УДК 512.552.13.

О. В. Пігура

КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ, В ЯКИХ НУЛЬ Є АДЕКВАТНИМ ЕЛЕМЕНТОМ, НАПІВРЕГУЛЯРНІ

Описані комутативні області Безу, в яких нульовий елемент є адекватним. Наведено критерій, коли напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним. Як наслідок отримано нове описання комутативних напіврегулярних кілець Безу.

Адекватні кільця, які є узагальненням кілець аналітичних функцій ввів Хелмер [3], як клас кілець, над якими довільна матриця діагоналізується. Показано [4], що в класі комутативних регулярних і комутативних кілець нормування нульовий елемент володіє властивостями адекватності. Це дало можливість ввести і розглядати кільця, в яких нульовий елемент є адекватним. Нижче описані різноманітні властивості комутативних кілець Безу з адекватним нульовим елементом [2, 4]. Виявлено, що клас таких кілець збігається з класом напіврегулярних кілець Безу.

Всі розглядувані кільця є комутативними з одиницею і $1 \neq 0$. Через $mspec\ a$ позначимо множину всіх максимальних ідеалів кільця R, які містять елемент a.

Елемент a кільця R називають адекватним, якщо для довільного елемента b кільця R елемент a можна подати у вигляді добутку $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s маємо $\overline{s'}\,\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$.

Кільце Безу − це кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

Оскільки вивчаємо кільця, в яких 0 є адекватним елементом, наведемо відомий результат, який дає можливість будувати приклади таких кілець.

Теорема 1 [2]. Нехай a − адекватний елемент комутативного кільця Безу. Тоді $\overline{0} \in R / aR$ є адекватним елементом.

Покажемо, що властивість нуля бути адекватним піднімається по радикалу Джекобсона $J(R)$.

Теорема 2. Нехай R − комутативне кільце, в якому 0 є адекватним. Тоді в фактор-кільці $R / J(R)$ елемент $\overline{0}$ теж є адекватним.

Д о в е д е н н я. Позначимо $\overline{R} = R / J(R)$. Нехай у кільці R нуль є адекватним. Покажемо, що $\overline{0} = 0 + J(R)$ є адекватним в $\overline{R}$.

Нехай $\overline{b} = b + J(R)$ − довільний елемент в $\overline{R}$. Згідно з адекватністю нуля в R маємо $0 = r \cdot s$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ − для довільного необоротного дільника s' елемента s. Нехай $\overline{r} = r + J(R)$, $\overline{s} \square s + J(R)$. Звідси $\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$ і $\overline{s'}\,\overline{R} + \overline{b}\overline{R} \neq \overline{R}$. Нехай $\overline{t}$ − необоротний дільник елемента $\overline{s} \in \overline{R}$. Тоді існують такі елементи $j \in J(R)$ і $k \in R$, що $s + j = tk$. Покажемо, що $sR + tR \neq R$. Нехай це не так, тобто $sR + tR = R$, а звідси отримуємо $su + tv = 1$, тоді $tku - ju + tv = 1$ і $tku + tv = t(ku + v) = 1 + ju$.

Оскільки $j \in J(R)$, то одержуємо, що t є оборотним елементом в R, а це суперечить нашому припущенню. Отже, $\overline{t}$ є необоротним елементом в R. Тому, $sR + tR = kR \neq R$. Згідно з означенням елемента $s \in R$ маємо, що

$kR+bR\neq R$, а отже, $\overline{kR}+\overline{bR}\neq \overline{R}$. Оскільки $\overline{k}$ дільник елемента $\overline{t}$, то $\overline{tR}+\overline{bR}\neq \overline{R}$. Отже, $\overline{0}$ є адекватним елементом в $\overline{R}$. Теорему доведено.

Опишемо комутативні кільця Безу, в яких нуль є адекватним через властивість радикала Джекобсона.

Теорема 3. Нехай R − комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним елементом. Тоді для довільного ненульового і необоротного елемента $b\in R$ існує такий ідемпотент $e\in R$, що $be\in J(R)$ і $eR+bR=R$.

