

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗГИНУ ДОВГИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ Й ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Розглянуто основні рівняння циліндричного згину довгих прямокутних пластин типу Тимошенка, а на їх основі побудовано розв'язальне рівняння відносно прогину пластини. Отримано точний аналітичний розв'язок задачі про циліндричний згин довгої прямокутної пластини з опертими й навантаженими моментами поздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження. На його основі проаналізовано вільні від поперечних навантажень довгі прямокутні пластини з опертими поздовжніми краями, навантаженими моментами, і довгі прямокутні пластини з вільно опертими поздовжніми краями, що знаходяться під дією рівномірно розподілених поперечних навантажень. Порівняно отримані результати з результатами розрахунків на основі теорії пластин Кармана.

Вступ. Довгі пластини застосовують чи не в усіх областях техніки. З них складаються елементи обшивок крил і фюзеляжів літаків, корпусів кораблів і підводних човнів, резервуарів у хімічній промисловості, перекриттів інженерних споруд тощо.

Ще в 1902 році І. Г. Бубнов [2] розв'язав задачу про згин довгої пластини по циліндричній поверхні. Пластину уважав шарнірно опертою або защемленою по поздовжніх краях. Е. І. Григолюк і Г. М. Куликов [4] отримали розв'язок цієї задачі на основі уточненої теорії пологих оболонок, вважаючи поздовжні краї шарнірно опертими, та розглянули граничний перехід до розв'язку І. Г. Бубнова.

Розв'язки задач про циліндричний згин довгих пластин із шарнірно опертими або защемленими поздовжніми краями навів А. С. Вольмир [3]. Однорідну узагальнену плоску деформацію циліндричної пластини розглянув К. Ф. Черних [6], розшукуючи замість переміщень конфігурацію деформованої серединної поверхні. Пластину уважав шарнірно опертою або защемленою по поздовжніх краях. G. Z. Voyiadjis і Sh. Sarkani [11] отримали наближений розв'язок задачі про циліндричний згин довгої пластини з вільно опертими поздовжніми краями, що знаходиться під дією синусоїдального поперечного навантаження. J. N. Reddy [10] отримав розв'язки задач про згин шаруватої балки й циліндричний згин довгої шаруватої пластини. Уважав, що обидва краї балки вільно оперті або защемлені, або що один край защемлений, а інший – вільний. Поздовжні краї пластини уважав вільно опертими або защемленими. Z. G. Bian, W. Q. Chen, C. W. Lim і N. Zhang [8] запропонували метод побудови аналітичних розв'язків задач про циліндричний згин багатопрогінних функціонально-градієнтних пластин з довільними граничними умовами. У [5] розв'язано задачу про поперечне деформування довгої пластини із защемленими поздовжніми краями. V. Monfared [9] отримав вираз для критичної згинної міцності довгої пластини з вільно опертими поздовжніми краями.

У [2, 3, 9] циліндричний згин довгих пластин досліджено на основі геометрично нелінійних теорій на базі геометричної гіпотези Кірхгофа. У [6] напружено-деформований стан циліндричної пластини досліджено на основі нелінійної теорії пружних оболонок на базі модифікованої геометричної гіпотези Кірхгофа. Ця теорія враховує розтяг нормального до матеріальної серединної поверхні матеріального волокна й призначена головню для розрахунку оболонок з еластомерів.

Однак теорії на базі геометричної гіпотези Кірхгофа чи її модифікацій можуть давати незадовільні результати під час розрахунків пластин із су-

часних анізотропних матеріалів, що мають низьку трансверсальну зсувну жорсткість. Тоді ці дані необхідно узагальнювати й уточнювати. Уточнені моделі довгих пластин з анізотропних матеріалів описано в [4, 5, 8, 10, 11].

У моделях, розглянутих у [4, 8, 11], прийнято припущення про нелінійний характер розподілу тангенціальних переміщень по товщині. У [4] отримано рівняння згину довгої пластини по циліндричній поверхні на основі теорії третього порядку на базі узагальненої кінематичної гіпотези Тимошенка. У [8] показано, що для деяких лінійних задач циліндричного згину довгих функціонально-градієнтних пластин теорія Солдатоса дає адекватніші розподіли напружень, ніж теорії першого й третього порядків. У цій теорії для довгої пластини у вираз для тангенціального переміщення входить функція форми, яку треба визначати зі звичайного диференціального рівняння, яке впливає з одного з рівнянь рівноваги. Задача циліндричного згину довгої пластини в [11] досліджена на основі геометрично нелінійної теорії високого порядку, що враховує поперечні зсуви, поперечну нормальну деформацію й поперечні нормальні напруження.

