho) + 4\rho V_{\mu p}(\rho) + \rho\frac{\beta_{up}\psi_n^{(1)}(\rho) + \beta_{up}^{*}\psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3}\right] +$$

$$+\rho U(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho)u_i(r_i) + u_y(\rho), \qquad r_{p-1} < \rho < r_p, \tag{10}$$

де

$$u_{tp}(\rho) = \frac{V_{tp}(\rho)}{\rho^2} + \rho\frac{\beta_{tp}\psi_n^{(1)}(\rho) + \beta_{tp}^{*}\psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3},\ V_{tp}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 c_p^{*}(r)\Phi_p(r)dr,$$

$$\beta_{tp} = \sum_{i=1}^{p-1} V_{ti}(r_i), \quad \beta_{tp}^{*} = \sum_{i=p}^{n} V_{ti}(r_i);$$

$$V_{cp}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 y_{1p}(r)u_p(r)dr, \quad V_{\mu p}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} \frac{1}{r} y_{2p}(r)u_p(r)dr,$$

$$y_{1p}(r) = \frac{dc_p^{*}(r)}{dr}, \quad y_{2p}(r) = \frac{d\mu_p(r)}{dr},$$

$$\beta_{up} = \sum_{i=1}^{p-1} V_{ci}(r_i) - 4kr_0^3\sum_{i=1}^{p-1} V_{\mu i}(r_i), \quad \beta_{up}^{*} = \sum_{i=p}^{n} V_{ci}(r_i) - 4kr_n^3\sum_{i=p}^{n} V_{\mu i}(r_i);$$

$$U(\rho) = \rho\frac{\gamma_0 r_0^2 u_1(r_0)\psi_n^{(1)}(\rho) - \gamma_n r_n^2 u_n(r_n)\psi_0^{(1)}(\rho)}{(1-2\nu_0)(r_n^3 - r_0^3)},$$

$$u_y(\rho) = \rho\frac{r_0^3\sigma_0\psi_n^{(1)}(\rho) - r_n^3\sigma_n\psi_0^{(1)}(\rho)}{2k_0(r_n^3 - r_0^3)},$$

$$\gamma_0 = (1-\nu_0)\lambda_1(r_0) - \nu_0 c_1(r_0), \qquad \gamma_n = (1-\nu_0)\lambda_n(r_n) - \nu_0 c_n(r_n);$$

$$k_0 = \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0},\ g_{up}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i^2\rho}{r_n^3 - r_0^3}\begin{cases} b_{ni}\psi_0^{(1)}(\rho), p \le i \\ b_{0i}\psi_n^{(1)}(\rho), p > i \end{cases},\ b_{mi} = K_{ci} - \frac{4k}{3}K_{\mu i}\psi_m^{(1)}(r_i),\ m = 0, n.$$

З огляду на структуру рівнянь (10) їх розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho), \tag{11}$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовленні температурним полем, другий – поверхневими навантаженнями σ_0, σ_n.

Підставивши (11) в (10), одержимо для знаходження кожної з функцій $u_p^s(\rho)$ $(s = t, y)$ відповідні системи рівнянь:

$$c_p(\rho)u_p^s(\rho) - \frac{V_{cp}^s(\rho)}{3\rho^2} - \frac{4\rho}{3}V_{\mu p}^s(\rho) - \rho\frac{d_{0p}^s\psi_n^{(1)}(\rho) + d_{np}^s\psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} - \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i) = u_{0p}^s(\rho), \tag{12}$$

де

$$d_{0p}^s = \beta_{up}^s\big/3 + \gamma_0 r_0^2 u_1^s(r_0)\big/(1-2\nu_0), \quad d_{np}^s = \beta_{up}^{*s}\big/3 - \gamma_n r_n^2 u_n^s(r_n)\big/(1-2\nu_0),$$

$$\beta_{up}^s = \sum_{i=1}^{p-1} V_{ci}^s(r_i) - 4kr_0^3\sum_{i=1}^{p-1} V_{\mu i}^s(r_i), \quad \beta_{up}^{*s} = \sum_{i=p}^{n} V_{ci}^s(r_i) - 4kr_n^3\tilde{\beta}_{up}^{*s}, \quad \tilde{\beta}_{up}^{*s} = \sum_{i=p}^{n} V_{\mu i}^s(r_i),$$

