

МЕТОД ЗБУРЕНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ АНІЗОТРОПНИХ ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ ЗА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Досліджено можливість застосування методу збурень для знаходження скінченної кількості перших значень власних частот та форм геометрично нелінійних вільних коливань серединних перетинів видовжених циліндричних панелей. З використанням квадратичної апроксимації переміщень за нормальною координатою та скінченноелементної апроксимації на одновимірних лінійних ізопараметричних елементах побудована відповідна дискретизована еквівалентна варіаційна задача. Для її розв'язання застосовано метод збурень. Одержані числові результати порівняно з літературними.

Вступ. Тонкі видовжені циліндричні панелі, що піддаються дії інтенсивних динамічних, зокрема циклічних, навантажень, широко застосовують у конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення [1]. Щоб уникнути резонансних явищ в експлуатаційних умовах, необхідно на стадії проектування визначити спектр власних частот вказаних конструктивних елементів. Через дефіцит і високу ціну традиційних матеріалів виникає потреба заміни їх новими конструкційними, зокрема композитними, експлуатаційні властивості та міцнісні характеристики яких можна прогнозувати в широкому діапазоні на стадії проектування та регулювати під час виготовлення. Поряд із анізотропією пружних властивостей найбільш характерною особливістю деформування тонкостінних оболонок із композитів є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Вільні коливання композитних тонкостінних елементів конструкцій досліджували, або застосовуючи числові методи [3, 6–8], або лише враховуючи податливість до трансверсального зсуву [1]. Нижче вивчено поперечні вільні коливання з одночасним урахуванням вказаних чинників.

Формулювання задачі. Криволінійний пружний шар товщиною h з циліндричною серединною поверхнею віднесемо до природної мішаної системи координат $\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = z$, $\alpha_3 = r$. Вважаємо, що цей шар має значно більший розмір вздовж осі α_2 проти довжини дуги перерізу $\alpha_2 = 0$ серединної поверхні $\alpha_3 = 0$. Отже, маємо видовжену циліндричну панель. Якщо умови закріплення торців панелі $\alpha_1 = \pm\alpha_1^0$ та початкові умови не залежать від координати α_2 , то тоді через незначний вплив умов закріплення країв $\alpha_2 = \pm\alpha_2^0$ функції, які визначають характеристики геометрично нелінійного коливного процесу в площині середнього перерізу, залежать лише від α_1 , α_3 . Для відшукування цих функцій маємо [5]:

– рівняння руху

$$\operatorname{div} \bar{S} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad (1)$$

– співвідношення пружності

$$\hat{\Sigma} = \tilde{A} \otimes \hat{\varepsilon}; \quad (2)$$

– деформаційні співвідношення між компонентами тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ та вектора пружних переміщень $\vec{U} = u_i \vec{e}_i \vec{e}_j$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k); \quad (3)$$

– співвідношення між компонентами S^{ij} несиметричного тензора напружень Кірхгофа \hat{S} та компонентами σ^{ik} симетричного тензора напружень Піоли $\hat{\Sigma}$

$$S^{ij} = \sum_k \sigma^{ik} (\delta_k^j + \nabla_k u^j). \quad (4)$$

У співвідношеннях (1), (2) \tilde{A} – тензор пружних характеристик анізотропного шару, а ρ – його густина.

Граничні умови на лицевих поверхнях панелі $\alpha_3 = \pm h/2$ за вільних коливань мають вигляд

$$S^{31}(\alpha_1, \pm h/2, t) = S^{33}(\alpha_1, \pm h/2, t) = 0, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_1^0, \quad (5)$$

а на видовжених торцях панелі $\alpha_1 = \pm \alpha_1^0$ за умов їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні $\alpha_2 = -h/2$

$$S^{1i}(a, \alpha_3, t) = 0, \quad (6)$$

$$u_i(a, \pm h/2, t) = 0, \quad |\alpha_3| \leq h/2, \quad i = 1, 3, \quad a = 0, l. \quad (7)$$