Однак для тонких анізотропних пластин, що найчастіше застосовують у техніці, не слід відмовлятися від компактних зсувних теорій першого порядку. Вони здебільшого дають можливість отримати хороші результати для переміщень, мембранних і згинних деформацій і напружень, а труднощі з визначенням поперечних дотичних напружень, пов'язані з тим, що кінематичні гіпотези Тимошенка дають сталі зсуви по товщині, розв'язують з допомогою змішаного варіаційного принципу з незалежною апроксимацією поперечних дотичних напружень і тангенціальних переміщень.

У [5] поперечне деформування довгої пластини досліджено на основі геометрично нелінійної теорії типу Тимошенка, що враховує деформації поперечних зсувів та стиснення. У [10] циліндричний згин довгих пластин досліджено на основі лінійної класичної теорії й лінійної теорії типу Тимошенка, а стійкість довгих пластин проаналізовано на основі геометрично нелінійних варіантів цих теорій.

Нижче на основі геометрично нелінійної теорії пластин типу Тимошенка отримано точний аналітичний розв'язок задачі про циліндричний згин довгої прямокутної пластини з опертими й навантаженими моментами вздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження. На його основі проаналізовано деякі часткові випадки циліндричного згину довгих прямокутних пластин.

1. Приведемо основні рівняння й співвідношення варіанта теорії пластин типу Тимошенка, побудованого з допомогою незалежних апроксимацій поперечних дотичних напружень і тангенціальних переміщень [4].

Припускатимемо, що пластина тонка, трансверсально-ізотропна, пружна й сталої товщини. Віднесемо її до прямокутної системи координат $Oxyz$. При цьому сумістимо серединну площину пластини з площиною xOy . Поперечну координату z відраховуватимемо в бік зростання зовнішньої нормалі до серединної площини. Додатні напрямки на осях Ox і Oy виберемо так, щоби система координат була правою. Поверхню, на якій опиняться точки серединної площини після деформації, називатимемо серединною.

Геометричні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \partial_x u + \frac{\theta_x^2}{2}, \quad E_{xy} = \partial_x v + \partial_y u + \theta_x \theta_y, \quad E_{yy} = \partial_y v + \frac{\theta_y^2}{2}, \\ K_{xx} &= \partial_x \beta_x, \quad K_{xy} = \partial_x \beta_y + \partial_y \beta_x, \quad K_{yy} = \partial_y \beta_y, \\ \epsilon_{xz} &= -\theta_x + \beta_x, \quad \epsilon_{yz} = -\theta_y + \beta_y, \end{aligned} \quad (1)$$

де u й v – тангенціальні переміщення точок серединної поверхні вздовж осей Ox і Oy відповідно; β_x і β_y – кути повороту нормалі до серединної

площини; E_{xx} і E_{yy} , E_{xy} , K_{xx} і K_{yy} , K_{xy} – відповідно видовження, зсув, кривини, кручення серединної поверхні; ϵ_{xz} і ϵ_{yz} – поперечні зсуви, а

$$\theta_x = -\partial_x w, \quad \theta_y = -\partial_y w, \quad (2)$$

де w – прогин пластини.

Фізичні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} T_x &= B(E_{xx} + \nu E_{yy}), \quad T_{xy} = B_{xy} E_{xy}, \quad T_y = B(E_{yy} + \nu E_{xx}), \\ M_x &= D(K_{xx} + \nu K_{yy}), \quad H = D_{xy} K_{xy}, \quad M_y = D(K_{yy} + \nu K_{xx}), \\ Q_x &= \Lambda' \epsilon_{xz}, \quad Q_y = \Lambda' \epsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (3)$$

де T_x і T_y , T_{xy} – відповідно питомі нормальні, дотичне зусилля; M_x і M_y , H – відповідно питомі згинні, крутний моменти; Q_x і Q_y – питомі поперечні зусилля; B й D – відповідно тангенціальна й циліндрична жорсткості; B_{xy} – коефіцієнт тангенціального зсуву; D_{xy} – коефіцієнт кручення серединної поверхні; Λ' – коефіцієнт поперечного зсуву пластини; ν – коефіцієнт Пуассона, що характеризує поперечний стиск у серединній площині за розтягу в тій же площині.

