

## КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ В ТІЛАХ З ПОВЕРХНЕВОЮ ВИЙМКОЮ ЗА ПОСЛІДОВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Проаналізовано контактні напруження у двох пружних тілах, одне з яких має поверхневу виїмку, за повного закриття міжконтактного зазору під дією нормальних зусиль та за локального фрикційного проковзування, спричиненого зсувними зусиллями. На основі класичних критеріїв міцності знайдено найвірогідніші ділянки контактного руйнування для крихких або пластичних матеріалів тіл.*

**Вступ.** Базуючись на аналітичних розв'язках контактних задач для тіл з геометричними неоднорідностями поверхонь з урахуванням зчеплення та локального проковзування, можна досліджувати та оцінювати контактну міцність, зносотривкість і фретинг-втому реальних елементів машин та конструкцій [1]. Більшість праць, присвячених таким дослідженням, стосуються пружних тіл з неузгодженими поверхнями (згідно з класифікацією К. Джонсона [3]), для яких ділянка контакту мала проти розмірів самих тіл. Значно менше вивчено контактну міцність тіл з узгодженими поверхнями, коли ділянка відсутності контакту є мала порівняно з розмірами тіл [3, 9]. В основному розглянуто безфрикційний [8] або ковзний фрикційний контакти [6] тіл з узгодженими поверхнями. Проаналізовано максимальні дотичні та головні нормальні напруження в тілах з локальною поверхневою виїмкою складної форми під час контактної взаємодії за простого навантаження [7]. Під простим розумітимемо одночасне навантаження тіл нормальними зусиллями та пропорційними до них зсувними. Знайдено максимальні дотичні та головні нормальні напруження в тілах з періодичною системою виїмок простішої форми за послідовного їх навантаження нормальними та зсувними зусиллями [2, 5].

Нижче, базуючись на аналітичному розв'язку [4] задачі про фрикційну взаємодію двох тіл з поверхневою виїмкою за послідовного навантаження нормальними та зсувними зусиллями, визначили головні нормальні та максимальні дотичні напруження. На основі класичних критеріїв міцності знайдено найвірогідніші ділянки контактного руйнування для крихких та пластичних матеріалів тіл.

**Формулювання задачі.** Розглянемо контактну взаємодію двох пружних тіл  $D_1$  і  $D_2$  з однакових матеріалів (модулі зсуву  $G_1 = G_2 = G$  та коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) в умовах плоскої деформації. Межа тіла  $D_2$  плоска, а межа тіла  $D_1$  на відрізку  $x \in [-b, b]$  має пологу виїмку, форму якої описує гладка функція

$$r(x) = -r_0 \left(1 - x^2/b^2\right)^{n+1/2}, \quad |x| \leq b. \quad (1)$$

Тут  $r_0$  і  $2b$  – максимальна глибина та довжина виїмки;  $n = 1, 2, \dots$  – натуральний параметр;  $0 < r_0/b \ll 1$ .

Тіла взаємодіють під дією послідовного навантаження: спершу вони притискаються одне до одного рівномірно розподіленими на нескінченності нормальними зусиллями інтенсивності  $P$  (рис. 1). При цьому монотонно зменшуються розміри міжконтактного зазору, зумовленого рельєфом поверхні одного з тіл. Залежно від нормальних зусиль відбувається або неповний контакт тіл, за якого в межах виїмки буде зазор між поверхнями, або повний. Перша ситуація реалізується, коли [4]  $P < P_{cls}$ , друга – коли

$P \geq P_{cls}$ , де  $P_{cls} = Gr_0(2n+1)(2n-1)!!/2^{n-1}n!(1+\kappa)b$  – нормальні зусилля, за яких зазор повністю закритється і всі точки поверхонь обох тіл контактуватимуть. Розглянемо ситуацію, коли  $P \geq P_{cls}$  та відбувається повний контакт тіл.