Рівняння руху (1) разом зі співвідношеннями (2)–(4) та граничними умовами (5)–(7) описуватимуть геометрично нелінійні поперечні коливання середнього перерізу панелі, якщо початкові умови задати так:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)|_{t=t_0} = v_i^0(\alpha_1, \alpha_3), \quad \left. \frac{\partial u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v_i^1(\alpha_1, \alpha_3), \quad i = 1, 3 \quad (8)$$

$$|v_3^0(\alpha_1, \alpha_3)| \gg |v_1^0(\alpha_1, \alpha_3)|, \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in \Omega = [-\alpha_1^0, \alpha_1^0] \times [-h/2, h/2]. \quad (9)$$

Дискретизована задача. Розглянуте вище диференціальне формулювання задачі про вільні геометрично нелінійні коливання еквівалентне задачі мінімізації функціоналу L [9]:

$$\begin{aligned} L &= - \int_{\Omega} \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial S^{ij}}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 U^T}{\partial t^2} \cdot U d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \sum_i \sum_j S^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 U^T}{\partial t^2} \cdot U d\Omega \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничні умови (5), (6) для варіаційного формулювання задачі є природними [9], а умови (7) необхідно враховувати під час її розв'язку.

У припущенні, що розглянута панель є тонкостінною, апроксимуємо невідомі переміщення u_1, u_3 за поперечною координатою [4]:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^2 u_{ik}(\alpha_1) p_k(\alpha_3), \quad i = 1, 3, \quad (11)$$

де

$$p_0(\alpha_3) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_3}{h}, \quad p_1(\alpha_3) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{h}, \quad p_2(\alpha_3) = 1 - \left(\frac{2\alpha_3}{h} \right)^2.$$

Для відшукування невідомих коефіцієнтів $u_{ik}(\alpha_1)$ в (11) використаємо за тангенціальною координатою α_1 апроксимацію на одновимірних ізопараметричних лінійних скінченних елементах [9]:

$$u_{ik}^{(e)} = \sum_{k,m} u_{ikm}^{(e)}(\alpha_1) \varphi_m^{(e)}(\xi), \quad \xi = \frac{2\alpha_1}{\alpha_{12}^{(e)} - \alpha_{11}^{(e)}} - 1, \quad (12)$$

де e – номер елемента; $u_{ikm}^{(e)} = u_{ik}(\alpha_{1m}^{(e)})$; $\alpha_{1m}^{(e)}(\alpha_1)$, $m = 1, 2$ – координати вузлів елемента; $\varphi_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$; $\varphi_2^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$.

Після підстановки (11) в (4) та результату разом з (11) в (10) отримаємо:

$$L^\Delta = \{u\}^T K_L \{u\} + \{u\}^T K_{NL}(u)\{u\} + \{u\}^T M\{\ddot{u}\} \rightarrow \min, \quad (13)$$

де $\{u\} = \{u\}(t)$ – вектор значень коефіцієнтів $u_{ikm}^{(e)}$ у точках скінченноелементного розбиття відрізка $[-\alpha_1^0, \alpha_1^0]$; K_L – лінійна, а K_{NL} – нелінійна складові матриці жорсткості; M – матриця жорсткості маси [9].

Нелінійну складову матриці жорсткості K_{NL} подаємо у вигляді

$$K_{NL}(\{u\}(t)) = B(\{u\}(t)) \cdot \{u\}^T(t) \cdot B^T(\{u\}(t)). \quad (14)$$

Матрицю $B(\{u\}(t))$ отримуємо інтегруванням у (10) членів, котрі є добутками частинних похідних переміщення u_i [9].