Сталі B , D , B_{xy} , D_{xy} і Λ' визначимо за формулами

$$B = \frac{2hE}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}, \quad B_{xy} = 2hG, \quad D_{xy} = \frac{2h^3G}{3}, \quad \Lambda' = \frac{5hG'}{3},$$

де h – півтовщина пластини; E – модуль Юнга для розтягу – стиску в напрямках, що лежать у серединній площині; G й G' – модулі зсуву для площин, відповідно паралельних і нормальних серединній площині.

$$\text{Стала } G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Позначимо

$$f_{x0} = \int_{-h}^h F_x dz, \quad f_{y0} = \int_{-h}^h F_y dz, \quad f_{z0} = \int_{-h}^h F_z dz, \quad f_{x1} = \int_{-h}^h z F_x dz, \quad f_{y1} = \int_{-h}^h z F_y dz,$$

де F_x , F_y і F_z – проекції об'ємних сил, віднесених до одиниці об'єму оболонки, на осі Ox , Oy і Oz відповідно.

Рівняння рівноваги пластини мають вигляд

$$\begin{aligned} \partial_x T_x + \partial_y T_{xy} + f_{x0} &= 0, \quad \partial_y T_y + \partial_x T_{xy} + f_{y0} = 0, \\ \partial_x N_x + \partial_y N_y + \Phi_{z0} &= 0, \\ \partial_x M_x + \partial_y H - Q_x + f_{x1} &= 0, \quad \partial_y M_y + \partial_x H - Q_y + f_{y1} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

причому

$$N_x = Q_x - T_x \theta_x - T_{xy} \theta_y, \quad N_y = Q_y - T_{xy} \theta_x - T_y \theta_y, \quad \Phi_{z0} = -p + q + f_{z0}. \quad (5)$$

Тут p й q – інтенсивності поперечних навантажень на лицьових поверхнях $z = h$ і $z = -h$ відповідно.

Граничні умови, що впливають зі змішаного варіаційного принципу, сформульовано в [4].

2. Зробимо додаткові припущення про геометрію й деформований стан пластини. Уважатимемо, що пластинка прямокутна, довга, з подовжніми

краями, паралельними площині xOz , та має плоску деформацію [1], паралельну площині yOz . Тоді

$$u = 0, \beta_x = \partial_x v = \partial_x w = 0, \partial_x \beta_y = 0, \quad (6)$$

$$\partial_x f_{y0} = \partial_x p = \partial_x q = \partial_x f_{z0} = 0, \partial_x f_{y1} = 0,$$

і пластина деформується, згинаючись по циліндричній поверхні.

З формул (1), (2) й (6) випливає, що

$$E_{xx} = 0, E_{xy} = 0, E_{yy} = \partial_y v + \frac{\theta_y^2}{2},$$

$$K_{xx} = 0, K_{xy} = 0, K_{yy} = \partial_y \beta_y,$$

$$\epsilon_{xz} = 0, \epsilon_{yz} = -\theta_y + \beta_y, \quad (7)$$

$$\theta_x = 0, \theta_y = -\partial_y w. \quad (8)$$

Підставивши формули (7) у вирази (3), отримаємо:

$$T_x = BvE_{yy}, T_{xy} = 0, T_y = BE_{yy}, \quad (9)$$

$$M_x = DvK_{yy}, H = 0, M_y = DK_{yy}, \quad (10)$$

$$Q_x = 0, Q_y = \Lambda' \epsilon_{yz}. \quad (11)$$

Ураховуючи формули (5)–(11), рівняння рівноваги (4) запишемо так:

$$f_{x0} = 0, \quad (12)$$

$$\partial_y T_y + f_{y0} = 0, \quad (13)$$

$$\partial_y N_y + \Phi_{z0} = 0, \quad (14)$$

$$f_{x1} = 0, \quad (15)$$

$$\partial_y M_y - Q_y + f_{y1} = 0. \quad (16)$$

З рівностей (12) і (15) випливає, що у випадку, який розглядаємо, об'ємна сила, прикладена до будь-якої точки пластини, повинна бути паралельною площині деформації.

Згідно з формулами (5), (8), (9) і (11)

$$N_x = 0, N_y = Q_y - T_y \theta_y. \quad (17)$$

З формул (16) і (17) отримаємо:

$$N_y = \partial_y M_y + f_{y1} - T_y \theta_y. \quad (18)$$

Нехай

$$f_{y0} = 0.$$

Тоді з рівняння (13) випливає, що

$$\partial_y T_y = 0.$$

Цю формулу враховуватимемо під час диференціювання відносно y виразів, що містять T_y .

