УДК 512.552.13

А. І. Гаталевич

КІЛЬЦЯ БЕЗУ З ДІЛЬНИКАМИ НУЛЯ В РАДИКАЛІ ДЖЕКОБСОНА

Досліджено гомоморфні образи областей Безу, дільники нуля яких містяться в радикалі Джекобсона

У 1949 році І. Капланський започаткував дослідження кілець Безу з дільниками нуля в радикалі Джекобсона [4]. Ф. Кушо показав, що такі кільця є нерозкладними і майже чистими [2]. П. Вамош і С. Віганд вивчали кільця Прюфера з дільниками нуля в радикалі Джекобсона [6]. Т. Лам − розклади скінченно породжених проективних модулів над такими кільцями [3]. Природно виникає питання про описання таких елементів a комутативної області Безу, що R / aR є кільцем, всі дільники нуля якого лежать у радикалі Джекобсона.

Під кільцем R розумітимемо комутативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Через $U(R)$ позначатимемо групу оборотних елементів кільця R, а через $J(R)$ − радикал Джекобсона кільця R.

Під правим (лівим) кільцем Безу розумітимемо таке, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве і ліве кільця Безу називають кільцями Безу. Кільця Безу відіграють особливу роль у дослідженнях кілець елементарних дільників. Всі кільця елементарних дільників є кільцями Безу.

Позначимо через $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$ матрицю з елементами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0$ на головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називають еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $PAQ = B$. Якщо матриця A еквівалентна деякій діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де $\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R$ за довільного $i = 1, 2, \ldots, r-1$, то кажуть, що вона володіє діагональною редукцією. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A. Кільце R − кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над ним володіє діагональною редукцією [4].

Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцями Ерміта [4].

Кільце R називають кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує такий елемент $x \in R$, що $a + bx \in U(R)$ [7].

Елемент a кільця R називають елементом майже стабільного рангу 1, якщо стабільний ранг кільця R / aR дорівнює 1.

Ідеал I кільця R називають чистим ідеалом, якщо $I \cap J = IJ$ для кожного ідеалу J кільця R.

Кільце R називають f-кільцем, якщо кожний чистий ідеал R породжується ідемпотентом.

Кільце називають чистим (майже чистим), якщо кожний його елемент є сумою ідемпотента і оборотного (регулярного) елемента.

Теорема 1. Нехай R − комутативна область Безу і для кожного ідеалу I радикал Джекобсона кільця R / I містить скінченний перетин простих ідеалів. Тоді R − кільце елементарних дільників.

Д о в е д е н н я . Нехай R − комутативна область Безу і для ідеалу I радикал Джекобсона фактор кільця R / I містить скінченний перетин простих ідеалів. Тоді згідно з [1] кільце R / I є кільцем, де довільний скінченно породжений плоский модуль є проективним. Тоді кільце R / I є f-кільцем [5]. Згідно з [8], кільце R / I є кільцем елементарних дільників.

Теорема 2. Нехай R − комутативна область Безу, $a \in R \setminus (0)$ і нехай R / aR є кільцем, всі дільники нуля якого лежать у радикалі Джекобсона. Тоді R / aR − локальне кільце.

Д о в е д е н н я . Зауважимо, що кільце дробів $Q(R / aR)$ кільця R / aR збігається з самим кільцем R / aR. Тоді елемент кільця R / aR є або оборотним елементом, або дільником нуля. Справді, нехай $\overline{b} \in \overline{R / aR}$. Якщо $(a;\, b) = 1$, то існують такі елементи $u, v \in R$, що $au + bv = 1$ і $\overline{au + bv} = \overline{1}$, $\overline{b}\overline{v} = \overline{1}$. Тоді $\overline{b}$ − оборотний елемент кільця R / aR. Якщо ж $(a;\, b) \neq 1$, то $a = a_0 d, b = b_0 d$, і $\overline{b}\overline{a_0} = \overline{0}$. Оскільки всі дільники нуля належать радикалу $J(R / aR)$, то він є єдиним максимальним ідеалом кільця R / aR. Отже, R / aR − локальне кільце.

Теорема 3. Нехай R − комутативна область Безу, $a \in R \setminus (0)$ і нехай R / aR є кільцем, всі дільники нуля якого лежать у радикалі Джекобсона. Тоді елемент a є елементом майже стабільного рангу 1.

Д о в е д е н н я . В теоремі 2 довели, що R / aR − локальне кільце. А оскільки локальне кільце є кільцем стабільного рангу 1, то відразу отримуємо, що елемент a є елементом майже стабільного рангу 1.

Теорема 4. Нехай R − комутативна область Безу, $a \in R \setminus (0)$ і нехай R / aR є кільцем, всі дільники нуля якого лежать у радикалі Джекобсона. Кільце R / aR є кільцем, всі дільники нуля якого лежать у радикалі Джекобсона тоді і лише тоді, коли елемент a міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Д о в е д е н н я . Необхідність слідує з теореми 2. Якщо ж елемент a міститься в єдиному максимальному ідеалі M, то очевидно, що M / aR − єдиний максимальний ідеал кільця R / aR. Тоді кільце R / aR − локальне і все доведено.

Теорема 5. Нехай R − комутативна область Безу і $a \in R \setminus (0)$. Кільце R / aR є майже чистим і нерозкладним тоді і лише тоді, коли елемент a міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Д о в е д е н н я . Якщо R / aR − майже чисте і нерозкладне кільце, то воно є чистим кільцем [2]. Чисте і нерозкладне кільце є локальним кільцем. Отже, елемент a міститься в єдиному максимальному ідеалі.

1. *Brewer, J. W., Rutter E. A.* A note on finitely generated ideals which are locally principal // Proc. Amer. Math. Soc. − 1972.− **31.** − P. 429−432.
2. *Couchot F.* Almost clean rings and arithmetical rings // In Commutative algebra and its applications, Walter de Gruyter − 2009. − P. 135−154.
3. *Feng L. G. and Lam T. Y.* Projective modules over some Prufer rings // Enseign. Math. (2) − 2002.− **48.** − P. 345−357.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. − 1949. − **66**. − P. 464−491.

5. *Puninski G., Rothmaler P*. When every finite generated flat module is projective // J. Algebra. – 2004. – **277.** – P. 542–558.
6. *Vamos P., Wiegand S*. Block diagonalization and 2-unit sums of matrices over Prufer domains // Trans. Amer. Math. Soc. – 2011. – **9**. – P. 4997–5020.
7. *Vasershtein L. N*. Stable rank of rings and dimension of topological spaces // Funkts. Anal. – 1971. – **56.** – P. 17–27.
8. *Zabavsky B. V., Bilyavs'ka S. I*. Decomposition of finitely generated projective modules over Bezout ring //Mat. Stud. – 2013. – **40.** – P. 104–107.

КОЛЬЦА БЕЗУ С ДЕЛИТЕЛЯМИ НУЛЯ В РАДИКАЛЕ ДЖЕКОБСОНА

Исследованы гомоморфные образы областей Безу, делители нуля которых содержатся в радикале Джекобсона

BEZOUT RINGS WITH ZERO DIVISORS IN JACOBSON RADICAL

Were investigated homomorphic images of Bezout domains, which zero divisors are contained in the Jacobson radical

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
01.10.14