УДК 517.98

М. І. Дмитришин

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ШКАЛИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПРОСТОРІВ, АСОЦІЙОВАНИХ З ПОЗИТИВНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Визначено нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з дробовими степенями позитивних операторів. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів та отримано нерівності типу Бернштейна і Джексона. Проілюстровано застосування абстрактних результатів у теорії регулярних еліптичних операторів.

Проблему наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів необмежених операторів вивчали багато авторів [1–3, 9, 10]. Серед таких класів виокремлюють вектори експоненціального типу, інваріантні підпростори яких введено у праці [2]. Деякі умови щільності цих підпросторів подано у працях [1, 2]. Зокрема, умова щільності виконується, якщо оператор A генерує обмежену C_0-групу в банаховому просторі X, або, якщо A має дійсний спектр і для будь-якого $\varepsilon > 0$ збіжний інтеграл $\int_0^{\varepsilon} \ln \ln M(t)\, dt$, де $M(t) = \sup\limits_{|\operatorname{Im}\lambda| \ge t} \left\| (\lambda - A)^{-1} \right\|$.

Однією з проблем у теорії апроксимації є характеризація апроксимаційних просторів [4, 6]. У багатьох випадках їх ідентифікують як інтерполяційні, отримані дійсним методом інтерполяції [5, 11].

Мотивація цієї праці – дослідити найкращі апроксимації інваріантними підпросторами векторів експоненціального типу позитивного оператора в банаховому просторі. Це питання для будь-якого необмеженого замкненого лінійного оператора розглядали раніше [7]. Нижче визначено нові класи інтерполяційних просторів векторів експоненціального типу дробових степенів позитивного оператора і відповідні апроксимаційні простори. Встановлено нові інтерполяційні властивості таких просторів (теореми 1 і 3). Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, що оцінюють мінімальну відстань від заданого елемента до підпростору векторів експоненціального типу (теорема 4). У термінах векторів експоненціального типу описано кореневі підпростори регулярно еліптичного оператора (теорема 5). Встановлено нерівності, що характеризують спектральні апроксимації для такого оператора (теорема 6).

Основні результати. У комплексному банаховому просторі $(X, \|\cdot\|_X)$ розглядаємо позитивний оператор A зі щільною областю визначення $D(A)$. Це означає, що $(-\infty; 0] \in \rho(A)$ та існує таке число $c > 0$, що $\left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\| \le c / (1 + |\lambda|)$, $\lambda \cup (-\infty; 0]$ (див. означення 1.14.1 з праці [12]). Позначимо $D\left(A^{k+1}\right) = \left\{ x \in D\left(A^k\right) : A^k x \in D\left(A^k\right) \right\}$, $D\left(A^{\infty}\right) = \bigcap \left\{ D\left(A^k\right) : k \in \mathbb{N} \right\}$, $A^0 = I$ і $D\left(A^0\right) = X$.

Нехай $0 < \theta < 1$ і $1 \le q \le \infty$. Використовуючи відомі позначення [12], для квазінормованих просторів X_0, X_1 визначимо інтерполяційний простір $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|x|_{(X_0, X_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} K(t, x; X_0, X_1) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

де $K(t,x;X_0,X_1)=\inf\limits_{x=x_0+x_1}\left(|x_0|_{X_0}+t|x_1|_{X_1}\right)$.

Для будь-яких банахових просторів X_0,X_1 визначимо інтерполяційний простір $[X_0,X_1]_\theta$ з нормою $\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}=\inf\limits_{f(\theta)=x}\|f(z)\|_{F(X_0,X_1)}$, де inf беруть за всіма такими функціями $f\in F(X_0,X_1)$, що $f(\theta)=x$. Через $F(X_0,X_1)$ позначимо простір (X_0+X_1) − значних функцій з нормою

$$\|f(z)\|_{F(X_0,X_1)}=\max\left(\sup_t\|f(it)\|_{X_0},\sup_t\|f(1+it)\|_{X_1}\right).$$