Підставимо вираз (18) у рівняння (14). Отримаємо:

$$\partial_y^2 M_y + \partial_y f_{y1} - T_y \partial_y \theta_y + \Phi_{z0} = 0. \quad (19)$$

Останні формули (10) і (11) з урахуванням формул (7) і (8) запишемо так:

$$M_y = D\partial_y\beta_y, \quad (20)$$

$$Q_y = \Lambda'(\partial_y w + \beta_y). \quad (21)$$

Підставивши формули (8), (20) і (21) у рівняння (16) і (19), отримаємо:

$$D\partial_y^2\beta_y - \Lambda'(\partial_y w + \beta_y) = -f_{y1}, \quad (22)$$

$$D\partial_y^3\beta_y + T_y\partial_y^2 w = -\partial_y f_{y1} - \Phi_{z0}. \quad (23)$$

Продиференціюємо відносно y ліву й праву частини рівняння (22) й відніmemo відповідно від лівої й правої частин рівняння (23). Отримаємо:

$$T_y\partial_y^2 w + \Lambda'(\partial_y^2 w + \partial_y\beta_y) = -\Phi_{z0}. \quad (24)$$

Продиференціюємо відносно y й помножимо на D ліву й праву частини рівняння (24) й відніmemo відповідно від лівої й правої частин рівняння (22), помноживши їх на Λ' . З отриманого рівняння знайдемо вираз для β_y :

$$\beta_y = -\partial_y w - \frac{D}{\Lambda'^2}(\Lambda' + T_y)\partial_y^3 w + \frac{f_{y1}}{\Lambda'} - \frac{D\partial_y\Phi_{z0}}{\Lambda'^2}. \quad (25)$$

Вираз (25) підставимо в рівняння (24), помноживши обидві його частини на $-\Lambda'$. Отримаємо:

$$D(\Lambda' + T_y)\partial_y^4 w - \Lambda'T_y\partial_y^2 w = \Lambda'(\partial_y f_{y1} + \Phi_{z0}) - D\partial_y^2\Phi_{z0}. \quad (26)$$

Розв'язальне рівняння відносно w виведене. Воно є лінійним звичайним диференціальним зі сталими коефіцієнтами. Знайти його загальний і частинний розв'язки можна за допомогою відомих методів [7]. У [10] отримано розв'язальне рівняння подібної структури.

3. Розглянемо довгу прямокутну пластину з опертими й навантаженими моментами поздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження з інтенсивністю p . Уважатимемо, що

$$q = 0, \quad f_{z0} = 0, \quad f_{y1} = 0. \quad (27)$$

Для опертих і навантажених моментами поздовжніх країв маємо крайові умови

$$w = 0, \quad M_y = M \quad \text{при } y = \pm b, \quad (28)$$

де M – заданий на поздовжніх краях пластини згинний момент, b – половина ширини пластини.

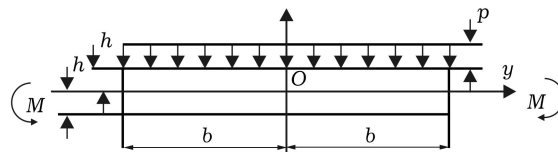


Рис. 1.

Поперечний переріз пластини в недеформованому стані зображений на рис. 1.

Унесемо в крайові умови (28) вираз (20) з урахуванням того, що β_y виражає формула (25). Отримаємо крайові умови відносно w і його похідних. Таким чином, для визначення w маємо рівняння (26) із крайовими умовами (28). Якщо $T_y \neq -\Lambda'$, то кількість крайових умов відповідає порядку рівняння (26). Розв'язавши задачу (26)–(28) для деякого $T_y \neq -\Lambda'$, за допомогою

формули (25) через w можна знайти β_y . Підставивши вирази для w й β_y у вирази (20) і (21), можна отримати M_y і Q_y .

Якщо тепер звернемося до останньої формули (9) і внесемо туди відповідні вирази із (7) і (8) та проінтегруємо відносно y обидві частини цієї формули, то отримуємо вираз для v :

$$v = \frac{T_y y}{B} - \frac{1}{2} \int (\partial_y w)^2 dy + C, \quad (29)$$

де C – довільне стале число.

