УДК 512.552.13

О. С. Сорокін

МОРФІЙНІ ПРАВІ MPI-КІЛЬЦЯ

Показано, що морфійне праве дуо-кільце є реверсивним, а за умови чистоти максимальних правих ідеалів встановлено його редукованість. Як наслідок показано, що для морфійного правого MPI-кільця умова, що воно є правим дуо-кільцем, еквівалентна тому, що це кільце є строго регулярним.

Часто для вивчення структурної будови кілець достатньо володіти інформацією про властивості його максимальних ідеалів. У 1969 р. Філдхауз [2] ввів, а у 1989 розвинули [1] поняття чистого ідеалу у комутативному кільці. Це поняття природно узагальнено на некомутативні кільця. Нижче досліджено будову та властивості морфійних правих MPI-кілець та знайдено їх зв'язки із іншими класами кілець.

Введемо всі необхідні означення і факти. Надалі під кільцем розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Нагадаємо, що *кільце Безу* – це кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал з кільця є головним. Якщо для довільної матриці A над кільцем R можна знайти такі унімодулярні матриці P та Q відповідних розмірів, що $PAQ = \operatorname{diag}\{d_1, ..., d_r, 0, ..., 0\}$, причому $Rd_{i+1}R \subseteq Rd_i \cap d_iR$, де $i \in \{1, ..., r-1\}$, то назвемо R *кільцем елементарних дільників*.

Означення 1. Правий ідеал I кільця R є *лівим чистим*, якщо для довільного $a \in I$ знайдеться такий елемент $b \in I$, що $a = ba$.

Використовуючи це означення, деякі автори [4–7] ввели у розгляд класи кілець з умовами односторонньої чистоти на праві максимальні (або на праві головні) ідеали цього кільця. Ці класи кілець за певних додаткових обмежень володіють властивостями регулярності, строгої регулярності, редукованості тощо.

Ніколсон та Санчез Кампос [8] започаткували цілеспрямоване вивчення кілець, які задовольняють дуальний аналог теореми про ізоморфізм.

Означення 2. Кільце R *задовольняє дуальний аналог теореми про ізоморфізм*, якщо для кожного $\varphi \in End(R)$ маємо такий ізоморфізм модулів: $R / \operatorname{Im}(\varphi) \cong \operatorname{Ker}(\varphi)$. Зауважимо, що для комутативного кільця поняття лівого та правого кілець Ерміта збігаються.

Конкретизуємо це поняття у такому означенні.

Означення 3. Кільце R називають *правим* (*лівим*) *морфійним*, якщо для кожного $a \in R$ існує ізоморфізм правих (лівих) модулів над кільцем R: $R / aR \cong r(a)$ $(R / Ra \cong l(a))$, де $r(x)$ (відповідно $l(x)$) – правий (лівий) анулятор елемента x. Якщо кільце є одночасно лівим і правим морфійним кільцем, то називатимемо його просто морфійним.

Також автори праці [8] навели критерій морфійності кільця R.

Лема 1 [8]. Для кільця R такі властивості є еквівалентні:

1) R – праве морфійне кільце;
2) $\forall a \in R$ знайдеться такий елемент $b \in R$, що $aR = r(b)$ та $r(a) = bR$;
3) $\forall a \in R$ знайдеться такий елемент $b \in R$, що $aR = r(b)$ та $r(a) \cong bR$.

Окрім цього, використовуватимемо також такі умови послабленої комутативності для кільця R.

Означення 4. Нехай R – кільце. Скажемо, що

1) R є *правим (лівим) дуо-кільцем*, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо включення $Ra \subseteq aR$ $(aR \subseteq Ra)$.
2) R є *дуо-кільцем*, якщо воно є правим та лівим дуо-кільцем.
3) R є *реверсивним* кільцем, якщо з рівності $xy = 0$ для деяких елементів $x, y \in R$ випливає рівність $yx = 0$.

Лема 2. Морфійне праве дуо-кільце є реверсивним.

Д о в е д е н н я. Нехай маємо такі елементи $x, y \in R$, що $xy = 0$. Тоді $yR \subset r(x)$. За умовою правої морфійності знайдемо такий елемент $z \in R$, що $yR = r(z)$, $zR = r(y)$. Відомо [8], що ліве морфійне кільце є правим P-ін'єктивним (тобто з умови $r(a) \subseteq r(b)$ випливає, що $Rb \subseteq Ra$). Тому, враховуючи $r(z) = yR \subseteq r(x)$, отримуємо $Rx \subseteq Rz \subseteq zR = r(y)$, а звідси $yx = 0$. Отже, R є реверсивним кільцем. Лему доведено.

Означення 5. Кільце R, в якому лише нуль є нільпотентним елементом, називають *редукованим*.

Означення 6. Скажемо, що кільце R є *правим MPI-кільцем*, якщо кожен правий максимальний ідеал є лівим чистим.

Прикладом правого MPI-кільця може бути кільце $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$.