Нехай $0<\alpha\le\sigma$, $0<\sigma<k$, $k\in\mathbb{N}$. Відомо [12; § 1.15.1], що для всіх $x\in\left(X,D\left(A^k\right)\right)_{\sigma/k,q}$ оператор

$$A_\sigma^\alpha x=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k-\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}A^k(A+tI)^{-k}xdt,$$

що допускає замикання A^α в X, яке не залежить від σ. Область визначення $D\left(A^\alpha\right)$ оператора A^α розглядаємо як банахів простір з нормою $\|x\|_{D\left(A^\alpha\right)}=\left\|A^\alpha x\right\|_X$, $x\in D\left(A^\alpha\right)$. Таким чином, оператор A^α визначений для всіх $\alpha\ge 0$. Щільність $D\left(A^\alpha\right)$ в X випливає зі щільності $D\left(A^k\right)$ в X [12; лема 1.14.1] і таких вкладень:

$$D\left(A^k\right)\subset\left(X,D\left(A^k\right)\right)_{\sigma/k,1}\subset D\left(A^\alpha\right)\subset X.$$

Для будь-яких $\alpha,\beta\ge 0$ виконується рівність $A^\alpha A^\beta=A^{\alpha+\beta}$ і оператор A^β ізоморфно відображає $D\left(A^{\alpha+\beta}\right)$ на $D\left(A^\alpha\right)$ [12; теорема 1.15.2].

Для чисел $\nu>0$ і $1\le q\le\infty$ простір

$$E_q^\nu\left(A^\alpha\right):=\left\{x\in D\left(A^\infty\right):\|x\|_{E_q^\nu\left(A^\alpha\right)}<\infty\right\},$$

$$\|x\|_{E_q^\nu\left(A^\alpha\right)}:=\left(\sum_{k=0}^\infty\nu^{-kq}\left\|A^kx\right\|_{D\left(A^\alpha\right)}^q\right)^{1/q},\ 1\le q<\infty,$$

$$\|x\|_{E_\infty^\nu\left(A^\alpha\right)}:=\sup_k\nu^{-k}\left\|A^kx\right\|_{D\left(A^\alpha\right)},\ q=\infty.$$

Зауважимо, що простір $E_q^\nu\left(A^\alpha\right)$ є повний і, якщо $0<\nu<\mu$, виконуються такі вкладення:

$$E_q^\nu\left(A^\alpha\right)\subset E_q^\mu\left(A^\alpha\right)\subset D\left(A^\alpha\right).$$

Для чисел $1\le q<\infty$ і $0\le\alpha<\beta$ простори

$$E_q^\nu\left(A^\alpha,A^\beta\right):=\left\{x\in D\left(A^\infty\right):\|x\|_{E_q^\nu\left(A^\alpha,A^\beta\right)}<\infty\right\},$$

$$\|x\|_{E_q^\nu\left(A^\alpha,A^\beta\right)}:=\left(\sum_{k=0}^\infty\nu^{-kq}\left\|A^kx\right\|_{\left(D\left(A^\alpha\right),D\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}}^q\right)^{1/q},$$

$$E_q^{\nu}\left[A^{\alpha}, A^{\beta}\right] := \left\{x \in D\left(A^{\infty}\right) : \|x\|_{E_q^{\nu}\left[A^{\alpha}, A^{\beta}\right]} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{E_q^{\nu}\left[A^{\alpha}, A^{\beta}\right]} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-kq} \left\|A^k x\right\|^q_{\left[D\left(A^{\alpha}\right), D\left(A^{\beta}\right)\right]_{\theta}}\right)^{1/q}.$$

Теорема 1. *Нехай* $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$, $0 \le \alpha < \beta$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$ *і* $\nu = \nu_0^{1-\theta} \nu_1^{\theta}$. *Тоді виконується така рівність:*

$$\left(E_{q_0}^{\nu_0}\left(A^{\alpha}\right), E_{q_1}^{\nu_1}\left(A^{\alpha}\right)\right)_{\theta, q} = E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right). \tag{1}$$

