УДК 517.5

Я. Д. П'янило, В. Г. Собко

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ БІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ НА БАЗІ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШЕВА

У базисі многочленів Чебишева першого роду побудовано біортогональну систему поліномів, розглянуто задачу апроксимації функції в побудованому біортогональному базисі. Під час обчислювального експерименту на модельних задачах досліджено вплив різного роду похибок на апроксимацію.

Вступ. Спектральні методи використовують для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Показано [6, 7], що вибір ортогонального базису слід узгоджувати з областю визначення шуканого розв'язку. Поряд з ортогональними многочленами для розв'язування прикладних задач використовують і біортогональні розклади. На сьогодні небагато праць, присвячених їх дослідженню та використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

Мета праці - побудувати та дослідити властивості оператора інтегрування типу Вольтерра в базисі многочленів Чебишева першого роду $T_j(x)$ і на цій основі побудувати квазіспектральні поліноми. Навести алгоритми побудови квазіспектральних поліномів, які дають можливість створювати повні біортогональні системи. Однією з позитивних властивостей біортогональних розкладів є те, що під час їх застосування до розв'язування різного роду задач відповідні ряди мають різну швидкість збіжності. Отримані теоретичні результати апробовані на модельних задачах та досліджено вплив різних похибок на процес апроксимації.

Побудова квазіспектральних поліномів. Розглянемо оператор інтегрування $L : L_{2,\rho}[-1,1] \to L_{2,\rho}[-1,1]$ з ваговою функцією $\rho = 1\big/\sqrt{1-x^2}$, який для функції $f \in L_{2,\rho}[-1,1]$ ставить у відповідність вираз

$$Lf(x) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2)\,dx_2 = \int_{-1}^{x} (x - x_1) f(x_1)\,dx_1 \,. \tag{1}$$

Відомо [4], що вираз (1) не має відмінних від нуля власних значень. Отже, відповідна задача про побудову власних функцій для цього оператора позбавлена сенсу. Тому замість спектральної задачі на власні значення розглядатимемо відповідну квазіспектральну, ґрунтуючись на властивостях інтегрального оператора (1) в гільбертовому просторі $L_{2,\rho}[-1,1]$. Побудуємо оператор $\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1} \ : \pi_1^\infty \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1}$, який переводить непарні поліноми в парні, а парні − в непарні.

Означення. Нехай $\tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ − повний підпростір гільбертового простору $L_{2,\rho}[-1,1]$, всі елементи якого задовольняють інтегральне рівняння $\int_{-1}^{1} u(x)\,dx = 0$.

Значення оператора

$$\pi_1^{\infty}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1} : \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \to \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \qquad (2)$$

на елементах базису із поліномів Чебишева відрізняються від значень оператора (1) нульовим доданком ряду Фур'є–Чебишева. Проте спектральні властивості цих операторів кардинально різні. Оператор $\pi_1^{\infty}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1}$ має характеристичні значення і власні функції, а спектральний радіус компактного оператора типу Вольтерра $\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1}$ не має власних значень, відмінних від нуля [4].

Побудова біортогональних поліномів.

Твердження 1. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$, $i = 1,\dots,s$, такий, що $\int_{-1}^{1} \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) \bar{U}_{2j-1}^{2s-1}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ c_{2i-1}, & i = j \end{cases}$,

то коефіцієнти c_{2j-1}^{2i-1} знаходять згідно з таким алгоритмом.

Алгоритм 1.

1. Коефіцієнту $\bar{c}_1$ надаємо значення 1, тобто $\bar{c}_1 = 1$.

2. Коефіцієнт $\bar{c}_3$ визначаєм так: $\bar{c}_3 = -24\left(\lambda_{2i-1} - \frac{3}{8}\right)\bar{c}_1$.

3. Коефіцієнт $\bar{c}_5 = -80\left(\frac{\bar{c}_1}{4} + \left(\lambda_{2i-1} - \frac{1}{16}\right)\bar{c}_3\right)$.