$$V_{cp}^s(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 y_{1p}(r)u_p^s(r)dr, \quad V_{\mu p}^s(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} \frac{1}{r} y_{2p}(r)u_p^s(r)dr,$$

$$u_{0p}^{t}(\rho) = u_{tp}(\rho),\ u_{0p}^{y}(\rho) = u_{y}(\rho). \tag{13}$$

Співвідношення для визначення деформацій і напружень. Вважаючи, що розв'язок рівнянь (12) знайдено, отримаємо співвідношення для деформацій і напружень.

Продиференціювавши (10), дістанемо з урахуванням (11), (13) вираз для радіальної деформації:

$$c_p(\rho)\varepsilon_{rp}(\rho) = \varepsilon_{rp}^{t}(\rho) + \varepsilon_{rp}^{y}(\rho), \tag{14}$$

де

$$\varepsilon_{rp}^{s}(\rho) = e_p^s(\rho) - \frac{2}{3\rho^3}V_{cp}^s(\rho) + \frac{4}{3}V_{\mu p}^s(\rho) + \frac{d_{0p}^s\psi_n^{(2)}(\rho) + d_{np}^s\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i),$$

$$e_p^t(\rho) = -\frac{2}{\rho^3}V_{tp}(\rho) + c_p^*(r)\Phi_p(r) + \frac{\beta_{tp}\psi_n^{(2)}(\rho) + \beta_{tp}^*\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3},$$

$$e_p^y(\rho) = \frac{r_0^3\sigma_0\psi_n^{(2)}(\rho) - r_n^3\sigma_n\psi_0^{(2)}(\rho)}{2k_0(r_n^3 - r_0^3)}, \quad g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i^2}{r_n^3 - r_0^3}\begin{cases} b_{ni}\psi_0^{(2)}(\rho), p \le i \\ b_{0i}\psi_n^{(2)}(\rho), p > i \end{cases}.$$

Підставляючи (10), (14) в одержані на основі (3) залежності для p-го шару, матимемо:

$$\sigma_{rp}(\rho) = \sigma_{rp}^{t}(\rho) + \sigma_{rp}^{y}(\rho), \quad \sigma_{\varphi p}(\rho) = \sigma_{\varphi p}^{t}(\rho) + \sigma_{\varphi p}^{y}(\rho), \tag{15}$$

де

$$\sigma_{rp}^{s}(\rho) = f_{rp}^{s}(\rho) - \frac{2k_{0p}(\rho)V_{cp}^s(\rho)}{3\rho^3} + \frac{4}{3}k_p^*(\rho)V_{\mu p}^s(\rho) + \frac{d_{0p}^s\psi_{rp}^{(n)}(\rho) + d_{np}^s\psi_{rp}^{(0)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{rp}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i),$$

$$\sigma_{\varphi p}^{s}(\rho) = f_{\varphi p}^{s}(\rho) + \frac{k_{0p}(\rho)V_{cp}^s(\rho)}{3\rho^3} + \frac{4}{3}k_p^*(\rho)V_{\mu p}^s(\rho) + \frac{d_{0p}^s\psi_{\varphi p}^{(n)}(\rho) + d_{np}^s\psi_{\varphi p}^{(0)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varphi p}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i),$$

$$f_{rp}^{t}(\rho) = -\frac{2k_{0p}(\rho)}{\rho^3}V_{tp}(\rho) + \frac{\beta_{tp}\psi_{rp}^{(n)}(\rho) + \beta_{tp}^*\psi_{rp}^{(0)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3},$$

$$f_{\varphi p}^{t}(\rho) = \frac{k_{0p}(\rho)}{\rho^3}V_{tp}(\rho) - k_{0p}(\rho)c_p^*(r)\Phi_p(r) + \frac{\beta_{tp}\psi_{\varphi p}^{(n)}(\rho) + \beta_{tp}^*\psi_{\varphi p}^{(0)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3},$$