Лема 3. Якщо R – морфійне праве дуо-кільце, яке є правим MPI-кільцем, то R – редуковане.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що знайдеться такий елемент $a \neq 0$ в R, що $a^2 = 0$. Тоді $a \in r(a)$ та існує такий правий максимальний ідеал M, що $r(a) \subset M$. Оскільки M є лівим чистим, то знайдеться такий елемент $b \in R$, що $a = ba$. Маємо $(1-b)a = 0$, а за лемою 2 отримуємо також $a(1-b) = 0$. Звідси $1 - b \in r(a) \subset M$. Тоді, оскільки $b \in M$, то $1 = (1-b) + b \in M$. Отримана суперечність доводить, що $a = 0$. Лему доведено.

Означення 7. Нехай R – кільце. Скажемо, що

1) R є *регулярним* (*в сенсі Неймана*) кільцем, якщо для довільного $a \in R$ існує такий елемент $x \in R$, що $axa = a$. Якщо для кожного елемента $a \in R$ такий елемент x є зворотним елементом кільця, то назвемо R *одинично-регулярним кільцем*.
2) R є *строго регулярним кільцем*, якщо для довільного $a \in R$ існує такий елемент $x \in R$, що $a^2 x = a$.

Відомо, що строго регулярні кільця є одинично-регулярними, а одинично-регулярні – просто регулярними. Наступна теорема встановлює зв'язок між морфійними правими MPI-кільцями та класами регулярних кілець.

Теорема 4. Нехай R – морфійне праве MPI-кільце. Тоді такі властивості рівносильні:

1) R – праве дуо-кільце;
2) R – реверсивне;
3) R – редуковане;
4) R має нульовий радикал Джекобсона;
5) R – напівпервинне;
6) R – регулярне;
7) R – одинично – регулярне;
8) R – строго регулярне;
9) R – ліве дуо-кільце;
10) R – дуо-кільце.

Д о в е д е н н я. Імплікації $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ доведені у попередніх лемах. У праці [9] за умови виконання властивості (1) показано еквівалентність властивостей (3), (4), (5), (6). У праці [8] показано еквівалентність властивостей (7) та (6). Також доведено [3], що з властивості (1) випливає еквівалентність властивостей (6) та (9). Знову ж у праці [8] зазначено, що ліве морфійне редуковане кільце є лівим дуо-кільцем, а тому $(3) \Rightarrow (9)$. Нарешті, оскільки $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (9)$, то $(9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (1)$. Теорему доведено.

Враховуючи теорему 6 з праці [10], отримуємо такий результат.

Наслідок 5. Нехай R – морфійне праве дуо-кільце, яке є правим MPI-кільцем. Тоді R є кільцем елементарних дільників.

1. *Al-Ezeh H.* Pure ideals in commutative reduced Gelfand rings with unity // Arch. Math. – 1989. –53. – P. 266–269.
2. *Fieldhouse D.J.* Pure theories // Math. Ann. – 1969. – 184. – P. 1–18.
3. *Lam T.Y.* Exercises in classical ring theory // Problem Books in Mathematics. – Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer, 2003. – 360 p.
4. *Mahmood R.D., Khalil S.M.* On GP-ideals // Raf.J.of Comp.&Math. – 2009. – 6, № 3. – P. 57–63.
5. *Mahmood R.D., Mahmood A.B.* Maximal generalization of pure ideals // Ibid. – 2008. – 5, № 1. – P. 21–27.
6. *Mahmood R.D., Mahmood A.B.* On rings whose maximal essential ideals are pure // Ibid. – 2007. – 4, № 1. – P. 57–62.
7. *Mohammad H.Q.* On rings whose principal ideals are generalized pure ideals // Ibid. – 2007. – 4, № 1. – P. 63–68.
8. *Nicholson W.K., Sanchez Campos E.* Rings with the dual of the isomorphism theorem // J. Algebra. – 2004. – 271. – P. 391 – 406.
9. *Nicholson W.K., Yousif M.F.* Quasi-Frobenius rings // Cambridge University Press. – 2003. – 308 p.
10. *Zabavsky B.V.* On PP-quasi-duo elementary divisor rings // Algebra i topologiya, Kiev. – 1993. – P. 40–49.

МОРФИЧЕСКИЕ ПРАВЫЕ MPI-КОЛЬЦА

Показано, что морфическое правое дуо-кольцо является реверсивным, а при дополнительном условии, что оно является правым MPI-кольцом, установлена его редуцированость. Как следствие показано, что для морфического правого MPI-кольца условие, что оно является правым дуо-кольцом эквивалентно тому, что это кольцо является строго регулярным.

MORPHIC RIGHT MPI-RINGS

It is shown that morphic right duo-ring is reversible, and if additionally it is right MPI-ring it is also reduced. As a corollary of this result we obtain that for morphic right MPI-ring being right duo-ring is equivalent to strong regularity.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
10.09.13