УДК 512.552.13

А. В. Саган

НАПІВСПАДКОВІ КВАЗІ-ЕВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ

Доведено, що праве напівспадкове квазі-евклідове дуо-кільце є кільцем Безу і для всіх натуральних $n \ge 2$, $GL_n(R) = GE_n(R)$. *Також доведено, що комутативне квазі-евклідове кільце стабільного рангу 2 є кільцем Безу і для всіх натуральних* $n \ge 2$, $E_n(R) = SL_n(R)$.

Всі розглядувані нижче кільця є асоціативними з відмінною від нуля одиницею. Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R, а через $GL_n(R)$ − групу всіх оборотних матриць порядку n з елементами кільця R. Під $UT_n(R)$ розумітимемо групу нижніх унітрикутних матриць порядку n над кільцем R, тобто матриць, в яких $a_{ii} = 1$ і $a_{ij} = 0$, де $i < j$, для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Під *елементарними матрицями* [5] з елементами кільця R розуміємо квадратні матриці таких трьох типів: які отримують з одиничної переставлянням рядків чи стовпців; діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць порядку n з елементами з кільця R позначатимемо $GE_n(R)$ [4], а через $E_n(R)$ − групу елементарних $(n \times n)$-матриць третього типу [6].

Правим (лівим) кільцем Безу називають кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. *Кільце Безу* − це кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу. Кільце R називають *правим кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GL_2(R)$, що $(a, b)Q = (d, 0)$. *Правим (лівим) дуо-кільцем* називають кільце, в якому кожний правий (лівий) ідеал є двобічний. Кільце називають *дуо-кільцем*, якщо воно є лівим і правим дуо-кільцем одночасно. Кільце R назвемо *правим (лівим) напівспадковим*, якщо довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал R є проективним. Кільце називають *напівспадковим*, якщо воно є лівим і правим напівспадковим кільцем. Кільце R називають *правим елементарно головним*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a, b)Q = (d, 0)$.

Кільце R назвемо *кільцем стабільного рангу 2*, якщо для таких довільних $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, виконується співвідношення $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$ [3]. Якщо на кільці R заданий правий квазі-алгоритм, тобто задана така функція $\varphi : R \times R \to W$, де W − ординал, що для довільних $a, b \in R, b \ne 0$, існують такі $q, r \in R$, що $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$, то кільце R називають *правим квазі-евклідовим*.

Твердження. Нехай R − праве квазі-евклідове кільце, тоді R − праве кільце Безу.

Доводиться аналогічно до теореми 2 в [4].

Теорема 1. Нехай R − напівспадкове дуо-кільце. Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) R − праве квазі-евклідове кільце;

2) R − праве кільце Безу і $GL_2(R) = GE_2(R)$;

3) R − праве кільце Безу і для всіх натуральних $n \geq 2$, $GL_n(R) = GE_n(R)$.

Доведення. 3) $\Rightarrow$ 2) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Оскільки R − праве напівспадкове дуо-кільце Безу, то R праве кільце Ерміта [1]. Отже, з того, що R праве кільце Ерміта випливає, що існує така оборотна матриця Q, що виконується рівність

$$(a, b)Q = (d, 0).$$

Оскільки $GL_2(R) = GE_2(R)$, то R є елементарно головним, а отже, і квазі-евклідовим [4].

1) $\Rightarrow$ 3) За вказаним твердженням, квазі-евклідове кільце є кільцем Безу. Тому для доведення досить показати, що для всіх натуральних $n \geq 2$ будь-яка матриця з $GL_n(R) = GE_n(R)$. Отже, нехай R − праве напівспадкове квазі-евклідове дуо-кільце. Візьмемо довільну оборотну матрицю A вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(R).$$

Тоді

$$a_{11}R + a_{12}R + \cdots + a_{1n}R = R.$$

Оскільки R − праве напівспадкове квазі-евклідове кільце, то для елементів a_{11} і a_{12} існує скінченний правий ланцюг подільності. За допомогою елементарних перетворень стовпців замінимо елемент a_{11} на останню, відмінну від нуля, остачу (позначимо її ∂_1) в ланцюзі подільності для елементів $a_{11,}a_{12}$. Тоді перший рядок матриці A набуде вигляду $(\partial_1, 0, a_{13}, \ldots, a_{1n})$.

Тепер замінимо елемент ∂_1 на останню, відмінну від нуля, праву остачу в ланцюзі подільності для елементів ∂_1, a_{13} і так далі.

У підсумку отримаємо, що першим рядком матриці A буде рядок $(1, 0, \ldots, 0)$ і за допомогою елементарних перетворень стовпців зведемо її до вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тепер елементарними перетвореннями рядків, тобто домноженням зліва на відповідні елементарні матриці, матрицю A' зведемо до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $A' \in GL_{n-1}(R)$. Над матрицею A'' здійснимо перетворення, анологічні виконаним вище, і так далі. Очевидно, що цей процес є скінченний. У результаті матрицю A за допомогою елементарних пертворень звели до одиничної, що й потрібно довести.

Отже, $GL_n(R) = GE_n(R)$.

Теорему доведено.