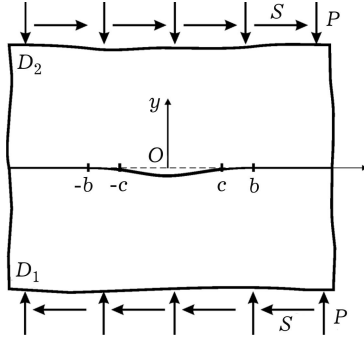


Рис. 1. Контакт тіл.

Далі, на другому етапі, нормальні навантаження залишаються сталими, а до тіл на безмежності прикладаються зсувні зусилля  $S$  (рис. 1). Поверхні тіл, згідно із законом Кулона–Амонтона, перебувають у зчепленні доти, доки дотичні контактні напруження  $\tau_{xy}(x, 0)$  є менші, ніж нормальні контактні  $\sigma_y(x, 0)$ , помножені на коефіцієнт тертя  $f$ . Після досягнення дотичними зусиллями  $S$  критичного значення  $S_0$ , яке згідно з результатами праці [4] рівне  $S_0 = f \left( P - \frac{Gr_0(2n+1)(2n-1)!!}{2^{n-1}n!(1+\kappa)b} \right)$ , в межах

виїмки, починаючи від її центра, розвиватиметься ділянка проковзування, на якій діють сили тертя  $\tau_{xy}(x, 0) = f |\sigma_y(x, 0)|$ .

Для нормальних  $P \geq P_{cls}$  та зсувних  $S \geq S_0$  зусиль крайові умови контактної задачі про фрикційне проковзування тіл на невідомій ділянці  $[-c, c]$  такі:

$$\begin{aligned} \sigma_y^-(x, 0) &= \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \\ |\tau_{xy}^-(x, 0)| &= f |\sigma_y^-(x, 0)|, \quad |x| < c, \\ u^-(x, 0) - u^+(x, 0) &= 0, \quad |x| \geq c, \\ v^-(x, 0) - v^+(x, 0) &= -r(x), \quad |x| \leq b, \quad v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = 0, \quad |x| > b, \\ \sigma_y(x, \pm\infty) &= -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = S, \quad |x| < \infty \\ \sigma_x(\pm\infty, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = S, \quad |y| < \infty. \end{aligned}$$

У праці [4] визначено аналітичний розв'язок сформульованої контактної задачі, зокрема, знайдено відносний зсув поверхонь тіл на ділянці проковзування

$$\begin{aligned} U(x) &= - \left[ \frac{1+\kappa}{2G} (S - fP) + \frac{(2n+1)r_0f(2n-1)!!}{2^n n! b} \right] \sqrt{c^2 - x^2} - \\ &\quad - \frac{(2n+1)r_0f}{b} (H_0(x) + H_2(x) + H_4(x) + \dots + H_{2n}(x)), \quad |x| < c, \end{aligned}$$

і записано рівняння для знаходження невідомої довжини ділянки проковзування  $c$ :

$$S - fP + \frac{(2n+1)Gr_0f(2n-1)!!}{2^{n-1}n!b(1+\kappa)} - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} P^{(d)}(c) = 0.$$

$$\text{Тут } H_{2j}(x) = -c \cdot d_{2j} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k j!}{k!(j-k)!(2k+1)} \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} \right)^{k+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$P^{(d)}(x) = d_0 + d_2 (x/c)^2 + d_4 (x/c)^4 + \dots + d_{2n} (x/c)^{2n}, \quad d_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a_{2k} \frac{c^{2k}}{b^{2k}},$$

$$d_{2n} = -a_{2n} \frac{c^{2n}}{b^{2n}}, \quad d_{2j} = -a_{2j} \frac{c^{2j}}{b^{2j}} + \sum_{k=j+1}^n \frac{(2k-2j-3)!!}{(2k-2j)!!} a_{2k} \frac{c^{2k}}{b^{2k}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

**Максимальні дотичні та головні нормальні напруження.** Використовуючи вирази для нормальних і дотичних контактних напружень, що отримані у праці [4], за формулами