Якщо $1 \le q_0, q_1 < \infty$ *і* $1/q = (1-\theta) q_0 + \theta q_1$, *то*

$$\left(E_{q_0}^{\nu}\left(A^{\alpha}\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^{\beta}\right)\right)_{\theta, q} = E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}, A^{\beta}\right), \tag{2}$$

$$\left[E_{q_0}^{\nu_0}\left(A^{\alpha}\right), E_{q_1}^{\nu_1}\left(A^{\alpha}\right)\right]_{\theta} = E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right), \tag{3}$$

$$\left[E_{q_0}^{\nu}\left(A^{\alpha}\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^{\beta}\right)\right]_{\theta} = E_q^{\nu}\left[A^{\alpha}, A^{\beta}\right]. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Простір $E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right)$ ізометричний простору послідовностей $l_q^{\nu,\alpha} = \left\{\overline{x} := \left(A^k x\right)_{k=0}^{\infty} : x \in E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right)\right\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l_q^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right)}$. Виконуючи заміну $\nu = 2^{-\sigma}$, отримуємо такі еквівалентності:

$$K\left(t, \overline{x}; l_{\infty}^{\nu_0,\alpha}, l_{\infty}^{\nu_1,\alpha}\right) \approx \sup_k \min\left(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1}\right) \left\|A^k x\right\|_{D\left(A^{\alpha}\right)},$$

$$K\left(t, \overline{x}; l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}\right) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \min\left(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1}\right) \left\|A^k x\right\|_{D\left(A^{\alpha}\right)}.$$

Для $\overline{x} \in \left(l_{\infty}^{\nu_0,\alpha}, l_{\infty}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta, q}$ і $\sigma_0 > \sigma_1$ маємо:

$$\|\overline{x}\|^q_{\left(l_{\infty}^{\nu_0,\alpha}, l_{\infty}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q}} \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta q i(\sigma_0 - \sigma_1)} \sup_k \left[\min\left(2^{k\sigma_0}, 2^{i(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1}\right) \left\|A^k x\right\|_{D\left(A^{\alpha}\right)}\right]^q \ge$$

$$\ge \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{qi(\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta)} \left\|A^i x\right\|^q_{D\left(A^{\alpha}\right)} = c \|\overline{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}}.$$

Звідси випливає вкладення

$$\left(l_{\infty}^{\nu_0,\alpha}, l_{\infty}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha}. \tag{5}$$

Використовуючи нерівність Гельдера, для $\overline{x} \in l_q^{\nu,\alpha}$ маємо

$$\|\overline{x}\|^q_{\left(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q}} \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta q i(\sigma_0-\sigma_1)} \times \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \min\left(2^{k\sigma_0}, 2^{i(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1}\right) \left\|A^k x\right\|_{D\left(A^{\alpha}\right)}\right]^q \le$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\sigma q} \left\|A^k x\right\|^q_{D\left(A^{\alpha}\right)} = c \|\overline{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}},$$

звідки випливає вкладення

$$l_q^{\nu,\alpha} \subset \left(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q}. \tag{6}$$

Із вкладень (5) і (6) отримуємо

$$l_q^{\nu,\alpha} \subset \left(l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha},$$

звідки й випливає (1).

Нехай $l_q^\alpha = \left\{(\varsigma_k)_{k=0}^\infty : \varsigma_k \in D\left(A^\alpha\right), \|(\varsigma_k)\|_{l_q^\alpha} < \infty\right\}$ – простір послідовностей з нормою $\|(\varsigma_k)\|_{l_q^\alpha} = \left(\sum_{k=0}^\infty \|\varsigma_k\|_{D\left(A^\alpha\right)}^q\right)^{1/q}$ і $\chi : x \in E_q^\nu\left(A^\alpha\right) \to \varsigma_k = \nu^{-k} A^k x \in l_q^\alpha$ – ізометричне вкладення. Тоді виконується така оцінка:

$$K\left(t, \chi(x); l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right) \le \inf_{x = x_0 + x_1}\left(\|\chi(x_0)\|_{l_{q_0}^\alpha} + t\|\chi(x_1)\|_{l_{q_1}^\beta}\right) \le$$

$$\le \|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha} K\left(\frac{t\|\chi\|_{E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^\beta}}{\|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha}}, x; E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right).$$

Здійснюючи заміну $\tau = \dfrac{t\|\chi\|_{E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^\beta}}{\|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha}}$, отримуємо:

$$\|\chi(x)\|_{\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q}} \le \frac{\|\chi\|_{E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^\beta}^{\theta}}{\|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha}^{\theta-1}}\|x\|_{\left(E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}}.$$

Використовуючи подібні оцінки для оберненого відображення χ^{-1}, визначеного на множині значень оператора χ, одержимо $\|\chi(x)\|_{\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q}} = \|x\|_{\left(E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}}$ для всіх $x \in \left(E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}$.