Скориставшись позначенням

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda' |T_y|}{D |\Lambda' + T_y|}}, \quad (30)$$

випишемо вирази для v й w для випадків $T_y < -\Lambda'$; $-\Lambda' < T_y < 0$ й

$$T_y \neq -\frac{k^2 \pi^2 \Lambda' D}{4b^2 \Lambda' + k^2 \pi^2 D}, \quad k = 1, 3, 5, \dots; \quad T_y = 0 \quad \text{й} \quad T_y > 0.$$

Якщо $-\Lambda' < T_y < 0$ й $T_y \neq -\frac{k^2 \pi^2 \Lambda' D}{4b^2 \Lambda' + k^2 \pi^2 D}$, $k = 1, 3, 5, \dots$, то

$$v = \frac{T_y y}{B} - \left[\left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \frac{\lambda}{2T_y \cos \lambda b} \right]^2 \left(y - \frac{\sin 2\lambda y}{2\lambda} \right) - \left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \left(-y \cos \lambda y + \frac{\sin \lambda y}{\lambda} \right) \frac{p}{T_y^2 \cos \lambda b} - \frac{p^2 y^3}{6T_y^2} + C, \quad (31)$$

$$w = \frac{1}{T_y} \left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \left(1 - \frac{\cos \lambda y}{\cos \lambda b} \right) + \frac{p}{2T_y} (y^2 - b^2).$$

Якщо $T_y = 0$, то

$$v = -\left(\frac{p}{\Lambda'} - \frac{M}{D} + \frac{b^2 p}{2D} \right)^2 \frac{y^3}{6} + \left(\frac{p}{\Lambda'} - \frac{M}{D} + \frac{b^2 p}{2D} \right) \frac{p y^5}{30D} - \frac{p^2 y^7}{504D^2} + C, \quad (32)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\Lambda'} - \frac{M}{D} \right) (y^2 - b^2) + \frac{p}{4D} \left(-\frac{5b^4}{6} + b^2 y^2 - \frac{y^4}{6} \right). \quad (33)$$

Якщо $T_y < -\Lambda'$ або $T_y > 0$, то

$$v = \frac{T_y y}{B} - \left[\left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \frac{\lambda}{2T_y \operatorname{ch} \lambda b} \right]^2 \left(-y + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda y}{2\lambda} \right) - \left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \left(-y \operatorname{ch} \lambda y + \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\lambda} \right) \frac{p}{T_y^2 \operatorname{ch} \lambda b} - \frac{p^2 y^3}{6T_y^2} + C, \quad (34)$$

$$w = \frac{1}{T_y} \left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) + \frac{p}{2T_y} (y^2 - b^2). \quad (35)$$

Наведені вирази відповідають симетричній вигнутій серединній поверхні.

Якщо $T_y = -\frac{k^2 \pi^2 \Lambda' D}{4b^2 \Lambda' + k^2 \pi^2 D}$, $k = 2, 4, 6, \dots$, то можливий і інший розв'язок задачі (26) – (28):

$$w = A \sin \frac{k\pi y}{2b} + \frac{1}{T_y} \left(\frac{pD}{T_y} + M \right) \left[1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi y}{2b} \right] + \frac{p}{2T_y} (y^2 - b^2),$$

де A – довільне стале число.

Перший член відповідає тут згину пластини по несиметричній формі. Вирази для v , β_y , M_y і Q_y можна знайти за формулами (29), (25), (20) і (21) відповідно.

Якщо $T_y = -\frac{k^2\pi^2\Lambda'D}{4b^2\Lambda' + k^2\pi^2D}$, $k = 1, 3, 5, \dots$, то при $\frac{pD}{T_y} + M = 0$ одержимо:

$$w = F \cos \frac{k\pi y}{2b} + \frac{p}{2T_y} (y^2 - b^2),$$

де F – довільне стале число.

Вирази для v , β_y , M_y і Q_y можна, як і раніше, знайти за формулами (29), (25), (20) і (21) відповідно.

4. Проаналізуємо довгу прямокутну пластину з опертими поздовжніми краями, навантаженими моментами. Уважатимемо, що

$$p = 0. \quad (36)$$

Для опертих і навантажених моментами поздовжніх країв маємо крайові умови (28). Крім того, припускатимемо, що взаємне зміщення точок поздовжніх країв неможливе. При цьому

$$\int_{-b}^b \partial_y v dy = 0. \quad (37)$$

Тоді, коли $-\Lambda' < T_y < 0$ й $T_y \neq -\frac{k^2\pi^2\Lambda'D}{4b^2\Lambda' + k^2\pi^2D}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, з формул (31) і (36) випливає, що

$$v = \frac{T_y y}{B} - \left(\frac{\lambda M}{2T_y \cos \lambda b} \right)^2 \left(y - \frac{\sin 2\lambda y}{2\lambda} \right) + C.$$

У такому випадку з умови (37) випливає, що

$$M^2 = \frac{8bT_y^3 \cos^2 \lambda b}{\lambda B (2\lambda b - \sin 2\lambda b)}. \quad (38)$$

Не важко побачити, що умова (37) не виконується при $-\Lambda' < T_y < 0$ й $T_y \neq -\frac{k^2\pi^2\Lambda'D}{4b^2\Lambda' + k^2\pi^2D}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, оскільки тоді ліва частина рівності (38) невід'ємна, а права – від'ємна, і поставлена задача не має розв'язку.