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \tau_{\max}$$

визначаємо максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  та головні нормальні  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(x, 0) &= \left( \left( \frac{P}{2} + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( fP - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(w)}(x) \right) \right)^2 \right)^{1/2}, \quad |x| \leq c, \\ \tau_{\max}(x, 0) &= \left( \frac{P^2}{4} + \left( fP - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(w)}(x) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad |x| > c, \\ \sigma_{1,2}(x, 0) &= \frac{2G(2n+1)r_0}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + P^{(a)}(x) \right) - \frac{P}{2} + \\ &\quad + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \pm \\ &\quad \pm \left( \left( \frac{P}{2} + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( fP - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(w)}(x) \right) \right)^2 \right)^{1/2}, \quad |x| \leq c, \\ \sigma_{1,2}(x, 0) &= \frac{2G(2n+1)r_0}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + P^{(a)}(x) \right) - \frac{P}{2} \pm \\ &\quad \pm \left( \frac{P^2}{4} + \left( fP - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(w)}(x) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad c < |x| < b, \\ \sigma_{1,2}(x, 0) &= \frac{2G(2n+1)r_0}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + (-1)^{n+1} \left| \frac{x}{b} \right| \left( \frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^{n-1/2} + P^{(a)}(x) \right) - \frac{P}{2} \pm \\ &\quad \pm \left( \frac{P^2}{4} + \left( fP - \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(w)}(x) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0f}{(1+\kappa)b} \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - P^{(d)}(x) \right) \right) \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad |x| \geq b. \end{aligned}$$

Тут знак "+" відноситься до  $\sigma_1$ , а знак "-" до  $\sigma_2$ ,

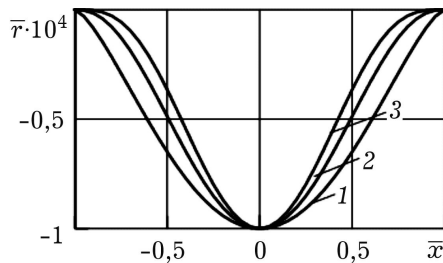
$$P^{(a)}(x) = a_2 (x/b)^2 + a_4 (x/b)^4 + \dots + a_{2n} (x/b)^{2n},$$

$$a_{2(j+1)} = \sum_{k=j+1}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(2k-2j-3)!!}{(2k-2j-2)!!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$P^{(w)}(x) = w_0 + w_2 (x/c)^2 + w_4 (x/c)^4 + \dots + w_{2n} (x/c)^{2n},$$

$$w_{2j} = \sum_{k=j}^n \frac{(2k-2j-1)!!}{(2k-2j)!!} d_{2k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

**Аналіз контактної міцності.** Базуючись на аналітичному розв'язку задачі, проаналізуємо контактну міцність спряжених тіл. Міцність тіл з крихких матеріалів оцінюватимемо за першою класичною теорією міцності, а тіл з матеріалів, схильних до пластичного течіння, – за третьою. Згідно з першою теорією міцності, руйнування тіл спричиняють головні нормальні напруження  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ . Матеріал руйнується тоді, коли напруження  $\sigma_1$  досягають чи перевищують границю міцності на розтяг  $\sigma_t$ , або напруження  $\sigma_2$  досягають чи перевищують границю міцності на стиск  $\sigma_c$ . Згідно з третьою теорією матеріал руйнується тоді, коли максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  досягнуть границю текучості  $\tau_*$ .



Максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  та головні нормальні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  на поверхні тіл проаналізовано для заданих формулою (1) виїмок, коли  $n = 1, 2, 3$ , зображених на рис. 2 (крива 1 –  $n = 1$ , крива 2 –  $n = 2$ , крива 3 –  $n = 3$ ). Отримані результати проілюстровано на рис. 3–4 для безрозмірних параметрів  $\bar{x} = x/b$ ,  $\bar{r}_0 = r_0/b$ ,