Мінімум дискретизованого функціоналу (13) досягається в точці $\{u\}(t)$, в якій задовольняється рівняння

$$K_L(\{u\}(t)) + K_{NL}(\{u\}(t))\{u\}(t) + M(\{\ddot{u}\}(t)) = 0. \quad (15)$$

Метод збурень. Систему нелінійних рівнянь (15) запишемо у вигляді

$$K_L(\{u\}(t)) + \mu K_{NL}(\{u\}(t))\{u\}(t) + M(\{\ddot{u}\}(t)) = 0, \quad (16)$$

де μ ($0 \leq \mu \leq 1$) – параметр збурення. При $\mu = 0$ маємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вектора $\{u\}$, а при $\mu = 1$ нелінійність враховуємо повністю. Згідно з методом збурень шуканий вектор функцій $\{u\}(t)$ та матрицю K_L подамо у вигляді

$$\{u\}(t) = \{u\}_0(t) + \mu\{u\}_1(t) + \dots, \quad K_L = K - \mu K_{L1} - \dots. \quad (17)$$

Наслідком підстановки (17) у (16) та групування виразів за однакових степенів μ є рівняння

$$M\{\ddot{u}\}_0(t) + K\{u\}_0(t) = 0, \quad (18)$$

$$M\{\ddot{u}\}_1(t) + K\{u\}_1(t) - K_{L1}(\{u\}_0(t)) + K_{NL}(\{u\}_0(t))\{u\}_0(t) = 0. \quad (19)$$

Розв'язок рівняння (18) шукатимемо у вигляді

$$\{u\}_0(t) = \tilde{u} \cos \omega t, \quad (20)$$

а розв'язок рівняння (19) подаємо так. Розглянемо рівняння (17), розв'язок якого шукатимемо у вигляді

$$\{u\}_1(t) = \{u\}_1^*(t) + \{u\}_1^\times(t), \quad (21)$$

де $\{u\}_1^*(t)$ і $\{u\}_1^\times(t)$ – розв'язки однорідного та неоднорідного рівнянь (19).

Згідно з [8] матрицю K_{L1} подаємо у вигляді

$$K_{L1} = \frac{3}{4} B\{\tilde{u}\}\{\tilde{u}\}^T B^T. \quad (22)$$

Після підстановки (20) і (22) у (19) та врахування формули [2]

$$4 \cos^3 \omega t = 3 \cos \omega t + \cos 3\omega t \quad (23)$$

для відшукування $\{u\}_1^\times(t)$ отримаємо рівняння

$$M\{\ddot{u}\}_1^\times(t) + K\{u\}_1^\times(t) = -\frac{1}{4} B\{\tilde{u}\}\{\tilde{u}\}^T B^T \{\tilde{u}\} \cos 3\omega t, \quad (24)$$

розв'язок якого шукаємо у вигляді

$$\{\tilde{u}\}_1^x(t) = \tilde{c} \cos 3\omega t. \quad (25)$$

Після підстановки (25) у рівняння (24) приходимо до співвідношення для визначення параметра \tilde{c} :

$$(K - 9\omega^2 M)\tilde{c} = -\frac{1}{4} B\{\tilde{u}\}\{\tilde{u}\}^T B^T \{\tilde{u}\}. \quad (26)$$

Якщо у початковий момент панель деформована за певним законом, який описує перша формула у (8), та перебуває у нерухомому стані, то початкові умови для функцій $\{u\}_0(t)$ та $\{u\}_1(t)$ можна подати у вигляді

$$\{u\}_0(0) = \bar{A}, \quad \{\dot{u}\}_0(0) = 0, \quad (27)$$

$$\{u\}_1(0) = 0, \quad \{\dot{u}\}_1(0) = 0. \quad (28)$$

Враховавши (2), запишемо:

$$\{u\}(t) = (\bar{A} - \tilde{c}) \cos \omega t + \tilde{c} \cos 3\omega t. \quad (29)$$

Це дає змогу побудувати такий алгоритм часткового відшукування скінченної кількості перших власних частот та амплітуд геометрично нелінійних коливань панелі:

1. Покладаємо $r = 1$ та $a_{(0)} = 0$.