За аналогією з випадком $-\Lambda' < T_y < 0$ й $T_y \neq -\frac{k^2\pi^2\Lambda'D}{4b^2\Lambda' + k^2\pi^2D}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, можна стверджувати, що поставлена задача не має розв'язку

й тоді, коли $T_y = -\frac{k^2\pi^2\Lambda'D}{4b^2\Lambda' + k^2\pi^2D}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Тоді, коли $T_y < -\Lambda'$ або $T_y > 0$, з формул (34) й (36) випливає, що

$$v = \frac{T_y y}{B} - \left(\frac{\lambda M}{2T_y \operatorname{ch} \lambda b} \right)^2 \left(-y + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda y}{2\lambda} \right) + C.$$

Урахувавши тепер умову (37), знайдемо зв'язок між зусиллям T_y і моментом M :

$$M^2 = -\frac{8bT_y^3 \operatorname{ch}^2 \lambda b}{\lambda B(2\lambda b - \operatorname{sh} 2\lambda b)}. \quad (39)$$

Уведемо безрозмірні параметри

$$\eta = \frac{y}{b}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad T_\eta^* = \frac{b^2 T_y}{D}, \quad p^* = \frac{b^4 p}{hD}, \quad M^* = \frac{b^2 M}{hD}, \quad \lambda^* = \lambda b. \quad (40)$$

Тоді, коли $T_y < -\Lambda'$ або $T_y > 0$, з виразів (30) і (40) випливає, що

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{\delta' T_\eta^*}{\delta' + T_\eta^*}}, \quad T_\eta^* = \frac{\delta' (\lambda^*)^2}{\delta' - (\lambda^*)^2}, \quad \text{якщо } T_\eta^* < -\delta' \text{ або } T_\eta^* > 0, \quad (41)$$

де

$$\delta' = \frac{b^2 \Lambda'}{D} = \frac{5G'}{4G} (1 - \nu) \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Користуючись позначеннями (40), перейдемо від співвідношення (39) до співвідношення

$$(M^*)^2 = -\frac{8(T_\eta^*)^3 \operatorname{ch}^2 \lambda^*}{3\lambda^* (2\lambda^* - \operatorname{sh} 2\lambda^*)}. \quad (42)$$

Урахувавши формулу (36), за виразом (35) за допомогою позначень (40) знайдемо безрозмірний прогин:

$$w^* = \frac{M^* (\operatorname{ch} \lambda^* - \operatorname{ch} \lambda^* \eta)}{T_\eta^* \operatorname{ch} \lambda^*}. \quad (43)$$

Поклавши при $T_\eta^* > 0$ у формулах (41)–(43) параметр $\delta' = +\infty$, отримаємо розв'язок на основі теорії пластин Кармана.

Тоді, коли $T_y = 0$, з формул (32) й (36) випливає, що $v = -\frac{M^2 y^3}{6D^2} + C$. У такому випадку з умови (37) випливає, що $M = 0$. Знаючи це, урахувавши формули (33) й (36), матимемо $w = 0$.

Тепер з виразів (40) випливає, що

$$M^* = 0 \text{ й } w^* = 0 \text{ при } T_\eta^* = 0 \text{ й } p^* = 0. \quad (44)$$

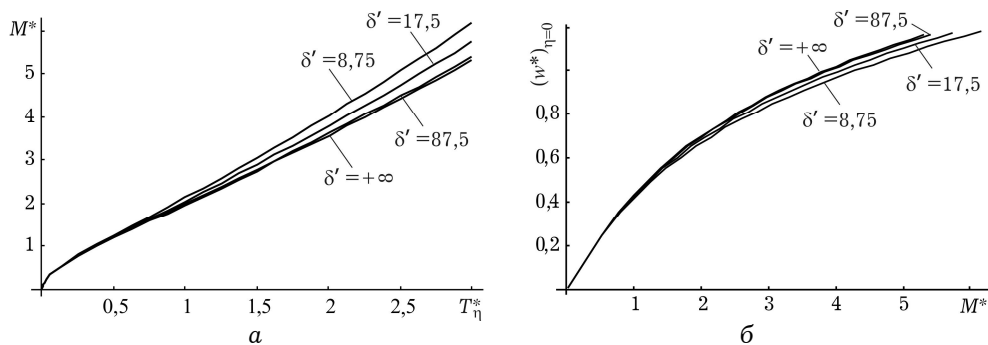


Рис. 2.