$\bar{c} = c/b$ ,  $\bar{P} = P/G$ ,  $\bar{S} = S/G$ ,  $\bar{\tau}_{\max} = \tau_{\max}/G$ ,  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/G$ ,  $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/G$ . Всі обчислення виконано для коефіцієнта тертя  $f = 0.1$ , максимальної глибини виїмки  $\bar{r}_0 = 10^{-4}$ , коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0.2$  та нормальних зусиль  $\bar{P} = 2 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 3 зображено розподіл максимальних дотичних напружень  $\bar{\tau}_{\max}$  для зсувних зусиль  $\bar{S}$ : 1 –  $\bar{S} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ ; 2 –  $\bar{S} = 1,8 \cdot 10^{-5}$ . Свого максимуму вони досягають на ділянці проковзування поблизу її правого краю та зростають зі збільшенням зсувних зусиль. Отже, для пластичних матеріалів контактне руйнування шляхом пластичного течіння найшвидше розпочнеться поблизу правого краю ділянки проковзування.

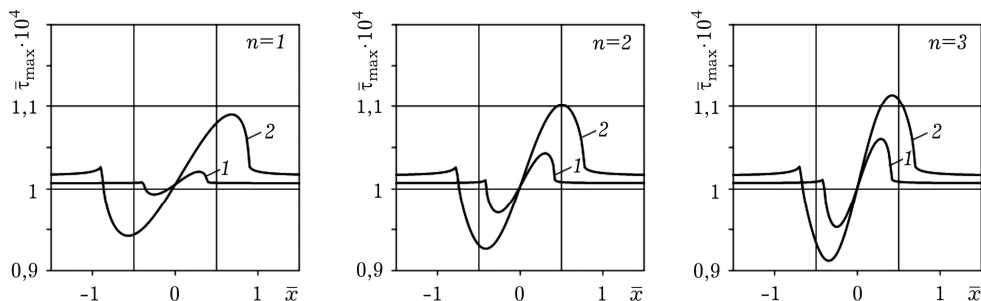


Рис. 3. Розподіл максимальних дотичних напружень  $\bar{\tau}_{\max}$ .

На рис. 4а зображено розподіл головних нормальних напружень  $\bar{\sigma}_1$  для зсувних зусиль  $\bar{S}$ : 1 –  $\bar{S} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ ; 2 –  $\bar{S} = 1,8 \cdot 10^{-5}$ . Напруження  $\bar{\sigma}_1$  є розтягувальними на деякій центральній ділянці виїмки, яка є найдовшою, якщо  $n = 1$ , і найкоротшою, якщо  $n = 3$ . Поза цією ділянкою в межах виїмки та ззовні неї  $\bar{\sigma}_1$  стискальні і мають максимум поблизу центра виїмки справа від неї для всіх трьох випадків  $n = 1, 2, 3$ . Згідно з першою класичною теорією міцності руйнування крихких матеріалів контактної пари від розтягу, найімовірніше, розпочнеться поблизу центра виїмки.