$$f_{rp}^{y}(\rho) = \frac{r_0^3\sigma_0\psi_{rp}^{(n)}(\rho) - r_n^3\sigma_n\psi_{rp}^{(0)}(\rho)}{2k_0(r_n^3 - r_0^3)}, \quad f_{\varphi p}^{y}(\rho) = \frac{r_0^3\sigma_0\psi_{\varphi p}^{(n)}(\rho) - r_n^3\sigma_n\psi_{\varphi p}^{(0)}(\rho)}{2k_0(r_n^3 - r_0^3)},$$

$$k_{0p}(\rho) = \frac{1 - 2\nu_p(t_p,\rho)}{1 - \nu_p(t_p,\rho)}, \quad k_p^*(\rho) = \frac{1 + \nu_p(t_p,\rho)}{1 - \nu_p(t_p,\rho)},$$

$$g_{rp}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i^2}{r_n^3 - r_0^3}\begin{cases} b_{ni}\psi_{rp}^{(0)}(\rho), p \le i \\ b_{0i}\psi_{rp}^{(n)}(\rho), p > i \end{cases}, \quad g_{\varphi p}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i^2}{r_n^3 - r_0^3}\begin{cases} b_{ni}\psi_{\varphi p}^{(0)}(\rho), p \le i \\ b_{0i}\psi_{\varphi p}^{(n)}(\rho), p > i \end{cases};$$

$$\psi_{rp}^{(m)}(\rho) = \frac{1}{k}k_p^*(\rho) - 2k_{0p}(\rho)\frac{r_m^3}{\rho^3}, \quad \psi_{\varphi p}^{(m)}(\rho) = \frac{1}{k}k_p^*(\rho) + k_{0p}(\rho)\frac{r_m^3}{\rho^3},\ m = 0, n.$$

Зауважимо, що для одновимірних нестаціонарних температурних полів в отриманих співвідношеннях час входитиме як параметр.

Числові результати. Апробуємо запропоновану методику на прикладі статичної задачі термопружності для вільної від силових навантажень порожнистої тришарової кулі з функціонально-градієнтним середнім шаром, на внутрішній поверхні якої задано різні значення теплового потоку, а на зовнішній – температуру $t_c = 20$℃ .

Залежності ФМХ першого і третього шарів брали у вигляді

$$\lambda_t^{(1)}(T_1) = 1.1 + 0.017T_1 \ [\text{Вт/мК}], \quad E_1(T_1) = 122.2 - 0.05653T_1 \ [\text{ГПа}],$$

$$\alpha_t^{(1)}(T_1) = 7.43 \cdot 10^{-6} + 5.56 \cdot 10^{-9} T_1 - 2.69 \cdot 10^{-12} T_1^2 \text{ при } 300\text{К} \le T_1 \le 1100\text{К},$$

$$10.229 \cdot 10^{-6} \ [\text{К}^{-1}] \text{ при } 1100\text{К} \le T_1 \le 1800\text{К}, \ \nu_1(T_1) = 0.288 + 32 \cdot 10^{-6} T_1,$$

$$\lambda_t^{(3)}(T_3) = 42.31 - 0.0087T_3 [\text{Вт/мК}],$$

$$\alpha_t^{(3)}(T_3) = 10.6429 \cdot 10^{-6} + 0.00724 \cdot 10^{-6} T_3 - 3.4102 \cdot 10^{-12} T_3^2 \ [\text{К}^{-1}],$$

$$E_3(T_3) = 217.573 - 0.052T_3 - 462.71 \cdot 10^{-7} T_3^2 \ [\text{ГПа}],$$

$$\nu_3(T_3) = 0.32 + 0.3 \cdot 10^{-4} T_3 + 0.71 \cdot 10^{-7} T_3^2,$$

а другого шару визначали на основі співвідношення [11]

$$p_2(T_2, \rho) = \frac{1}{2}[p_1(T_2) - p_3(T_2)] \cos\left(\pi \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\right) + \frac{1}{2}[p_1(T_2) + p_3(T_2)].$$

Тут $p_1(T), p_3(T)$ – відповідні залежності першого і третього шарів; $\lambda_t^{(i)}(T_i)$ – коефіцієнти теплопровідності; $T_i = t_i(\rho) + 273°$.