На рис. 2а подано залежності між безрозмірними моментом M^* й зусиллям T_η^* за формулами (42) й (44), на рис. 2б – залежності між безроз-

мірними прогином w^* й моментом M^* при $\eta = 0$ за формулами (42)–(44). Залежності на рис. 2б побудовано для значень T_η^* , що лежать у межах від 0 до 3. Як бачимо, відмінності між геометрично нелінійною теорією пластин типу Тимошенка й теорією пластин Кармана на рис. 2 проявляються, коли величина T_η^* велика.

5. Проаналізуємо довгу прямокутну пластину з вільно опертими поздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження з інтенсивністю p .

Для вільно опертих поздовжніх країв маємо умови (28) при $M = 0$. Крім того, уважатимемо, що виконується умова (37).

Прийнявши у виразі (31) $M = 0$ й підставивши його в умову (37), отримаємо рівність, яка в певному околі точки $(0, 0) \in T_y \times p^2$ не виконується.

Поклавши у виразі (34) $M = 0$ й підставивши його в умову (37), знайдемо зв'язок між зусиллям T_y й інтенсивністю поперечного навантаження p тоді, коли $T_y < -\Lambda'$ або $T_y > 0$:

$$p^2 = \frac{8bT_y^3}{B} \left[-\frac{\lambda D^2 (2\lambda b - \text{sh } 2\lambda b)}{(T_y \text{ ch } \lambda b)^2} - \frac{8D (\lambda b \text{ ch } \lambda b - \text{sh } \lambda b)}{\lambda T_y \text{ ch } \lambda b} + \frac{4b^3}{3} \right]^{-1}.$$

Використавши позначення (40), з останнього співвідношення знайдемо:

$$(p^*)^2 = 8(T_\eta^*)^3 \left[-\frac{3\lambda^* (2\lambda^* - \text{sh } 2\lambda^*)}{(T_\eta^* \text{ ch } \lambda^*)^2} - \frac{24(\lambda^* \text{ ch } \lambda^* - \text{sh } \lambda^*)}{\lambda^* T_\eta^* \text{ ch } \lambda^*} + 4 \right]^{-1}. \quad (45)$$

Прийнявши у виразі (35) $M = 0$ та використавши позначення (40), для безрозмірного прогину отримаємо:

$$w^* = \frac{p^*}{T_\eta^*} \left(\frac{\text{ch } \lambda^* - \text{ch } \lambda^* \eta}{T_\eta^* \text{ ch } \lambda^*} + \frac{\eta^2 - 1}{2} \right). \quad (46)$$

Прийнявши при $T_\eta^* > 0$ у формулах (41), (45) і (46) параметр $\delta' = +\infty$, прийдемо до розв'язку на основі теорії пластин Кармана [3].

Поклавши $M = 0$, з виразу (32) й умови (37) знайдемо:

$$p^2 \left[\left(\frac{1}{\Lambda'} + \frac{b^2}{2D} \right)^2 - \left(\frac{1}{\Lambda'} + \frac{b^2}{2D} \right) \frac{b^2}{5D} + \frac{b^4}{84D^2} \right] = 0. \quad (47)$$

Неважко переконатись, що рівність (47) справджується тоді й тільки тоді, коли $p = 0$. Отже, якщо $T_y = 0$, то при $M = 0$ матимемо $p = 0$. Приймавши у виразі (33) $p = 0$ й $M = 0$, знайдемо $w = 0$.

Тепер з виразів (40) випливає, що

$$p^* = 0 \text{ й } w^* = 0 \text{ при } T_\eta^* = 0 \text{ й } M^* = 0. \quad (48)$$

На рис. 3а подано залежності між безрозмірними параметром p^* й зусиллям T_η^* за формулами (45) і (48), на рис. 3б – залежності між безрозмірними прогином w^* й параметром p^* при $\eta = 0$ за формулами (45), (46) і (48). Залежності на рис. 3б побудовано для значень T_η^* , що лежать у межах від 0 до 3.