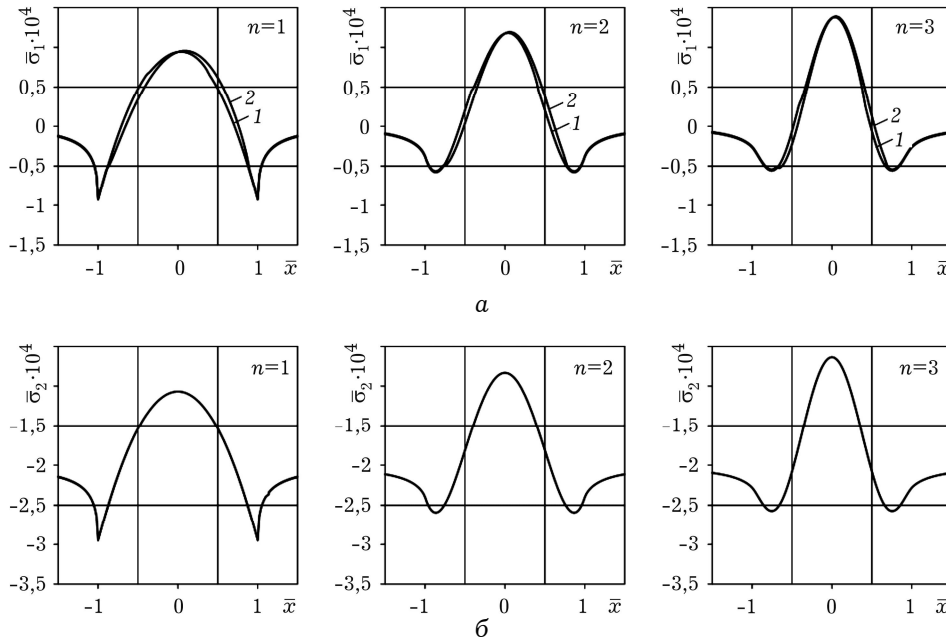


Рис. 4. Розподіл головних нормальних напружень  $\bar{\sigma}_1$  (а) і  $\bar{\sigma}_2$  (б).

На рис. 4б подано розподіл головних нормальних напружень  $\bar{\sigma}_2$  для зсувних зусиль  $\bar{S} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ . Напруження  $\bar{\sigma}_2$  скрізь стискальні ( $\bar{\sigma}_2 < 0$ ), а їх абсолютні значення  $|\bar{\sigma}_2|$  досягають свого максимуму на краях виїмки, коли  $n = 1$ , та поблизу їх, коли  $n = 2$  і  $n = 3$ . Отже, саме в цих місцях, найімовірніше, відбуватиметься руйнування крихких матеріалів контактної пари від стиску.

**Висновки.** Досліджено фрикційну взаємодію пружних тіл з поверхневою виїмкою за послідовного навантаження нормальними та зсувними зусиллями. Для загальної форми виїмки певного класу знайдено максимальні дотичні та головні нормальні напруження на поверхні контакту. Базуючись на класичних теоріях міцності, виявили, що для крихких матеріалів тріщиноутворення найшвидше розпочнеться поблизу центра виїмки або її країв, а для пластичних матеріалів пластичне течіння, найімовірніше, відбуватиметься поблизу правого краю ділянки проковзування.

1. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // Прикл. математика и механика. – 2012. – 76, В 5. – С. 695–709.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

4. Маланчук Н., Качиньські А. Фрикційна взаємодія двох півплощин за наявності поверхневої виїмки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 1. – С. 64–71.
5. Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., Martynyak R. M., Chumak K. A. Contact strength of solids with periodic relief under partial frictional slip // 19th European Conference on Fracture. Proceedings CD: 8 p., ISBN 978-5-905576-18-8. – Kazan, 2012.
6. Kryshchak A., Martynyak R. Strength of a system of mated anisotropic half-planes with surface recesses // Int. J. Eng. Sci. – 2001. – **39**. – P. 403–413.
7. Malanchuk N., Martynyak R. Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading // Int. J. Solids Struct. – 2012. – **49**, Issue 23–24. – P. 3422–3431.
8. Monastyrskyy B., Kaczynski A. Contact strength of two elastic half-spaces with an circular recess // Mat. Sci. – 2011. – **46**, № 4. – P. 505–516.
9. Urriolagoitia Sosa G., Hills D.A. Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions // J. Strain Anal. Eng. Design. – 1999. – **34**. – P. 175–181.

#### **КОНТАКНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕЛАХ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ВЫЕМКОЙ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Проанализированы контактные напряжения в двух упругих телах, одно из которых имеет поверхностную выемку, при полном закрытии межконтактного зазора под воздействием нормальных усилий и при локальном фрикционном проскальзывании, обусловленного сдвигающими усилиями. На основании классических критериев прочности определены наиболее вероятные участки контактного разрушения для хрупких или пластических материалов тел.*

#### **CONTACT STRESSES IN SOLIDS WITH SURFACE GROOVE UNDER SEQUENTIAL LOADING**

*Contact stresses in two elastic solids, one of which has a surface groove, for the case of complete closure of the intercontact gap, due to normal forces, and local frictional slip caused by shear forces are analyzed. The most possible regions of contact fracture for brittle and plastic materials are found on the basis of the classical strength criteria.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
15.09.13