УДК 512.64

Ю. М. Перегуда

ПРО ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ З МАКСИМАЛЬНИМИ 1-СТАБІЛЬНИМИ ПІДМНОЖИНАМИ

Доведено існування частково впорядкованої множини з невід'ємною квадратичною формою Тітса, всі максимальні підмножини якої складаються із 1-стабільних елементів.

Квадратичні форми виникають за розгляду багатьох задач у різних галузях математики. В сучасній теорії зображень важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса. Вперше їх ввів у 1972 р. П. Габріель [10]. Він ввів зображення скінченних сагайдаків (орієнтованих графів) і показав, що сагайдак має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли є додатною деяка квадратична форма, яку він назвав квадратичною формою Тітса. Ця праця П. Габріеля започаткувала новий напрям в теорії зображень, пов'язаний з вивченням зв'язків між властивостями зображень та відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю. А. Дрозд [6] розглянув квадратичну форму Тітса для скінченних частково впорядкованих множин і показав, що частково впорядкована множина має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є слабо додатною (тобто додатною на векторах із невід'ємними координатами).

У 1977 р. М. М. Клейнер і А. В. Ройтер [7] ввели зображення диференціальних градуйованих категорій, а також відповідну квадратичну форму Тітса і виявили, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною.

Квадратичні форми Тітса вивчали також К. Бонгартс, В. М. Бондаренко, Ш. Бренер, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, А. В. Ройтер, Д. Сімсон та багато інших математиків. При цьому розглядали як властивості самих форм Тітса для різних об'єктів, так і зв'язки між їх властивостями та властивостями зображень.

У теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса. В. М. Бондаренко і М. В. Стьопочкіна [3] виявили, що коли форма Тітса частково впорядкованої множини є додатною, її категорія ін'єктивних зображень має скінченний зображувальний тип. Всі такі частково впорядковані множини (що є аналогами графів Динкіна) описано в працях [4, 5].

Ми продовжуэмо вивчати локальні деформації квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин (див. статті [1, 2, 8, 9]).

Основні поняття. Під квадратичною розумітимемо довільну квадратичну форму над полем дійсних чисел R:

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \, .$$

Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\Re$, а множину всіх $f(z) \in \Re$ з одиничними коефіцієнтами $f_1, \dots, f_n$ − через $\Re_0$.

Нагадаємо деякі означення, введені В. М. Бондаренком.

Нехай $f(z) \in \Re_0$ і $s \in \{1, \dots, n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називають форму

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \dots, z_n, a) = a z_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \, ,$$

де a − параметр.

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину таких всіх $b \in R$, що квадратична форма $f^{(s)}(z,b)$ є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = R \setminus F_+^{(s)}$. Іншими словами, $b \in F_-^{(s)}$ тоді і лише тоді, коли існує такий ненульовий вектор $r = (r_1,...,r_n) \in R^n$, що $f^{(s)}(r_1,...,r_n,b) \le 0$.

Далі, покладемо

$$m_f^{(s)} = \sup F_-^{(s)} \in R \cup \infty$$

(оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для будь-якого $y < x$, то цей супремум є граничною точкою). Число $m_f^{(s)}$ називають s-им P-граничним числом форми $f(z)$.

Отже, маємо таке твердження.

Твердження. *Нехай* $f(z_1,...,z_n) \in \Re_0$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \ge 0$;

2) $m_f^{(s)} = \infty$, *якщо форма*

$$f_{-s}(z_1,...,z_{s-1},z_{s+1},...,z_n) = f_{-s}(z_1,...,z_{s-1},0,z_{s+1},...,z_n)$$

не є додатною.

У праці [1] доведена така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $f(z_1,...,z_n) \in \Re_0$ *і нехай* $m_f^{(s)} \ne \infty$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$, а тому $m_f^{(s)}$ – *найбільше число множини* $F_-^{(s)}$.

2) форма $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ *є невід'ємною.*

Наведемо ще деякі означення.

Нехай S – частково впорядкована множина (яка не містить елемента 0). Квадратичною формою Тітса множини S називають таку, яку задає рівність

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S}^{n} z_i^2 + \sum_{i<j,i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i .$$

Число $m_f^{(i)}$, де $f = q_S(z)$, а i – елемент із S, позначимо через $m_S(i)$ або просто – через $m(i)$, якщо S фіксоване. Елемент $i \in S$ називають r-стабільним відносно форми Тітса, якщо $m_S(i) \ne \infty$ і існує така частково впорядкована множина $T \supset S$ порядку $|S| + r$, що $m_S(i) = m_{S_N}(i)$ (запис $T \supset S$ означає, що S – підмножина T, повна відносно часткової впорядкованості на S_N).

Підмножину X частково впорядкованої множини S назвемо r-стабільною, якщо кожний елемент $x \in X$ є стабільним X.

Ці поняття також ввів В. М. Бондаренко.

Основний результат.

Мета цієї статті – довести таку теорему.

Теорема 2. *Існує частково впорядкована множина S з невід'ємною квадратичною формою Тітса, кожна максимальна підмножина якої є 1-стабільною.*

Під максимальними підмножинами частково впорядкованої множини S розуміємо підмножини порядку $|S| - 1$.