4. Наступні коефіцієнти знаходимо в циклі за рекурентними співвідношеннями

$$\bar{c}_{2k-1} = -4(2k-2)(2k-1)\left(\frac{\bar{c}_1}{4(k-1)(k-2)} + \frac{\bar{c}_{2k-5}}{4(2k-4)(2k-5)} + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda_{2i-1} - \frac{1}{2(2k-2)(2k-4)}\right)\bar{c}_{2k-3}\right), \qquad k = 4,\dots,s.$$

5. Нормувальний множник $r = 1 / \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \left(\bar{c}_{2k-1}\right)^2}$.

6. Невідомі коефіцієнти $\bar{c}_{2j-1}^{2i-1} \leftarrow r\bar{c}_{2j-1}$, $j = 1,\dots,s$.

7. Алгоритм виконуємо в циклі для $i = 1,\dots,s$, де власні значення оператора (2) λ_{2i-1} визначені для непарного випадку з рівнянь

$$P^0(\lambda) = 0,\ P^1(\lambda) = \left(\lambda + p_{1,1}\right), \qquad (3)$$

$$P^k(\lambda) = \left(\lambda + p_{k,k}\right)P^{k-1}(\lambda) - p_{k,k-1}p_{k-1,k}P^{k-2}(\lambda) - (-1)^k \prod_{i=2}^{k} p_{i,i-1}p_{1,k},$$

де $p_{i,j}$, $i,j = 1,\dots s$ – елементи матриці, отриманої внаслідок дії оператора (2) для непарних поліномів Чебишева.

Твердження 2. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^{s} \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x)$, $i = 1,\dots,s$, такий, що

$\int_{-1}^{1} \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) \bar{U}_{2j}^{2s}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ c_{2i}, & i = j \end{cases}$,

то його коефіцієнти c_{2j}^{2i} знаходять згідно з алгоритмом.

Алгоритм 2.

1. Коефіцієнту $\bar{c}_2$ надаємо значення 1, тобто $\bar{c}_2 = 1$.

2. Коефіцієнт $\bar{c}_4$ знаходимо за формулою $\bar{c}_4 = -48\left(\lambda_{2i} - \frac{1}{6}\right)\bar{c}_2$.

3. Коефіцієнт $\bar{c}_6 = -120\left(\frac{\bar{c}_2}{24} + \left(\lambda_{2i} - \frac{1}{30}\right)\bar{c}_4\right)$.

4. Наступні коефіцієнти визначаємо в циклі за рекурентними співвідношеннями

$$\bar{c}_{2k} = -4(2k)(2k-1)\left(\frac{\bar{c}_2}{4(2k-1)(2k-3)} + \frac{\bar{c}_{2k-4}}{4(2k-3)(2k-4)} + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda_{2i} - \frac{1}{2(2k-3)(2k-1)}\right)\bar{c}_{2k-2}\right), \qquad k = 4, ..., s.$$

5. Знаходимо нормувальний множник $r = 1 / \sqrt{\sum_{k=1}^{s} (\bar{c}_{2k})^2}$.

6. Невідомі коефіцієнти обчислюємо так: $\bar{c}_{2j}^{2i} \leftarrow r\bar{c}_{2j}$, $j = 1, ..., s$.

7. Алгоритм виконуємо в циклі для $i = 1, ..., s$, де λ_{2i} – власні значення оператора (2) для парного випадку, знайдені з характеристичного полінома, обчисленого згідно з рекурентними формулами (3), де $p_{i,j}$, $i, j = 1, ...s$ – елементи матриці, отриманої внаслідок дії оператора (2) для парних поліномів Чебишева.

Властивості квазіспектральних поліномів.

Проінтегруємо поліноми $U_i^s(x)$ у межах від -1 до x. Отримаємо:

$$V_{2i}^{2s}(x) = \int_{-1}^{x} U_{2i-1}^{2s-1}(x_1)\,dx_1 = \sum_{j=1}^{s} c_{2j-1}^{2i-1} \int_{-1}^{x} \left(\pi_x T_{2j-1}\right)(x_1)\,dx_1, \quad i = 1, ..., s, \tag{4}$$

$$V_{2i-1}^{2s+1}(x) = \int_{-1}^{x} U_{2i}^{2s}(x_1)\,dx_1 = \sum_{j=1}^{s} c_{2j}^{2i} \int_{-1}^{x} \left(\pi_x T_{2j}\right)(x_1)\,dx_1, \quad i = 1, ..., s. \tag{5}$$

