УДК 517.53.57

М. А. Сухорольський, В. В. Достойна

СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА У КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Сформульовано загальний підхід до побудови розв'язку крайової задачі для рівняння Гельмгольца у вигляді суми функціонального ряду в однозв'язній області з використанням конформного відображення цієї області на одиничний круг. Побудовано розв'язки крайових задач для півплощини та площини з круговим отвором.

Ефективні розв'язки крайових задач для гармонійного рівняння, що описує важливі фізичні процеси гідродинаміки, електростатики, магнітостатики, теплопровідності та теорії пружності, побудовано з використанням методів теорії аналітичних функцій [2]. Їх розв'язування еквівалентне до побудови комплексного потенціалу відповідного фізичного поля чи знаходження конформного відображення області, в якій шукають розв'язок, на круг, площину, смугу тощо. У праці [4] розв'язок рівняння Гельмгольца у крузі зображено у вигляді суми ряду за системою функцій, кожна з яких є добутком аналітичної функції комплексної змінної та функції від модуля цієї змінної. Заміною координат з використанням конформних відображень відповідних областей на круг одержано множини розв'язків рівняння Гельмгольца у різних системах координат. Розв'язок крайової задачі для рівняння Гельмгольца побудували у вигляді суми функціонального ряду в однозв'язній області, застосовуючи конформне відображення цієї області на одиничний круг.

Нехай $w = \phi(z)$ – конформне відображення однозв'язної області D комплексної площини $(z = x + iy)$ на круг $M = \{w \in C : |w| \le 1\}$ комплексної площини $(w = u + iv)$. При цьому межа $L = \partial D$ переходить в одиничне коло $K = \{w \in C : |w| = 1\}$.

Розглянемо рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \chi U = 0\,,\ \ \chi = \mathrm{const}\,.$$

Після введення нових змінних $u = \sqrt{\chi}x$, $v = \sqrt{\chi}y$ воно набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + U = 0\,.$$

Використовуючи змінні $w = u + iv, \bar{w} = u - iv$, це рівняння можна записати так:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} + U = 0\,. \tag{1}$$

Його розв'язок в одиничному крузі подамо за системою функцій $\left\{w^m J_m^*\left(w\bar{w}\right)\right\}_0^\infty$ [1, с. 325, 4]:

$$U\left(w,\bar{w}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*\left(w\bar{w}\right), \tag{2}$$

де $J_m^*\left(w\bar{w}\right) = J_m^*\left(|w|^2\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l |w|^{2l}}{2^{2l+m}(l+m)!\,l\,!}$, c_m – довільні сталі.

Введемо нові змінні $z = \phi^{-1}(w)$, $\bar{z} = \overline{\phi^{-1}(w)}$. Оскільки $\phi'(z) \ne 0$, $z \in D$, то рівняння (1) набуде вигляду

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \phi' \bar{\phi}' U = 0. \quad (3)$$

Приклад 1. Знайдемо розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, якщо задані значення шуканої функції на межі K цього круга:

$$U(w, \bar{w})\big|_K = f(t), \ \ t \in K, \quad (4)$$

де $f(t)$ − значення на колі K аналітичної у крузі функції

$$f(w) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m w^m, \quad (5)$$

де $d_m = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Підставляючи розв'язок (2) в умову (4) з урахуванням зображення (5) і рівності $w\bar{w} = 1$, яка виконується для точок кола K, одержимо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо $c_m = \frac{d_m}{J_m^*(1)}$. Тоді розв'язок задачі матиме вигляд

$$U(w, \bar{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\bar{w}).$$

Приклад 2. Знайдемо розв'язок рівняння (3), що задовольняє умову

$$U(z, \bar{z})\big|_L = f(t), \ \ t \in L, \quad (6)$$

де $f(t)$ − значення на L функції $f(z)$, аналітичної в області D.