Для комутативних кілець правильне таке твердження.

Наслідок 1. Нехай R − напівспадкове комутативне кільце. Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) R − квазі-евклідове кільце;
2) R − кільце Безу і $GL_2(R) = GE_2(R)$;
3) R − кільце Безу і для всіх натуральних $n \ge 2$, $GL_n(R) = GE_n(R)$.

Лема 1. Будь-яка матриця з $UT_n(R)$ належить $E_n(R)$.

Д о в е д е н н я. Для цього достатньо зауважити, що для довільної матриці $M \in UT_n(R)$ виконується рівність

$$M \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (\prod_{i=j+1}^{n} E_n(-a_{ij})) = I_n,$$

де $E_n(a), (E_n(a))^{-1}$ належить $E_n(R)$.

Лему доведено.

Лема 2. Будь-яка діагональна матриця з $SL_n(R)$ належить $E_n(R)$.

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що

$$diag(a_{1,} \ldots , a_n) E_n^{i,i-1}(-a_i^{-1}) E_n^{i-1,i}(-1 + a_i) E_n^{i,i-1}(1) E_n^{i-1,i}(-1 + a_i^{-1}) =$$
$$= diag(a_1, \ldots , a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots , a_n).$$

Тому матрицю $diag(a_1, \ldots , a_n)$ множенням на матриці третього типу, тобто на перетині i рядка та j стовпця стоїть елемент a ($E_n^{ij}(a)$), зводимо до вигляду $diag(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n, 1, \ldots , 1) = I_n$. А оскільки $E_n^{ij}(a)$ належить $E_n(R)$, то лему доведено.

Теорема 2. Нехай R − комутативне кільце стабільного рангу 2. Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) R − квазі-евклідове кільце;
2) R − кільце Безу і $E_2(R) = SL_2(R)$;
3) R − кільце Безу і для всіх натуральних $n \ge 2$, $E_n(R) = SL_n(R)$.

Д о в е д е н н я. $3) \Rightarrow 2)$ Очевидно.

$2) \Rightarrow 1)$ Оскільки R − комутативне кільце Безу стабільного рангу 2, то R − кільце Ерміта [2]. Тоді, оскільки стабільний ранг ермітового кільця не перевищує 2, то існують такі елементи $x, y \in R$, що

$$(a_0 + cx)R + (b_0 + cy)R = R.$$

Звідси

$$(a_0 + cx)t + (b_0 + cy)s = 1$$

для деяких $t, s \in R$. Очевидно, що матриця

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + cx & b_0 + cy \\ -s & t \end{pmatrix}$$

є унімодулярною і такою, що

$$(d, 0)P = (a, b).$$

Тоді

$$(a, b)P^{-1} = (d, 0),$$

де $P^{-1} \in SL_2(R)$.

Оскільки $E_2(R) = SL_2(R)$, то R є квазі-евклідовим кільцем.

1) $\Rightarrow$ 3) Для доведення досить показати, що для всіх натуральних $n \ge 2$ будь-яка матриця з $SL_n(R)$ належить $E_n(R)$. З квазі-евклідовості кільця R випливає, що кільце R є правим кільцем Ерміта. Тому обмежимось розглядом нижньотрикутних матриць.

Оскільки

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 1 \end{pmatrix},$$

то доведення випливає з двох попередніх лем.
Теорему доведено.

Наслідок 2. Нехай R − комутативне кільце. Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) R − квазі-евклідове кільце;
2) R − кільце Ерміта і $E_2(R) = SL_2(R)$;
3) R − кільце Ерміта і для всіх натуральних $n \ge 2$, $E_n(R) = SL_n(R)$.

1. *Забавський Б. В.* Про PP-квазідуо кільце елементарних дільників // Алгебра і топологія. − К.: ІСДО, 1993. − С. 40−49.
2. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. − 2003. − **55**, № 4. − Р. 550−554.
3. *Bass H.* Algebraic K-theory. − New York; Benjamin, 1968. − 592 p.
4. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens // These de docteur troisieme cycle, 1976. − 68 p.
5. *Cohn P.* On the structure of the GL_2 of a ring // I. H. E. S. Publ. Math. − 1996. − **30**. − P. 365−413.
6. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. − 1956. − **82**. − P. 366−394.

ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННЫЕ КВАЗИ-ЭВКЛИДОВЫЕ КОЛЬЦА

Доказано, что правое полунаследственное квази-эвклидовое кольцо является кольцом Безу и для всех натуральных $n \ge 2$, $GL_n(R) = GE_n(R)$. *Также доказано, что коммутативное квази-эвклидовое кольцо является кольцом Безу и для всех натуральных* $n \ge 2$, $E_n(R) = SL_n(R)$.

SEMIHEREDITARY QUASI-EUCLIDEAN RINGS

We prove that a right semihereditary quasi-euclidean duo-rings is a Bezout rings and $GL_n(R) = GE_n(R)$ *for every positive integer* $n \ge 2$. *We prove that a commutative quasi-euclidean ring of stable range 2 is a Bezout ring and* $E_n(R) = SL_n(R)$ *for every positive integer* $n \ge 2$.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
24.09.14