2. Обчислюємо $K_{(r-1)} = K + \frac{3}{4} B a_{(r-1)} a_{(r-1)}^T B^T$.

3. Знаходимо власні значення $\omega_{(r)}$ і власні вектори $a_{(r)}$ зі системи

$$(K_{(r-1)} - \omega_{(r)}^2 M) a_{(r)} = 0.$$

4. Якщо виконуються умови $\|a_{(r)} - a_{(r-1)}\| / \|a_{(r)}\| \leq \varepsilon_1$, $\|\omega_{(r)} - \omega_{(r-1)}\| / \|\omega_{(r)}\| \leq \varepsilon_2$, де ε_1 та ε_2 – задані точності, то переходимо до кроку 5, інакше $r := r + 1$, і переходимо до кроку 2.

5. Приймаємо за розв'язок $a := a_{(r)}$, $\omega := \omega_{(r)}$ та знаходимо вектор \tilde{c} , розв'язавши систему алгебричних рівнянь

$$(K_{(r)} - 9\omega^2 M)\tilde{c} = -\frac{1}{4} B a a^T B^T a.$$

Числові результати та висновки. Для перевірки запропонованого алгоритму апробуємо його для задачі, де відомі аналітичний та числовий розв'язки [8]. Розглянемо ізотропну пластину-смугу, видовжені краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині (див. рис. 1), з геометричними $l = 1$ м; $h = 0,1$ м та механічними $E = 40000$ н/м²; $\nu = 0,3$ характеристиками.

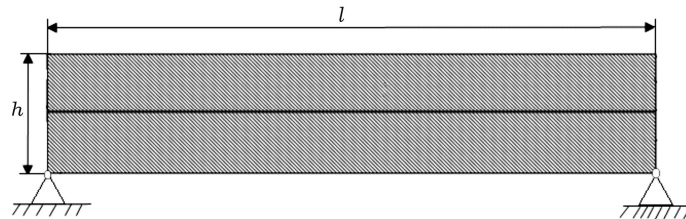


Рис. 1. Пластина-смуга з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

На рис. 2 наведено графіки вільних коливань точки, що має координати $(l/2; 0)$ для лінійного (●), аналітичного (▲) та отриманого за допомогою запропонованого алгоритму (■). Відмічено достатньо добру кореляцію з аналітичним розв'язком.

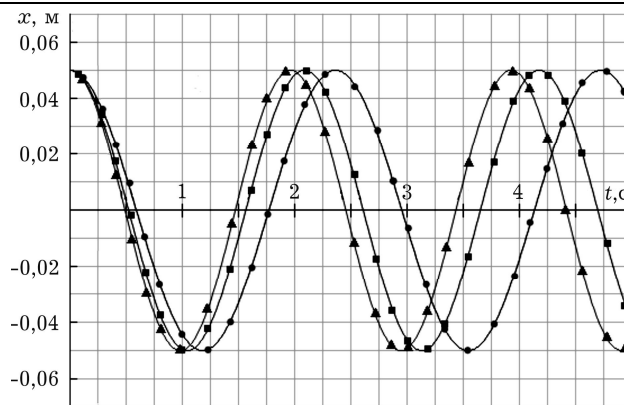


Рис. 2. Вільні коливання точки $(l / 2; 0)$.

На рис. 3 зображено чотири перші власні форми (моди) за геометрично нелінійних коливань пластини-смуги.