Температури $t_i(\rho)$ знаходили зі системи інтегральних рівнянь [6]

$$t_3(\rho) = t_c + t_s r_0^2 \int_\rho^{r_3} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(3)}[t_3(\xi)]} d\xi, \ t_2(\rho) = t_3(r_2) + t_s r_0^2 \int_\rho^{r_2} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(2)}[t_2(\xi), \xi]} d\xi,$$

$$t_1(\rho) = t_2(r_1) + t_s r_0^2 \int_\rho^{r_1} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(1)}[t_1(\xi)]} d\xi, \qquad (t_s = q_0 l / \lambda_{s1}), \tag{16}$$

яку, як і системи (12) ($n = 3$), розв'язували методом послідовних наближень за $r_0 = 0.76$, $r_1 = 0.82$, $r_2 = 0.9$, $r_3 = 1$, $l = 0.05$ м.

На рис. 1–3 зображено розподіли переміщення $\tilde{u} = u/(\alpha_s t_s)$ ($\alpha_s t_s = 0.07$) і напружень $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j/(E_s \alpha_s t_s)$ ($j = r, \varphi; E_s = 60$ [ГПа]), уздовж радіальної координати. Криві *1–3* відповідають таким значенням теплового потоку і зумовлених ним температур на внутрішній і контактуючих поверхнях шарів:

1. $q_0 = 0.5 \cdot 10^6$ [Вт/м^2]; $t(r_0) = 297.71°$, $t(r_1) = 152.40°$, $t(r_2) = 60.53°$;
2. $q_0 = 1.0 \cdot 10^6$ [Вт/м^2]; $t(r_0) = 663.74°$, $t(r_1) = 377.98°$, $t(r_2) = 142.70°$;
3. $q_0 = 2.5 \cdot 10^6$ [Вт/м^2]; $t(r_0) = 1930.27°$, $t(r_1) = 1079.40°$, $t(r_2) = 426.42°$.

Штрихові лінії побудовані за залежних від температури ФМХ, а суцільні – за врахування температурної залежності лише коефіцієнтів теплопровідності. Сталі ФМХ (модулі пружності, коефіцієнти лінійного розширення і Пуассона) крайніх шарів дорівнювали значенням, підрахованим на основі вище наведених залежностей за середньоарифметичних температур відповідних шарів.

З графіків видно, що вплив температурної залежності на радіальні переміщення і напруження істотніше проявляється у проміжковому шарі, а на колові напруження – у першому шарі в області, що прилягає до внутрішньої поверхні кулі. За температурної залежності ФМХ за абсолютними значеннями радіальні переміщення і напруження є менші, а колові можуть бути як більшими, так і меншими, ніж за сталих ФМХ крайніх шарів. Для найбільшого значення теплового потоку максимальна різниця становить

відповідно 5.8; 11.7 і 26.9%. Зі збільшенням теплових потоків максимальні радіальні напруження зміщуються від поверхні $\rho = r_1$ до поверхні $\rho = r_2$, причому за температурнозалежних ФМХ поверхні, на яких радіальні напруження максимальні, дещо ближче до відповідних поверхонь поділу. На поверхні $\rho = 0.87$ колові напруження за і без врахування температурної залежності крайніх шарів однакові.

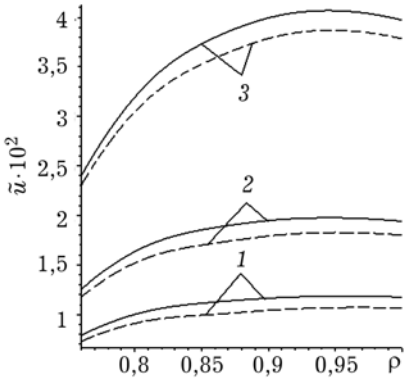

Рис. 1.

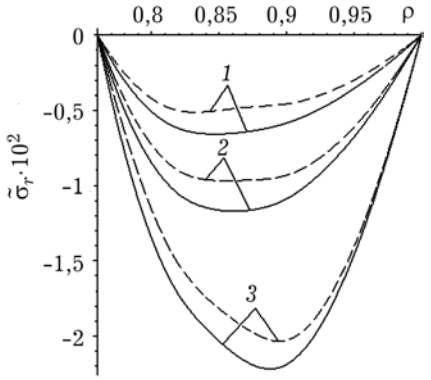

Рис. 2.