Простір $E_q^\nu\left(A^\alpha, A^\beta\right)$ ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)} = \left\{\overline{x} := \left(A^k x\right)_{k=0}^\infty : x \in E_q^\nu\left(A^\alpha, A^\beta\right)\right\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}} = \|x\|_{E_q^\nu\left(A^\alpha, A^\beta\right)}$. Використовуючи відомий ізоморфізм [12; теорема 1.18.1]

$$\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q} = l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)},\ 1/q = (1-\theta)q_0 + \theta q_1,$$

$$l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)} = \left\{(\varsigma_k)_{k=0}^\infty : \varsigma_k \in \left(D\left(A^\alpha\right), D\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}, \|(\varsigma_k)\|_{l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}}^q = \sum_{k=0}^\infty \|\varsigma_k\|_{\left(D\left(A^\alpha\right), D\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,q}}^q < \infty\right\},$$

отримуємо рівність (2).

Рівність (3) безпосередньо випливає з (1) і теореми 4.7.2 з [5].

Нехай $f(z) \in F\left(E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right)$, $f(\theta) = x$ для $x \in \left[E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right]_\theta$. Тоді

$$g(z) = \frac{\|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha}^{z-\theta}}{\|\chi\|_{E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^\beta}^{z-\theta}}\chi f(z) \in F\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right),\ g(\theta) = \chi(x),$$

$$\|g(z)\|_{F\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)} \le \frac{\|\chi\|_{E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^\alpha}^{1-\theta}}{\|\chi\|_{E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^\beta}^{\theta}}\|f(z)\|_{F\left(E_{q_0}^\nu\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^\nu\left(A^\beta\right)\right)},$$

$$\|\chi(x)\|_{\left[l_{q_0}^{\alpha}, l_{q_1}^{\beta}\right]_\theta} \le \frac{\|\chi\|^{1-\theta}_{E_{q_0}^{\nu}\left(A^\alpha\right)\to l_{q_0}^{\alpha}}}{\|\chi\|^{\theta}_{E_{q_1}^{\nu}\left(A^\beta\right)\to l_{q_1}^{\beta}}} \|x\|_{\left[E_{q_0}^{\nu}\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^\beta\right)\right]_\theta}.$$

Використовуючи подібні оцінки для оберненого відображення χ^{-1}, дістанемо $\|\chi(x)\|_{\left[l_{q_0}^{\alpha}, l_{q_1}^{\beta}\right]_\theta} = \|x\|_{\left[E_{q_0}^{\nu}\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^\beta\right)\right]_\theta}$ для всіх $x \in \left[E_{q_0}^{\nu}\left(A^\alpha\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^\beta\right)\right]_\theta$.

Простір $E_q^{\nu}\left[A^\alpha, A^\beta\right]$ ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]} = \left\{\overline{x} := \left(A^k x\right)_{k=0}^{\infty} : x \in E_q^{\nu}\left[A^\alpha, A^\beta\right]\right\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} = \|x\|_{E_q^{\nu}\left[A^\alpha, A^\beta\right]}$. Тому рівність (4) випливає з відомого ізоморфізму [12, теорема 1.18.1]:

$$\left[l_{q_0}^{\alpha}, l_{q_1}^{\beta}\right]_\theta = l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]},\ 1/q = (1-\theta)q_0 + \theta q_1,$$

$$l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]} = \left\{(\varsigma_k)_{k=0}^{\infty} : \varsigma_k \in \left[D\left(A^\alpha\right), D\left(A^\beta\right)\right]_\theta, \|(\varsigma_k)\|^q_{l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}} = \sum_{k=0}^{\infty} \|\varsigma_k\|^q_{\left[D\left(A^\alpha\right), D\left(A^\beta\right)\right]_\theta} < \infty\right\}.$$

Теорему доведено.