Доведення. Нехай b − ненульовий і необоротний елемент кільця R. Згідно з означенням кільця R маємо $0=r\cdot s$, де $rR+bR=R$ і $s'R+bR\neq R$ − для довільного необоротного дільника s' елемента s. Очевидно, що $rR+sR=R$. Звідси $ru+sv=1$ для деяких елементів $u,v\in R$. Звідси $r^2u=r$, причому $(ru)^2=ru=e$. Очевидно, що з умови $rR+bR=R$ і того факту, що $r^2u=r$, маємо $eR+bR=R$.

Зауважимо, що $s^2u=s$ і $1-e=sv$ − ідемпотент кільця R. Оскільки $eR+bR=R$, тоді отримаємо рівність $rux+by=1$ для деяких елементів $x,y\in R$. З цієї рівності випливає, що $1-e\in bR$. Звідси $mspec\ b\subset mspec\ (1-e)$.

Нехай існує такий $M\subset mspec\ (1-e)$, що $b\notin M$. Звідси $M+bR=R$, тобто $m+bt=1$, де $m\in M$, $t\in R$. Нехай $(1-e)R+mR=d$. Оскільки $1-e\in M$ та $m\in M$, то очевидно, що $d\in M$. Оскільки $sv=1-e$ та d є необоротним дільником елемента sv та $s^2u=s$, то очевидно, що d є необоротним дільником елемента s. Звідси, згідно з обмеженнями, накладеними на елемент s, маємо $bR+dR\neq R$. Хоча $R=bR+mR\subseteq bR+dR\neq R$, що неможливо. Отже, $mspec\ b=mspec\ (1-e)$.

Покажемо, що елемент be міститься в усіх максимальних ідеалах кільця R. Нехай M − довільний максимальний ідеал кільця R. Оскільки $mspec\ e\cup mspec\ (1-e)=mspec\ R$, то можливі такі випадки:

1) $M\in mspec\ e$ або
2) $M\in mspec\ (1-e)$.

Якщо $M\in mspec\ e$, тоді $be\in M$. Якщо ж $M\in mspec\ (1-e)$, то оскільки $mspec\ (1-e)=mspec\ b$, тоді $b\in M$, а отже, $be\in M$. Через довільність максимального ідеалу M маємо $be\in J(R)$. Теорема доведена.

Як наслідок отримаємо такий результат.

Теорема 4. Напівпросте комутативне кільце Безу є кільцем, в якому нуль є адекватним елементом тоді і лише тоді, коли воно є регулярним.

Доведення. Нехай R − напівпросте комутативне кільце Безу, в якому нуль є адекватним. За теоремою 3 для довільного ненульового і необоротного елемента кільця R існує такий ідемпотент $e\in R$, що $be\in J(R)$, причому $bR+eR=R$. Оскільки $J(R)=0$, тоді $be=0$. Оскільки $bR+eR=R$, тоді $bu+ev=1$ для деяких елементів $u,v\in R$. Звідси $b^2u=b$, тобто елемент b є регулярним. Необхідність доведено.

За працею [4] достатність є очевидною. Теорема доведена.

З теорем 2 та 4 є очевидним такий результат.

Теорема 5. Нехай R − комутативне кільце Безу. Тоді такі твердження є еквівалентними:

1) R − кільце, в якому нуль є адекватним;
2) R − напіврегулярне кільце.

1. *Білявська С. І., Забавський Б. В.* Зв'язок адекватних кілець з чистими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – № 8. – С. 28–32.
2. *Забавский Б. В., Билявская С. И.* Адекватное в нули кольцо является кольцом со свойством замены // Фундаментальная и прикл. математика. – 2011/2012. – **17**, № 3. – С. 61–66.
3. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225–236.
4. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. –№ 7. – P. 231–248.

КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА БЕЗУ, В КОТОРЫХ НОЛЬ ЯВЛЯЕТСЯ АДЕКВАТНЫМ ЕЛЕМЕНТОМ, ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ

Описаны коммутативные области Безу, в которых нулевой элемент является адекватным. Приведен критерий, когда полупростое коммутативное кольцо Безу является кольцом, в котором ноль адекватный. Как следствие получено новое описание коммутативных полурегулярных колець Безу.

COMMUTATIVE BEZOUT RINGS IN WHICH 0 IS ADEQUATE IS A SEMI REGULAR

In this paper we described commutative Bezout domain where zero element is adequate. Shows the criterion when semi simple commutative Bezout ring is a ring in which zero is adequate. As a result, received a new description of commutative semi regular Bezout rings.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
11.09.14