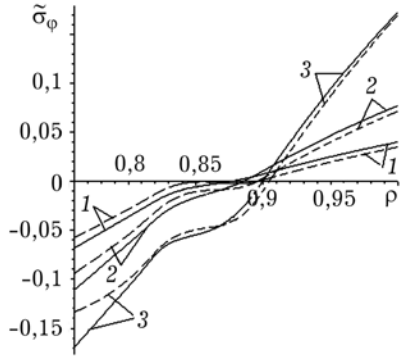

Рис. 3.

Висновки. Визначення термопружного стану, зумовленого одновимірними температурними полями та однорідними поверхневими навантаженнями, в кусково-неоднорідній термочутливій ізотропній кулі зведено до розв'язання відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень. Проаналізовано вплив температурної залежності ФМХ на термомеханічну поведінку порожнистої вільної від силових навантажень тришарової кулі з функціонально-градієнтним середнім шаром.

1. *Калиняк Б. М., Яцків І. І.* Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь // Прикл. проблеми механаніки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.
2. *Махоркин И. Н.* Исследование температурных полей и напряжений в неоднородных сферических телах на основе уравнений с особенностями импульсного типа: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: Львов, 1981. – 16 с.
3. *Моделювання* та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
4. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 634 с.
5. *Процюк Б. В.* Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 95–109.

6. *Процюк Ю. Б.* Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Там само. 2010. – **53**, № 4. – С. 151–161.
7. *Процюк Ю. Б.* Осесиметричні задачі термопружності для шаруватих термочутливих циліндрів і куль за кубічної залежності конфіцієнтів теплопровідності від температури // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 294–296.
8. *Процюк Б. В.* Визначення одновимірного термопружного стану шаруватих термочутливих тіл обертання з однаковими сталими коефіцієнтами Пуассона // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 294–296.
9. *Процюк Б. В.* Термопружний стан кусково-неоднорідних термочутливих сферичних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 2012. – С. 196–208.
10. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл обертання // Сучасні проблеми механіки і математики.– В 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. Львів : Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1 – С. 161–164.
11. *Ganczarski A., Skrzypek J.* A study on coupled thermo-elasto-plastic-damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materals // J. Thermal Stresses. – 2009. – **32**. – P. 698–751.
12. *Kushnir R., Protsiuk B.* A Method of the Green's Functions for Quasistatic Thermoelasticity Problems in Layered Thermosensitive Bodies under Complex Heat Exchange // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – **191**. – P. 143–154.
13. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties // Thermal Stresses I / Ed.by R.B. Hetnarski – Amsterdam et all: North-Holland: 1986: Chapther 6. – P. 391–483.
14. *Nowinski J.* Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature dependent Properties // ZAMP. – 1959. – **10**, № 39. – P. 565–575.
15. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ШАРА

Предложена методика определения термоупругого сотояния, обусловленного центрально-симметричным температурным полем и однородными поверхностными нагрузками, в слоистом изотропном шаре с учетом зависимости от температуры и координаты модулей упругости, коэффициентов линейного расширения и Пуассона. Методика предполагает решения относительно радиальных перемещений систем интегро-алгебраических уравнений, полученных с интегрального представления решения задачи для обыкновенного диференциального уравнения с обобщенными производными. При этом использовано функцию Грина задачи упругости для однородного шара. Числовые иссследования приведены для трехслойного шара с функционально-градиентным слоем.

THE DETERMINATION OF THERMOSTRESSED STATE OF PIECEWISE-INHOMOGENOUS THERMOSENSITIVE SPHERE

The procedure of determination the thermostressed state due to centrally symmetric temperature field and surface homogeneous loadings in a layer isotropic sphere is offered with allowance for dependence on temperature and coordinates of elasticity moduli, coefficients of linear expansion and Poisson of components. The procedure anticipates solution of the systems of integral-algebraic equation with respect to the radial displacements, the equations being obtained from the integral presentation of solution of the problem for ordinary differential equation with generalized derivatives. In addition Green's function of elasticity problem for homogeneous sphere was used. Numerical studies were carried out for a three-layer shpere with functionally graded layer.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
[2]Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано 17.09.14