На підпросторі $E_q\left(A^\alpha\right) = \bigcup_{\nu>0} E_q^{\nu}\left(A^\alpha\right)$ визначимо функціонал

$$|x|_{q,\alpha} := \|x\|_X + \inf\left\{\nu > 0 : x \in E_q^{\nu}\left(A^\alpha\right)\right\}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Функція* (7) *є квазінормою, що задовольняє нерівність* $|x+y|_{q,\alpha} \le |x|_{q,\alpha} + |y|_{q,\alpha}$ *для всіх* $x, y \in E_q\left(A^\alpha\right)$. *Крім цього, виконується вкладення* $E_q\left(A^\alpha\right) \subset X$.

Д о в е д е н н я. Нехай $r(x) = \inf\left\{\nu > 0 : x \in E_q^{\nu}\left(A^\alpha\right)\right\}$. Для всіх $x, y \in E_q\left(A^\alpha\right)$ і $\varepsilon > 0$ значення $\|x\|_{E_q^{r(x)+\varepsilon}\left(D\left(A^\alpha\right)\right)}$, $\|y\|_{E_q^{r(y)+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)}$ є скінченними і виконуються такі нерівності:

$$\|x+y\|_{E_q^{r+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)} \le \|x\|_{E_q^{r+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)} + \|y\|_{E_q^{r+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)} \le \|x\|_{E_q^{r(x)+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)} + \|y\|_{E_q^{r(y)+\varepsilon}\left(A^\alpha\right)},$$

де $r = \max\{r(x), r(y)\}$. Звідси маємо $r(x+y) \le r + \varepsilon \le r(x) + r(y) + \varepsilon$.

Оскільки ε довільне, то $r(x+y) \le r(x) + r(y)$ для всіх $x, y \in E_q\left(A^\alpha\right)$. Очевидно, $r(-x) = r(x)$ для всіх $x \in E_q\left(A^\alpha\right)$. Отже, $|x|_{q,\alpha}$ є квазінорма. Вкладення $E_q\left(A^\alpha\right) \subset X$ випливає з нерівності $\|x\|_X \le |x|_{q,\alpha}$. Теорему доведено.

Визначимо функціонал

$$E_{q,\alpha}(x,t) = \inf\left\{\|x-y\|_X : y \in E_q\left(A^\alpha\right), |y|_{q,\alpha} < t\right\}.$$

Нехай $0 < s < \infty$, $0 < \tau \le \infty$ і $1 \le q \le \infty$. Визначимо шкалу апроксимаційних просторів

$$B_{q,\tau}^{s}\left(A^\alpha\right) = \left\{x \in X : |x|_{B_{q,\tau}^{s}\left(A^\alpha\right)} < \infty\right\},$$

$$|x|_{B_{q,\tau}^{s}\left(A^\alpha\right)} = \left(\int_0^\infty \left[t^s E_{q,\alpha}(x,t)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},\ 0 < \tau < \infty,$$

$$|x|_{B_{q,\infty}^{s}\left(A^\alpha\right)} = \sup_{t>0} t^s E_{q,\alpha}(x,t),\ \tau = \infty.$$

Теорема 3. *Нехай* $\alpha \geq 0$, $0 < \theta < 1$, $s = 1/\theta - 1$, $\tau = g\theta$. *Якщо* $\left[B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)\right]^\theta$ *є простір* $B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)$ *з нормою* $|x|^\theta_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}$, *то з точністю до еквівалентності норм виконується така рівність:*

$$\left[B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)\right]^\theta = \left(E_q\left(A^\alpha\right), X\right)_{\theta,g}, \tag{8}$$

Якщо $0 < \tau \leq \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $s_0 \neq s_1$, *то*

$$\left(B^{s_1}_{q,\tau}\left(A^\alpha\right), B^{s_2}_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)\right)_{\theta,\tau} = B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right). \tag{9}$$

Доведення. Рівність (8) випливає із означення простору $B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)$ і теореми 7.1.7 з [5].