Якщо поліноми $\bar{U}_i^s(x)$ проінтегрувати в межах від -1 до x з вагою $\rho(x)$, то

$$\bar{V}_{2i}^{2s}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^{x} \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}\,dx_1, \quad i = 1, ..., s, \tag{6}$$

$$\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^{x} \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}\,dx_1, \quad i = 1, ..., s. \tag{7}$$

Поліноми $V_{2i-j}^{2s+j}(x)$ та $\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)$, $i = 1, ..., s$, $j = \overline{0,1}$, є біортогональними на проміжку від -1 до +1 і володіють властивостями:

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) V_{2i}^{2s}(x) \bar{V}_{2j}^{2s}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i-1}/\lambda_{2i-1}, & i = j \end{cases},$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) \bar{V}_{2j-1}^{2s+1}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i}/\lambda_{2i}, & i = j \end{cases},$$

$$V_{2i}^{2s}(-1) = V_{2i}^{2s}(1) = 0, \; \bar{V}_{2i}^{2s}(-1) = \bar{V}_{2i}^{2s}(1) = 0,$$

$$V_{2i-1}^{2s+1}(-1) = V_{2i-1}^{2s+1}(1) = 0, \; \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(-1) = \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(1) = 0.$$

Обчислювальний експеримент.

Приклад 1. Нехай $\Phi(x) = \cos x - 0,5\left[\cos(-1) + \cos(1)\right]$. Знайдемо коефіцієнти та часткові суми $\Phi_{2s+1}(x) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}\varphi_{2i-j}V_{2i-j}^{2s+j}(x)$ та $\bar{\Phi}_{2s+1}(x) = .$ $= \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\bar{\varphi}_{2i-j}\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)$. Невідомі коефіцієнти φ_{2i-j} та $\bar{\varphi}_{2i-j}$ знаходимо так:

$$\varphi_{2i-j} = h_{2i-j}^{-1}\int_{-1}^{1}\rho(x)\varphi(x)\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)\,dx, \qquad \bar{\varphi}_{2i-j} = h_{2i-j}^{-1}\int_{-1}^{1}\rho(x)\varphi(x)V_{2i-j}^{2s+j}(x)\,dx,$$

$$h_{2i-j} = \int_{-1}^{1}\rho(x)V_{2i-j}^{2s+j}(x)\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)\,dx.$$

Інтеграли визначимо за допомогою квадратурних формул порядку m. Результати обчислень подано у вигляді таблиць. Множник $(-N)$ означає $\times 10^{-N}$. Надалі вважатимемо, що $n = 2s$.

Таблиця 1.

Залежність стійкості обчислень коефіцієнтів від похибки q для $n = 10$, $m = 32$

φ_i	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$	$\bar{\varphi}_i$	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$
φ_2	-0,841002	-0,8410020	-0,8410021	$\bar{\varphi}_2$	0,516416	0,5164132	0,5164132
φ_4	0,553687(-1)	0,5537967(-1)	0,5537953(-1)	$\bar{\varphi}_4$	0,249766	0,2497734	0,2497735
φ_6	-0,194872(-1	-0,1932325(-1	-0, 1932465(-1)	$\bar{\varphi}_6$	0,191903	0,1917867	0,191787
φ_8	-0,920766(-2	-0,1058995(-1	-0, 1061236(-1)	$\bar{\varphi}_8$	0,192706	0,1944100	0,1944061
φ_{10}	0,131645(-1)	0,1282124(-1)	0,1281685(-1)	$\bar{\varphi}_{10}$	0,182997	0,1833310	0,1833316

Таблиця 2.