Підставляючи вираз конформного відображення у формулу (2), одержимо розв'язок рівняння (3):

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi(z)}\right]. \quad (7)$$

Значення сталих c_m у співвідношенні (7) знайдемо з рівняння, одержаного підстановкою цього співвідношення в умову (6) з урахуванням рівності $\phi(t)\bar{\phi}(t) = |w|^2 = 1$, $t \in L$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(t) J_m^*(1) = f(t). \quad (8)$$

Використаємо вирази відображень точок меж L і K: $t = \phi^{-1}\left(e^{i\psi}\right)$, $\phi(t) = e^{i\psi}$, $-\pi < \psi \le \pi$. Тоді рівняння (8) набуде вигляду

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = f\left[\phi^{-1}\left(e^{i\psi}\right)\right]. \quad (9)$$

Отже, за знайденими зі співвідношення (9) значеннями сталих c_m запишемо за формулою (7) розв'язок задачі.

Теорема. *Нехай* $w = \phi(z)$ *− конформне відображення однозв'язної області* D *з межею* L *на одиничний круг,* $|w| \le 1$ *і* $f(z)$ *− аналітична в* D *функція зі значеннями* $f(t)$ *на межі цієї області. Тоді розв'язок рівняння (3) в області* D *за умови (6) можна подати як суму ряду (7), коефіцієнти якого визначають зі співвідношення (9).*

Доведення. Внаслідок оцінок $\left|\phi^m(z)\right| \le |w|^m \le 1$ і $\left|J_m^*\left[\phi(z)\bar{\phi}(z)\right]\right| \le \text{const}$, $z \in D$, ряд (7) збігається рівномірно для системи таких чисел c_m, що $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|c_m|} \le 1$, і його сума задовольняє рівняння (3). Отже, ряд (7) задає множину розв'язків рівняння (3).

Покажемо, що серед цієї множини можна вибрати розв'язок, що задовольняє умову (6). Використовуючи обмеженість функцій $J_m(1)$, $m = \overline{0,\infty}$, та аналітичність функції $f(z)$ в області D, можна сталі c_m, $m = \overline{0,\infty}$, підібрати так, щоб збігався відповідний ряд і виконувалась рівність

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(1) = f\left[\phi^{-1}(w)\right], \ w \in M. \tag{10}$$

Оскільки функція $f\left[\phi^{-1}(w)\right]$ аналітична у крузі M, то її можна розвинути в степеневий ряд

$$f\left[\phi^{-1}(w)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m, \ \overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_m|} \le 1,$$

і підібрати сталі для виконання рівності (10): $c_m = \dfrac{a_m}{J_m^*(1)}$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|c_m|} \le 1$.

Покладаючи у співвідношенні (10) $w = \phi(z)$, знаходимо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^*(1) = f(z),$$

Переходячи до границі при $z \to L$, одержимо умову (8).

Приклад 3. Знайдемо розв'язок рівняння (3) для площини з круговим отвором одиничного радіуса з центром у початку координат. Тоді $w = \dfrac{1}{z}$ і співвідношення (7) запишемо так:

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right).$$

Гранична умова (8) з урахуванням (5) набуде вигляду

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{-im\psi},$$

де $t = e^{-i\psi}$ – точка одиничного кола (межа площини з отвором). Звідси знаходимо $c_m = \dfrac{d_m}{J_m^*(1)}$ і розв'язок цієї задачі буде:

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} \frac{1}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right).$$

Якщо $f(t) = c = \text{const}$, то

$$U(z,\bar{z}) = \frac{c}{J_0^*(1)} J_0^*\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Приклад 4. Знайдемо розв'язок рівняння (3) у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, який на осі Ox задовольняє умову

$$U(z,\bar{z})\big|_{y=0} = f(x), \tag{11}$$

де $f(x)$ – значення на дійсній осі аналітичної у півплощині функції $f(z)$.