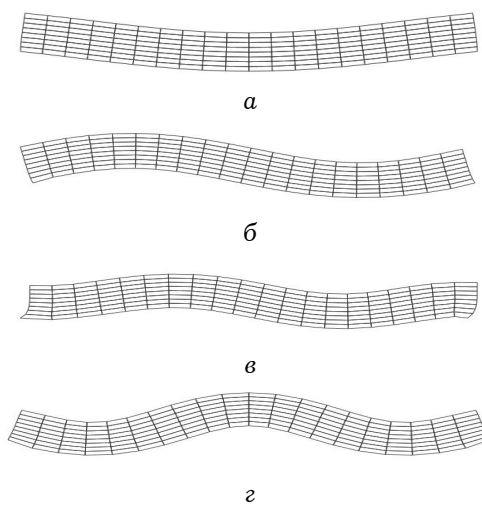


Рис. 3. Вигляд панелі в різних модах:
а – перша мода; б – друга; в – третя; г – четверта.

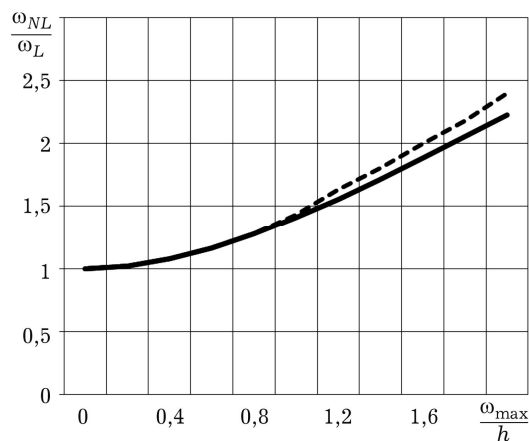


Рис. 4. Порівняння амплітудно-частотної характеристики, отриманої зі застосуванням методу збурень та результатів праці [3].

На рис. 4 наведено скелетні криві [1], побудовані за допомогою запропонованого методу (штрихова лінія) та результатами (суцільна), наведеними в праці [3]. Максимальна відносна похибка не перевищує 9%, що свідчить про достатньо хорошу апроксимаційну властивість методу. У подальшому аналогічні дослідження доцільно виконати для більш широкого класу тонкостінних елементів конструкцій та анізотропії механічних характеристик.

Дослідження виконані за часткової підтримки ДФФД України (за науковим проектом Ф 53.1/028).

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
3. Курна Л. В., Будников Н. А. Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Серія А. Природничі науки. – 2013. – № 1. – С. 55–60.
4. Марчук М. В., Муха І. С., Горячко Т. В. Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності // Modelling and Stability: Abstracts of Conference Reports. – К.: Taras Shevchenko National Univ., 2011. – Р. 301.
5. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. – 182 с.
6. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 374 p.
7. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments // Comput. Struct. – 2004. – 82(31–32). – Р. 2587–2605.
8. Lewandowski R. Free vibration of structures with cubic non-linearity-remarks on amplitude equation and Rayleigh quotient // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2003. – 192(13). – Р. 1681–1709.
9. Reddy J. N. An introduction to nonlinear finite element analysis. – Oxford University Press, 2004. – 488 p.

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ УДЛИНЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Исследована возможность применения метода возмущений для нахождения конечного количества первых значений собственных частот и форм геометрически нелинейных свободных колебаний срединных сечений удлиненных цилиндрических панелей. При использовании квадратичной аппроксимации перемещений по нормальной координате и конечноэлементной на одномерных линейных изопараметрических элементах построена соответствующая дискретизированная эквивалентная вариационная задача. Для ее решения применен метод возмущений. Полученные численные результаты сравнены с литературными.

PERTURBATION METHOD FOR ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR FREE VIBRATIONS OF ANISOTROPIC ELONGATED CYLINDRICAL PLATES

The possibilities of application the perturbation method for finding the finite number of values of the first natural frequencies and forms geometrically nonlinear free vibrations of median intersections of elongated cylindrical panels are investigated. By applying the quadratic approximation for the normal coordinate displacements and finite-element approximation on the one-dimensional linear isoperimetric elements the corresponding equivalent discrete variation problem is constructed. For its solving the method of perturbations is applied. The obtained numerical results are compared with previously obtained by other authors.