Застосовуючи теорему 3.11.5 з [5], для $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, $\theta = 1/(s+1)$, $\theta_i = 1/(s_i+1)$, $i = 0,1$, $\tau = g\theta$ і $0 < \eta < 1$ отримуємо:

$$\left(\left[B^{s_0}_{q,\tau_0}\left(A^\alpha\right)\right]^{\theta_0}, \left[B^{s_1}_{q,\tau_1}\left(A^\alpha\right)\right]^{\theta_1}\right)_{\eta,g} = \left[B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)\right]^\theta, \tag{10}$$

Використовуючи теорему 3.11.6 з [5], для $\rho = \eta\theta_1/\theta$ маємо:

$$\left(\left[B^{s_0}_{q,\tau_0}\left(A^\alpha\right)\right]^{\theta_0}, \left[B^{s_1}_{q,\tau_1}\left(A^\alpha\right)\right]^{\theta_1}\right)_{\eta,g} = \left(B^{s_0}_{q,\tau_0}\left(A^\alpha\right), B^{s_1}_{q,\tau_1}\left(A^\alpha\right)\right)^\theta_{\rho,\tau}, \tag{11}$$

Рівність (9) випливає з рівностей (10) і (11), якщо $s = (1-\rho)s_0 + \rho s_1$ і $\rho = \theta$. Теорему доведено.

Розглянемо проблему наближення елемента простору X елементами підпростору $E^\nu_q\left(A^\alpha\right)$. Позначимо:

$$d_{q,\alpha}(x,\nu) = \inf\left\{\|x-y\|_X : y \in E^\nu_q\left(A^\alpha\right)\right\}, \ \nu > 0.$$

Теорема 4. *Існують такі сталі* c_1 *і* c_2, *що виконуються нерівності*

$$|x|_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)} \leq c_1 |x|^s_{q,\alpha} \|x\|_X, \ x \in E_q\left(A^\alpha\right), \tag{12}$$

$$d_{q,\alpha}(x,\nu) \leq c_2 \nu^{-s} |x|_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}, \ x \in B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right). \tag{13}$$

Доведення. Використовуючи теорему 3.11.4(b) з [5] для деякої сталої $c(\theta,g)$, маємо:

$$|x|_{\left(E_q\left(A^\alpha\right),X\right)_{\theta,g}} \leq c|x|^{1-\theta}_{q,\alpha} \|x\|^\theta_X, \ x \in E_q\left(A^\alpha\right).$$

З цієї нерівності і ізоморфізму (8) випливає існування такої сталої $c_1(\theta,g)$, що виконується нерівність (12).

Використовуючи теорему 3.11.4(a) з [5] для деякої сталої $c(\theta,g)$, маємо $K\left(t,x;E_q\left(A^\alpha\right),X\right) \leq ct^\theta |x|_{\left(E_q\left(A^\alpha\right),X\right)_{\theta,g}}$, $x \in \left(E_q\left(A^\alpha\right),X\right)_{\theta,g}$. Отже, з урахуванням ізоморфізму (8) існує така стала $c_0(\theta,g)$, що

$$K\left(t,x;E_q\left(A^\alpha\right),X\right) \leq c_0 t^\theta |x|^\theta_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}, \ x \in B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right).$$

Покладемо $K_\infty\left(t,x;E_q\left(A^\alpha\right),X\right) = \inf\limits_{x=x_0+x_1} \max\left\{|x_0|_{q,\alpha}, t\|x_1\|_X\right\}$. З нерівності $K_\infty(t,x;\cdot) \le K(t,x;\cdot)$ випливає:

$$t^{-\theta} K_\infty\left(t, x; E_q\left(A^\alpha\right), X\right) \le c_0 \, |x|^\theta_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}, \; x \in B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right). \tag{14}$$

Згідно з лемою 7.1.2 з [5] для будь-якого $t > 0$ існує таке $\zeta > 0$, що $K_\infty(t,x;\cdot) = \zeta$ і $\lim\limits_{v \downarrow \zeta} E_{q,\alpha}(x,v) = E_{q,\alpha}(x, \zeta + 0) \le \zeta / t$. Отже, для будь-якого $\zeta_1 > 0$ існує таке $t > 0$, що $\zeta_1 \le K_\infty(t,x;\cdot) = \zeta$. Для будь-якого фіксованого x функція $E_{q,\alpha}(x,t)$ є спадною, тому $E_{q,\alpha}(x,\zeta) \le E_{q,\alpha}(x, \zeta_1 + 0) \le \varsigma_1 / t$.