Зауважимо, якщо на дійсній осі задана обмежена функція $f(x)$, яка має скінченну кількість точок розриву і на нескінченності має оцінку $|f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda}}\right)$, $\lambda > 0$, то аналітичну функцію у півплощині $y > 0$, що набуває на дійсній осі значення $f(x)$, можна записати у вигляді інтеграла Шварца [2, с. 209]:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-z} + iC, \tag{12}$$

де C − дійсна стала.

Функцію, що набуває на інтервалі (α, β) дійсної осі значення, рівні одиниці, і нулю − на іншій частині цієї осі, знайдемо з (12) у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{x-z} = \frac{1}{\pi i}\ln\frac{\beta - z}{\alpha - z}.$$

Конформні пряме і обернене відображення півплощини $y \ge 0$ на одиничний круг $|w| \le 1$ задають формули

$$w = \phi(z) = \frac{z - ia}{z + ia}, \quad z = \phi^{-1}(w) = \frac{ia(1+w)}{1-w}, \quad a > 0. \tag{13}$$

Підставляючи співвідношення (13) в умову (6) з урахуванням того, що на лінії L $y = 0$ і $t = x$, одержимо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\frac{x - ia}{x + ia}\right)^m J_m^*(1) = f(x). \tag{14}$$

Оскільки система функцій $\left\{g_n(z) = \frac{2ia(z - ia)^n}{(z + ia)^{n+1}}\right\}$ є базисом Шаудера у просторі функцій [3], аналітичних у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, справедливе розвинення $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(z)$. Тому умову (14) можна записати у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m\, e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left[e^{in\psi} - e^{i(n+1)\psi}\right]$$

або

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m\, e^{im\psi} J_m^*(1) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - b_{m-1}) e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо значення сталих $c_0 = \frac{b_0}{J_0^*(1)}$, $c_m = \frac{b_m - b_{m-1}}{J_m^*(1)}$, $m = 1, 2, \dots$, а зі співвідношення (7) одержимо розв'язок задачі:

$$U(z,\bar{z}) = \frac{b_0}{J_0(1)} J_0^*\left[\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m - b_{m-1}}{J_m(1)} \left(\frac{z - ia}{z + ia}\right)^m J_m^*\left[\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}\right].$$

Якщо $f(x) = g_0(x) = \frac{ai}{x + ai} = \frac{a^2 + axi}{x^2 + a^2}$, то $b_0 = 1, b_k = 0, k = 1, \dots$, і з (15) маємо:

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{1} \frac{(-1)^m}{J_m^*(1)} \left(\frac{z - ia}{z + ia}\right)^m J_m^*\left[\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}\right].$$

Висновки. Конформним відображенням однозв'язної області на одиничний круг вдалося сформулювати загальний підхід до побудови розв'язку крайової задачі для рівняння Гельмгольца у вигляді суми функціонального ряду. Аналогічно можна сформулювати і побудувати розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца в інших областях, для яких відомі відповідні конформні відображення на одиничний круг.

1. *Корн Г., Корн* Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 698 с.
3. *Сухорольський М. А.* Системи розв'язків рівняння Гельмгольца // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2011. – № 718. – С. 19–34.
4. *Сухорольський М. А., Костенко І. С., Достойна В. В.* Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестник ХНТУ. – 2013. – **47**, № 2. – С. 323–326.

СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Сформулирован общий подход к построению решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в виде суммы функционального ряда в односвязной области с использованием конформного отображения этой области на единичный круг. Построены решения краевых задач для полуплоскости и плоскости с круговым отверстием.

SYSTEMS OF SOLUTIONS OF HELMHOLTZ EQUATION IN A COMPLEX DOMAIN

The general approach to the construction of solutions of boundary value problem for the Helmholtz equation as the sum of functional series in simply connected domain using conformal mapping of this domain onto a unit disk has been formulated. The solutions of boundary value problems for the half-plane and the plane with a circular hole have been constructed.

Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
14.09.15