Результати розрахунку коефіцієнтів за різних порядків квадратурної формули і точності обчислень

φ_i	$m = 32$		$m = 64$	
	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$
φ_2	-0,8410021315	-0,8410021317117916	-0,8410021317	-0,8410021317117926
φ_4	0,5538081220(-1)	0,5538082152098281(-1)	0,5538082214(-1)	0,5538082152099605(-1)
φ_6	-0,1902234578(-1)	-0,1902228818869918(-1)	-0,1902235219(-1)	-0,1902228818874203(-1)
φ_8	0,9536166140(-2)	0,9536017562528369(-2)	0,9535714763(-2)	0,9536017563100237(-2)
φ_{10}	-0,5734908656(-2)	-0,5731784483925621(-2)	-0,5734946631(-2)	-0,5731784480399962(-2)
φ_{12}	-0,2726600876(-2)	-0,2765158631302883(-2)	-0,2707282283(-2)	-0,2765158565708843(-2)
φ_{14}	-0,4012341171(-2)	-0,4032113858922699(-2)	-0,3987165616(-2)	-0,4032113819811012(-2)
φ_{16}	0,4227275632(-2)	0,4190271198391008(-2)	0,4197872782(-2)	0,4190271222573633(-2)
φ_{18}	0,3679537060(-2)	0,3657156053669544(-2)	0,3675613910(-2)	0,3657156117362212(-2)

Таблиця 3.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\Delta R_n^{(q)}(x_i)$ функції для різних значень n та q

x_i	$\Delta R_{18}^{(-10)}(x_i)$	$\Delta\bar{R}_{18}^{(-10)}(x_i)$	$\Delta R_{18}^{(-16)}(x_i)$	$\Delta\bar{R}_{18}^{(-16)}(x_i)$
1	2	3	4	5
0	0,20718(-5)	-0,19365(-5)	0,4543(-12)	-0,18321(-11)
0,1	-0,3783(-6)	0,3902(-6)	-0,2100(-12)	0,6796(-12)
0,2	-0,20291(-5)	0,18144(-5)	-0,4344(-12)	0,13481(-11)

Продовження табл. 3

1	2	3	4	5
0,3	0,12026(-5)	-0,11501(-5)	0,5442(-12)	-0,19874(-11)
0,4	0,17350(-5)	-0,12635(-5)	0,2923(-12)	0,4571(-12)
0,5	-0,21223(-5)	0,15782(-5)	-0,5110(-12)	0,24165(-11)
0,6	-0,7334(-6)	-0,27(-8)	-0,1416(-12)	-0,39950(-11)
0,7	0,23340(-5)	-0,2481(-6)	-0,5053(-12)	0,16462(-11)
0,8	-0,4216(-6)	-0,3631(-6)	0,24666(-11)	0,23953(-11)
0,9	-0,128898(-5)	0,165063(-5)	-0,275087(-11)	-0,279019(-11)
1	-0,404(-7)	0,28690(-5)	-0,749000(-13)	0,68640(-12)

Таблиця 4.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\Delta R_n^{(q)}(x_i)$ функції для різних значень n та q

x_i	$\Delta R_{18}^{(-22)}(x_i)$	$\Delta \bar{R}_{18}^{(-22)}(x_i)$	$\Delta R_{18}^{(-32)}(x_i)$	$\Delta \bar{R}_{18}^{(-32)}(x_i)$
0	-0,43133(-17)	-0,21104(-17)	0,81579(-24)	0,81570(-24)
0,1	0,6888(-18)	0,8639(-18)	-0,33835(-24)	-0,33830(-24)
0,2	0,40041(-17)	0,16455(-17)	-0,52253(-24)	-0,52248(-24)
0,3	-0,21656(-17)	-0,25698(-17)	0,79884(-24)	0,79870(-24)
0,4	-0,27475(-17)	0,1636(-18)	-0,28365(-24)	-0,28357(-24)
0,5	0,34081(-17)	0,34868(-17)	-0,42787(-24)	-0,42770(-24)
0,6	-0,1791(-18)	-0,40070(-17)	0,78740(-24)	0,78708(-24)
0,7	-0,17041(-17)	0,1173(-18)	-0,79143(-24)	-0,79123(-24)
0,8	0,8380(-18)	0,38915(-17)	0,76182(-24)	0,76189(-24)
0.9	0,17762(-18)	-0,240503(-17)	-0,78222(-24)	-0,78271(-24)
1	-0,366(-19)	-0,3045(-18)	0,338(-29)	0,3183(-28)

Таблиця 5.