Розглядаючи конкретну частково впорядковану множину S, вважатимемо, що її елементами є натуральні числа: $S = \{s_1 < s_2 < ... < s_n\}$; відношення часткового порядку позначатимемо в цьому випадку через $-\prec$. При цьому вважаємо, що $s_i < s_j$ кожного разу, коли $i \prec j$. В усіх прикладах елемент $x \in S$, для якого обчислюємо число $m(x)$, дорівнюватиме s_n. Тому матриця квадратичної форми $q_S^{(p)}(z,a)$ – симетрична матриця розміру $(n+1)\times(n+1)$ такого вигляду:

$$M_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \dots & * & * \\ -1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \dots & 2 & * \\ -1 & * & * & \dots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Оскільки для обчислення числа $m(x)$ користуємось лише критерієм Сільвестра (для додатності квадратичної форми), то замість матриці M_a можна розглядати матрицю $\overset{\circ}{M}_a$, яку отримують із M_a множенням останньої на 2 та подальшим множенням її першого рядка і першого стовпця на -1:

$$\overset{\circ}{M}_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \dots & * & * \\ 1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & 2 & * \\ 1 & * & * & \dots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Зауважимо ще, що коли розглядаємо частково впорядковану множину S з додатною формою Тітса, то всі головні мінори матриці $\overset{\circ}{M}_1$ додатні (за критерієм Сільвестра), а значить, $m_S(s_n)$ є розв'язком відносно a лінійного рівняння $\Delta(n,a)=0$, де

$$\Delta(n,a) = \left|\overset{\circ}{M}_a\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \dots & * & * \\ 1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & 2 & * \\ 1 & * & * & \dots & * & 2a \end{vmatrix}.$$

Переходимо тепер безпосередньо до доведення теореми 1.

Розглянемо частково впорядковану множину Q, що складається із чотирьох попарно непорівнянних елементів 1,2,3,4. Квадратична форма Тітса цієї множини невід'ємна, бо збігається з квадратичною формою Тітса (неорієнтованого) графа, який складається із вершин 0,1,2,3,4 і ребер (0,1), (0,2), (0,3), (0,4) (цей граф є розширеною діаграмою Динкіна). Із симетрій S та її максимальних підмножин випливає, що для доведення теореми досить показати, що існує частково впорядкована множина $T = \{1,2,3\} \cup 5$, яка є розширенням максимальної підмножини $S_0 = \{1,2,3\}$ частково впорядкованої множини S, така, що $m_{S_0}(3) = m_T(5)$.

Обчислимо спочатку $m_{S_0}(3)$. Згідно з вищесказаним, це число є розв'язком відносно a рівняння $\Delta(a)=0$, де

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник $\Delta(a)$ за елементами останнього рядка: $\Delta(a) = -\Delta_1 + 2a\Delta_2$, де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник Δ_1 та Δ_2 за елементами третього рядку, маємо $\Delta_1 = 4$ і $\Delta_2 = 4$, а значить, $\Delta(a) = 8a - 4$. Отже, $m_{S_0}(3) = \frac{1}{2}$.

Розглянемо тепер частково впорядковану множину $T = \{1,2,3\} \cup 5$ з частковим порядком $3 \prec 5$, а елементи i та j, якщо $(i,j) \neq (3,5),(5,3)$, завжди непорівняльні. Очевидно, що T є розширенням максимальної підмножини $S_0 = \{1,2,3\}$ частково впорядкованої множини S. Обчислимо $m_T(5)$.

Згідно з вищесказаним це число є розв'язком відносно a рівняння $\Delta(d) = 0$,
де

$$\overline{\Delta}(a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник $\Delta(a)$ за елементами останнього рядка:

$$\overline{\Delta}(a) = \overline{\Delta_1} - \overline{\Delta}_2 + 2a\overline{\Delta}_3,$$

де

$$\overline{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$\overline{\Delta}_2 = \Delta(1/2), \overline{\Delta}_3 = \Delta(1).$

Легко бачити, що $\overline{\Delta}_1 = -4.$ Враховуючи рівності $\Delta(1/2) = 0$ і $\Delta(1) = 4$ (див. вище вираз для $\Delta(a)$), маємо, що $\overline{\Delta}(a) = -4 + 8a.$ Отже, $m_T(5) = \frac{1}{2}.$

Таким чином, $m_{S_0}(3) = m_T(5)$ і теорема 1 доведена.◊

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

1. *Бондаренко В. М. , Бондаренко В. В. , Перегуда Ю. Н.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм //Укр. мат. журн. – 2012. – № 7.–С. 892–907.
2. *Бондаренко В. М., Перегуда Ю. М.* Опис P-чисел для вузлових точок частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2010. – Вип. 21. – С. 35–39.
3. *Бондаренко В. М. , Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Там само. – 2005. –Вип. 9. – С. 15–25.
4. *Бондаренко В. М. , Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри. – 2005. – **2**, № **3**. – С. 18–58.
5. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання.– 2006. – **9**, № 3. – С. 320–325.

6. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его приложения. − 1974. − **8**,− С. 34−42.
7. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. − К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. − С. 5−70.
8. *Перегуда Ю. М.* Про R-стабільні елементи скінченних частково впорядкованих множин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. − 2009. − Вип. 19. − С. 81−86.
9. *Bondarenko V. M., Pereguda Yu. M.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування. − 2009. − **6**, № 2. − С. 474−477.
10. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I. // Manus. Math.− 1972. − **6**, № 1. − P. 71−103.

О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ С МАКСИМАЛЬНЫМИ 1-СТАБИЛЬНЫМИ ПОДМНОЖЕСТВАМИ

Доказано существование частично упорядоченного множества с неотрицательной квадратичной формой Титса, все максимальные подмножества которой состоят из 1-стабильных элементов .

ON A PARTIALLY ORDERED SET WITH A MAXIMUM 1-STABLE SUBSET

Proved that there is a partially ordered set with a non-negative quadratic form Tits all maximal subsets which consist of 1-stable elements.

Житомирський військовий ін-т імені С. П. Корольова
Держ. ун-ту телекомунікацій, Житомир

Одержано
07.09.14