Таким чином, маємо $\left[E_{q,\alpha}(x,\zeta)\right]^\theta \le t^{-\theta}\zeta_1^\theta \le t^{-\theta}\zeta^{\theta-1}\varsigma$. Як наслідок $\zeta^{1-\theta}\left[E_{q,\alpha}(x,\zeta)\right]^\theta \le t^{-\theta} K_\infty(t,x;\cdot)$. З урахуванням нерівності (14), маємо $\zeta^{1-\theta}\left[E_{q,\alpha}(x,\zeta)\right]^\theta \le c_0 \, |x|^\theta_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}$. Для $s = (1-\theta)/\theta$ отримуємо:

$$\zeta^s E_{q,\alpha}(x,\zeta) \le c_0^{1/\theta} \, |x|^\theta_{B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right)}, \; x \in B^s_{q,\tau}\left(A^\alpha\right). \tag{15}$$

Якщо $|x|_{q,\alpha} = r(x) + \|x\|_X < \zeta$, то $r(x) < \zeta - \|x\|_X$. Тому $x \in E_q^\nu\left(A^\alpha\right)$ для таких $\nu > 0$, що $r(x) < \nu < \zeta - \|x\|_X$. Оскільки $E_q^\nu\left(A^\alpha\right) \subset E_q^\zeta\left(A^\alpha\right)$ для $\nu < \zeta$, то $x \in E_q^\zeta\left(A^\alpha\right)$. Отже, виконується така нерівність:

$$d_{q,\alpha}(x,\zeta) \le E_{q,\alpha}(x,\zeta), \; x \in X, \; \zeta > 0. \tag{16}$$

Покладаючи $c_2 = c_0^{1/\theta}$ в (15) і використовуючи (16), отримуємо (13). Теорему доведено.

Приклад. Нехай Ω − обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з границею $\partial\Omega$ класу C^∞ і набір операторів

$$(Au)(x) = \sum_{|\gamma| \le 2m} a_\gamma(x) D^\gamma u(x), \; a_\gamma(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_j u)(x) = \sum_{|\gamma| \le m_j} b_{j,\gamma}(x) D^\gamma u(x), \; b_{j,\gamma}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad j = 1, \ldots, m,$$

є регулярно еліптичним (див. означення 5.2.1/4 з [12]).

У просторі $L_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, розглянемо замкнений оператор A з областю визначення $W^{2m}_{q,B_j}(\Omega) = \left\{u \in W^{2m}_q(\Omega) : B_j u\big|_{\partial\Omega} = 0, \, j = 1, \ldots, m\right\}$, де $W^{2m}_q(\Omega)$ − простір Соболєва.

Припустимо, що резольвентна множина опреатора A непорожня, тобто $\rho(A) \ne \varnothing$. Згідно з теоремою 4.9.1 з [12] для достатньо великих додатних $\rho \ge \rho_0$ оператор $A + \rho I$ є позитивний. Оскільки простори векторів експоненціального типу операторів A і $A + \rho I$ збігаються, то без обмеження загальності можна вважати, що A − позитивний оператор. Крім того, згідно з теоремою 5.4.4/1 з [12] оператор A має точковий спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ і кореневі підпростори $R_n(A)$ є скінченновимірними.