Вплив порядку та кількості поліномів Чебишева на обчислення коефіцієнтів $\bar{\varphi}_i$, які використовують для побудови біортогональних многочленів, для $m = 32$ з точністю обчислення $q = 10^{-10}$

	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 14$	$n = 20$
$\bar{\varphi}_2$	0,5158321516	0,5162588894	0,5164132988	0,5164831615	0,5165190625	0,5165594819
$\bar{\varphi}_4$	0,2516285303	0,2496791625	0,2497735389	0,2497926931	0,2498066461	0,2498226476
$\bar{\varphi}_6$	0,2386207451	0,2134156726	0,1917879585	0,1907298411	0,1907174805	0,1907295480
$\bar{\varphi}_8$		0,2019045181	0,1944060840	0,1795336646	0,1607510298	0,1604384312
$\bar{\varphi}_{10}$			0,1833317078	0,1722806572	0,1675417960	0,1411752207
$\bar{\varphi}_{12}$				0,1661280557	0,1631462293	0,1285564380
$\bar{\varphi}_{14}$					0,1545462872	0,1408730559

Аналогічні результати і для коефіцієнтів φ_i.

Обчислювали також і для монотонних функцій.

Приклад 2. Нехай $\Phi(x) = e^x - 0.5\left(e^1 + e^{-1}\right) - 0.5\left(e^1 - e^{-1}\right)x$. Результати обчислень подані в таблицях.

Таблиця 6.

Значення коефіцієнтів φ_i для $n = 10$, $m = 32$ з різною точністю обчислення q

	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$
1	2	3	4	5	6
φ_1	0,32	0,2191	0,219999	0,2200038	0,2200038
φ_2	0,96	1,016	1,01647	1,0164678	1,0164678
φ_3	-0,1	-0,5977(-1)	-0,597686(-1)	-0,5979217(-1)	-0,5979278(-1)

Продовження табл. 6

1	2	3	4	5	6
φ_4	0,96(-1)	-0,1441	-0,144521	-0,1445308	-0,1445308
φ_5	0,71	-0,6939(-1)	0,187149(-1)	0,1797442(-1)	0,1798045(-1)
φ_6	0,39(-1)	0,1839(-1)	0,536377(-1)	0,5343365(-1)	0,5343554(-1)
φ_7	-0,7(-1)	0,5612(-1)	0,275970(-1)	0,2800956(-1)	0,2800741(-1)
φ_8	0,76(-1)	0,4771	0,282840(-1)	0,3019348(-1)	0,3022307(-1)
φ_9	-0,63(-1)	-0,6024(-1)	-0,232585(-1)	-0,2185457(-1)	-0,2185123(-1)
φ_{10}	-1,4	-0,9573(-1)	-0,365695(-1)	-0,3609259(-1)	-0,3608700(-1)

Таблиця 7.

Вплив порядку квадратурної формули m та точності обчислення q

$\overline{\varphi}_i$	$m = 32$		$m = 64$	
	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$
$\overline{\varphi}_1$	-0,1855163685	-0,1855163674000813	-0,1855163699	-0,1855163674000817
$\overline{\varphi}_2$	-0,6266295017	-0,6266294992490467	-0,6266295022	-0,6266294992490460
$\overline{\varphi}_3$	-0,1163896571	-0,1163896564921923	-0,1163896523	-0,1163896564921958
$\overline{\varphi}_4$	-0,3691420148	-0,3691420105644407	-0,3691420113	-0,3691420105644346
$\overline{\varphi}_5$	-0,8926529460(-1)	-0,8926532650386368(-1)	-0,8926532016(-1)	-0,8926532650386922(-1)
$\overline{\varphi}_6$	-0,2788923726	-0,2788924057695956	-0,2788923924	-0,2788924057695922
$\overline{\varphi}_7$	-0,7452341029(-1)	-0,7452382955441131(-1)	-0,7452289614(-1)	-0,7452382955459861(-1)
$\overline{\varphi}_8$	-0,2324007217	-0,2324000956677709	-0,2324004419	-0,2324000956681079
$\overline{\varphi}_9$	-0,6529588519(-1)	-0,6529600983529250(-1)	-0,6529593885(-1)	-0,6529600983902234(-1)
$\overline{\varphi}_{10}$	-0,2034252931	-0,2034253736681622	-0,2034261091	-0,2034253736626350
$\overline{\varphi}_{11}$	-0,6485680545(-1)	-0,6485658033849316(-1)	-0,6481014582(-1)	-0,6485658039978618(-1)
$\overline{\varphi}_{12}$	-0,2097377949	-0,2096225499198289	-0,2098061935	-0,2096225498453046
$\overline{\varphi}_{13}$	-0,6644379977(-1)	-0,6642360810676869(-1)	-0,6643448028(-1)	-0,6642360810116852(-1)
$\overline{\varphi}_{14}$	-0,2050072727	-0,2050177233038453	-0,2050164095	-0,2050177232646628
$\overline{\varphi}_{15}$	-0,6655090725(-1)	-0,6647464316630985(-1)	-0,6657390683(-1)	-0,6647464319391595(-1)
$\overline{\varphi}_{16}$	-0,1910553197	-0,1910814513476299	-0,1910545673	-0,1910814513520610
$\overline{\varphi}_{17}$	-0,6240534212(-1)	-0,6242526719539417(-1)	-0,6241181488(-1)	-0,6242526718144028(-1)
$\overline{\varphi}_{18}$	-0,2094721794	-0,2095192867851294	-0,2095036762	-0,2095192868805587