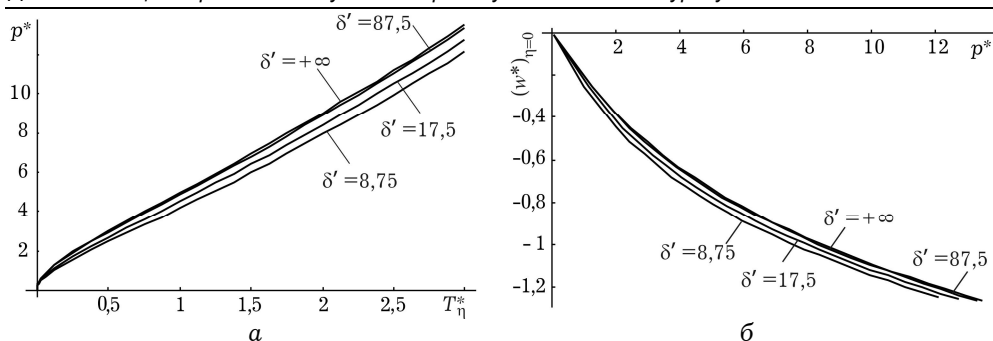


Рис. 3.

Як бачимо, на рис. 2 й 3 зі зростанням параметра δ' криві, побудовані за геометрично нелінійною теорією пластин типу Тимошенка, зближуються з кривими, побудованими за теорією пластин Кармана.

Висновки. На основі геометрично нелінійної теорії пластин типу Тимошенка отримано точний аналітичний розв'язок задачі про циліндричний згин довгої прямокутної пластини з опертими й навантаженими моментами поздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження. Для нестискальних нормальних зусиль у серединних поверхнях отримано точні аналітичні розв'язки задач про циліндричний згин довгої прямокутної пластини з опертими поздовжніми краями, навантаженими моментами, і довгої прямокутної пластини з вільно опертими поздовжніми краями, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження. Порівняно результати розрахунків за допомогою цих розв'язків і точних аналітичних розв'язків на основі теорії пластин Кармана.

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. Учебник для университетов. – М.: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. Бубнов И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды // Труды по теории пластин. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – С. 11–100.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 420 с.
4. Григорюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
5. Марчук М. В. Геометрично нелінійне поперечне деформування податливої до трансверсального стиснення пластини-смуги // Прикл. проблеми мех. і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 167–170.
6. Черныш К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
7. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник. У 2 ч. – К.: Вища шк., 1995. – Ч. II. – 510 с.
8. Bian Z. G., Chen W. Q., Lim C. W., Zhang N. Analytical solutions for single- and multi-span functionally graded plates in cylindrical bending // Int. J. of Solids and Struct. – 2005. – 42. – P. 6433–6456.
9. Monfared V. Effect of geometric factor and loading on strength of rectangular plate under bending // Middle-East J. of Sci. Research. – 2012. – 11 (11). – P. 1546–1549.
10. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2004. – 831 p.
11. Voyiadjis G. Z., Sarkani Sh. Engineering large deflection theory for thick plates // J. of Eng. Mech. – 1989. – 115, № 5. – P. 935–951.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ДЛИННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрены основные уравнения цилиндрического изгиба длинных прямоугольных пластин типа Тимошенко, а на их основе построено разрешающее уравнение относительно прогиба пластины. Получено точное аналитическое решение задачи о цилиндрическом изгибе длинной прямоугольной пластины с опертыми и нагруженными моментами продольными краями, находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. На его основе осуществлен анализ свободных от поперечных нагрузок длинных прямоугольных пластин с опертыми продольными краями, нагруженными моментами, и длинных прямоугольных пластин со свободно опертыми продольными краями, находящимися под действием равномерно распределенных поперечных нагрузок. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов на основе теории пластин Кармана.

SOME PROBLEMS OF CYLINDRICAL BENDING OF LONG RECTANGULAR PLATES INCLUDING TRANSVERSE SHEAR AND GEOMETRICAL NONLINEARITY

The basic equations of cylindrical bending of long rectangular Timoshenko type plates were considered and the decision equation for the deflection of a plate was built based on them. The exact analytical solution of the problem of cylindrical bending of a long rectangular plate under an uniformly distributed transverse load with supported longitudinal edges subject to moments was got. Based on it the analysis of the free from transverse loads long rectangular plates with the supported longitudinal edges subject to moments and the long rectangular plates under uniformly distributed transverse loads with the simply supported longitudinal edges was carried out. The obtained results were compared with the results of calculations based on Karman plates theory.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
24.10.13