Теорема 5. *Нехай* $\alpha \ge 0$, $1 \le q < \infty$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується така рівність:*

$$E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right) = \operatorname{span}\left\{R_n\left(A\right) : \left|\lambda_n\right| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m_0+1}}, \nu^{\frac{1}{m_1+1}}\right)\right\}, \tag{17}$$

де $\alpha = (1-\theta)\,m_0 + \theta m_1$, $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2.2 з [8] для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ маємо:

$$E_q^{\nu}(A^k) = \operatorname{span}\left\{R_n(A) : \left|\lambda_n\right| < \nu^{\frac{1}{k+1}}\right\}. \tag{18}$$

У теоремі 1.15.3 з [12] доведено, що для $0 \le \alpha < \beta$ виконується рівність $\left[D\left(A^{\alpha}\right), D\left(A^{\beta}\right)\right]_{\theta} = D\left(A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}\right)$. Тому, використовуючи (4) і (18), отримуємо:

$$E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right) = \left[E_{q_0}^{\nu}\left(A^{m_0}\right), E_{q_1}^{\nu}\left(A^{m_1}\right)\right]_{\theta} = \operatorname{span}\left\{R_n\left(A\right) : \left|\lambda_n\right| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m_0+1}}, \nu^{\frac{1}{m_1+1}}\right)\right\},$$

де $\alpha = (1-\theta)\,m_0 + \theta m_1$. Теорему доведено.

Визначимо простір

$$B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega) = \left\{u \in B^s_{q,\tau}(\Omega) : B_j A^k u\big|_{\partial\Omega} = 0, j = 1,\ldots,m, k \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

де $B^s_{q,\tau}(\Omega)$ – простір Бєсова.

Теорема 6. *Нехай коефіцієнти* a_{γ} *оператора* A *є сталими. Тоді існують такі сталі* c_1 *і* c_2, *що виконуються нерівності*

$$\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)} \le c_1 \left|u\right|^s_{q,\alpha} \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in E_q\left(A^{\alpha}\right), \tag{19}$$

$$d_{q,\alpha}\left(u,\nu\right) \le c_2 \nu^{-s} \|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}, \quad u \in B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega), \tag{20}$$

де $d_{q,\alpha}\left(u,\nu\right) = \inf\left\{\left\|u - u^0\right\|_{L_q(\Omega)} : u^0 \in E_q^{\nu}\left(A^{\alpha}\right)\right\}$.

Д о в е д е н н я. З рівності (17) випливає ізоморфізм просторів $E_q\left(A^{\alpha}\right) = E_q\left(A\right)$ для $\alpha \ge 0$. Тому, використовуючи теорему 9 з [7], отримуємо такий ізоморфізм:

$$B^s_{q,\tau}\left(A^{\alpha}\right) = B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega).$$

Таким чином, нерівності (19) і (20) випливають з нерівностей (12) і (13). Теорему доведено.

1. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
2. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.
3. *Радзиевский Г. В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 4. – С. 83–124.
4. *Almira J. M., Luther U.* Generalized approximation spaces and applications // Math. Nachr. – 2004. – **263–264**. – P. 3–35.
5. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976. – 208 p.

6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. – Berlin: Springer, 1993. – 454 p.
7. *Dmytryshyn M. I., Lopushansky O. V.* Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators // J. of Inequalities and Appl. – 2014. –**2014**:105.
8. *Dmytryshyn M. I., Lopushansky O. V.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // General Topology in Banach Spaces, Nova Sci. Publ., Huntington, New York, 2001. – P. 137–145.
9. *Giulini S.*, Approximation and Besov spaces on stratifiled groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **96**, № 4. – P. 1741–1764.
10. *Ljubic J. I., Macaev V. I.* On operators with separable spectrum // AMS Transl. – 1965. – **47**, № 2. – P. 89–129.
11. *Luther U.* Representation, interpolation, and reiteration theorems for generalized approximation spaces // Ann. Mat. Pura Appl. – 2003. – **182**, № 2. – P. 161–200.
12. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978. – 528 p.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ШКАЛЫ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОЗИТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Определены новые классы аппроксимационных пространств, ассоциируемых с дробными степенями позитивных операторов. Установлены интерполяционные свойства таких пространств и получены неравенства типа Бернштейна и Джексона. Показано применение абстрактных результатов в теории регулярных эллиптических операторов.

INTERPOLATED SCALES OF APPROXIMATION SPACES ASSOCIATED BY POSITIVE OPERATORS

We define the new classes of approximation spaces associated by the fractional degrees of positive operators. Interpolation properties of such spaces and Bernstein-Jackson-type inequalities are established. We show an application of abstract results for the regular elliptic operators.

Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
24.08.14