Таблиця 8.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\Delta R_n^{(q)}(x_i)$ функції
для різних значень n та q

x_i	$\Delta R_{19}^{(-22)}(x_i)$	$\Delta \overline{R}_{19}^{(-22)}(x_i)$	$\Delta R_{19}^{(-32)}(x_i)$	$\Delta \overline{R}_{19}^{(-32)}(x_i)$
1	2	3	4	5
-1	0,234(-19)	-0,4021(-17)	0,926(-29)	0,5254(-28)
-0,8	-0,14016(-17)	-0,66088(-17)	0,76967563(-24)	0,76939063(-24)
-0,6	-0,15901(-17)	0,44952(-17)	0,79055525(-24)	0,79101863(-24)
-0,4	0,53001(-17)	0,15095(-17)	-0,30373698(-24)	-0,30361199(-24)
-0,2	-0,62093(-17)	-0,32369(-17)	-0,51767483(-24)	-0,51790618(-24)

Продовження табл. 8

1	2	3	4	5
0	0,58259(-17)	0,27977(-17)	0,83482367(-24)	0,83493728(-24)
0,2	-0,46058(-17)	-0,11108(-17)	-0,55256993(-24)	-0,55246624(-24)
0,4	0,20965(-17)	-0,20191(-17)	-0,27515542(-24)	-0,27550132(-24)
0,6	0,21398(-17)	0,63141(-17)	0,82172828(-24)	0,82213598(-24)
0,8	-0,8917(-18)	-0,40311(-17)	0,79107635(-24)	0,79120462(-24)
1	-0,1217(-18)	0,5685(-18)	-0,3328(-28)	-0,1039(-27)

Висновки. На визначення коефіцієнтів розкладу функцій у біортогональні ряди за допомогою квадратурних формул суттєво впливає точність обчислення, у той час як порядок квадратурної формули, починаючи з деякого,– значно менше.

Під час обчислювального експерименту досліджено особливості апроксимації функцій побудованими біортогональними поліномами. Зокрема, встановлено, що наближення функцій поліномами $V_{2i-j}^{2s+j}(x)$ та $\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 0$ – для парних функцій та $j = 1$ – для парних функцій за однакового значення n, мають однаковий ступінь наближення.

1. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Глетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Наук. думка, 1998. – 370 с.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. лит., 1961. – 524 с.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В БАЗИСЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

В базисе многочленов Чебишева первого рода построено биортогональную систему полиномов, рассмотрена задача аппроксимации функции в построенном биортогональном базисе. В ходе вычислительного эксперимента на модельных задачах изучено влияние различного рода погрешностей на аппроксимацию.

CONSTRUCTION AND RESEARCH BASED BIORTHOGONAL POLYNOMIALS CHEBYSHEV POLYNOMIALS

In the basis of Chebyshev polynomials of the first kind is constructed biorthogonal polynomials system, the problem of approximation of functions built biorthogonal basis. During computational experiments on model problems investigated the influence of different kinds of errors in the process of approximation.

Центр математичного моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
30.09.13