УДК 512.552.13

А. І. Гаталевич

ОДИНИЧНО-ЦЕНТРАЛЬНІ КІЛЬЦЯ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

Доведено, що одинично-центральне кільце стабільного рангу 1 *є квазідуо-кільцем і кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно дуо-кільце.*

Кільця з центральними оборотними елементами активно вивчають багато авторів [5–8, 10–16]. В праці [10] поставлено питання про комутативність одинично-центрального кільця стабільного рангу 1. Там же виявлено, що воно є квазідуо-кільцем. Більше того, є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли є дуо-кільцем.

Під кільцем R розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Через $U(R)$ позначатимемо групу оборотних елементів кільця R. Кільце R називають одинично-центральним, якщо довільний оборотний елемент $u \in U(R)$ кільця R комутує з довільним елементом $a \in R$, тобто $au = ua$ [10].

Під правим (лівим) кільцем Безу розумітимемо таке, в якому довільний скінченно-породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве і ліве кільце Безу називають кільцем Безу. Кільця Безу відіграють особливу роль у дослідженнях кілець елементарних дільників.

Позначимо через $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$ матрицю з елементами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0$ на головній діагоналі і нулями – на інших місцях. Матриці A і B називають еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $PAQ = B$. Якщо матриця A еквівалентна деякій діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ за довільного $i = 1, 2, \ldots, r-1$, то кажуть, що вона володіє діагональною редукцією. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A. Кільце R – кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [9].

Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільце Ерміта називають кільцем Ерміта [9].

Кільце R називають кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує такий елемент $x \in R$, що $a + bx \in U(R)$ [17]. Варто відмітити, що означення стабільного рангу 1 є право-ліво симетричним [17].

Кільце R називають правим (лівим) дистрибутивним кільцем, якщо ґратка правих (лівих) ідеалів кільця R є дистрибутивна [4]. Кільце R називають правим (лівим) квазідуо-кільцем, якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільця R є ідеалом. Кільце R називають квазідуо-кільцем, якщо воно є правим і лівим квазідуо-кільцем одночасно. Кільце R називають правим (лівим) дуо-кільцем, якщо довільний правий (лівий) ідеал кільця R є ідеалом. Кільце R називають дуо-кільцем, якщо воно є правим і лівим дуо-кільцем одночасно [6].

Теорема 1. *Нехай* R *– одинично-центральне кільце стабільного рангу 1. Тоді* R *– квазідуо-кільце.*

Д о в е д е н н я. Щоб довести, що кільце R буде квазідуо-кільцем досить показати, що для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ слідує, що $Ra + Rb = R$ [6].

Нехай $aR+bR=R$. Тоді згідно з означенням кільця стабільного рангу 1 маємо рівність $a+bt=u\in U(R)$ для деякого елемента $t\in R$. Звідси одержимо, що $Ra+Rt=R$. А отже, згідно з означенням кільця стабільного рангу 1 існує такий елемент $x\in R$, що $xa+t=w\in U(R)$. Звідси $t=w-xa$. Підставивши значення t у рівність $a+bt=u$, одержимо $a+bw-bxa=u$ і $(1-bx)a+wb=u$. Оскільки всі оборотні елементи кільця R є центральними, зокрема і w, одержимо, що $(1-bx)a+bw=u$, а звідси і $Ra+Rb=R$. Аналогічно можна показати, що з умови $Ra+Rb=R$ випливає умова $aR+bR=R$ для довільних таких елементів $a,b\in R$. Теорему доведено.

Оскільки праве квазідуо-кільце Безу є правим дистрибутивним кільцем [6], то одержимо такий результат.

Твердження. *Одинично-центральне праве (ліве) кільце Безу стабільного рангу 1 є правим (лівим) дистрибутивним кільцем.*

Як наслідок попередніх результатів отримуємо теорему.

Теорема 2. *Одинично-центральне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є дуо-кільцем.*

Д о в е д е н н я. Нехай R – одинично-центральне кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді згідно з твердженням, кільце R є дистрибутивним. Як показав Туганбаєв [3], дистрибутивне кільце елементарних дільників є дуо-кільцем. Отже, необхідність доведена. Для завершення доведення відзначимо, що згідно з [2], дуо-кільце Ерміта стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників. Оскільки кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем Ерміта, то достатність очевидна.

Відмітимо, що прикладом кільця стабільного рангу 1 може слугувати довільне напівлокальне кільце. Як показано в праці [10], одинично-центральне напівлокальне кільце є комутативним. Тому для повної відповіді на питання, чи буде одинично-центральне кільце стабільного рангу 1 комутативним, достатньо побудувати некомутативне квазідуо-кільце стабільного рангу 1, в якому оборотні елементи є центральні.

1. *Гаталевич А. І.* Про дуо-кільця елементарних дільників // Алгебра і топологія: тематичний зб. наук. праць. – Львів, ЛДУ – 1996. – С. 58–64.
2. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше двох // Укр. матем. журн. – 2003. – 55, № 4. – С. 550–554.
3. *Туганбаев А. А.* Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи мат. наук. – 1991. – 46, № 6. – С. 219–220.
4. *Brungs H. H.* Bezout domains and rings with distributive lattice of right ideals // Can. J. Math. – 1986. – 38, № 2. – P. 286–303.
5. *Cohen J., Koh K.* The groups of units in a compact ring // J. Pure Appl. Algebra. – 1988. – 22, №2. – P. 167–179.
6. *Dugas A. S., Lam T. Y.* Quasi-duo rings and stable range descent // Ibid. – 2005. – 195, № 3. – P. 243–259.
7. *Eldridge K. E, Fischer I.,* D.C.C. rings with a cyclic group of units // Duke Math. J. – 1967. – 34. – P. 243–248.
8. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. – 1974. – 31. – P. 182–193.
9. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
10. *Khurana D., Marks G., Srivastava A. K.* On unit-central rings. – Springer: Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2010. – P. 205–212.
11. *Khurana D., Srivastava A. K.* Right self-injective rings in which each element is sum of two units // J. Algebra Appl. – 2007. – 6, № 2. – P. 281–286.

12. *Khurana D., Srivastava A. K.* Unit sum numbers of right self-injective rings // Bull. Austral. Math. Soc. – 2007. – 75, № 3. – P. 355–360.
13. *Nicholson W. K., Springer H. J.* Commutativity of rings with abelian or solvable units // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – 56, № 1. – P. 59–62.
14. *Nicholson W. K.* Semiperfect rings with abelian group of units // Pacific. J. Math. – 1973. – 49. – P. 191–198.
15. *Raphael R.* Rings which are generated by their units // J. Algebra. – 1974. – 28, – P. 199–205.
16. *Vamos P.* 2-Good Rings // Q. J. Math. – 2005. – 56. – P. 417–430.
17. *Vasershtein L. N.* Stable rank of rings and dimension of topological spaces // Funkts. Anal. – 1971. – 56. – P. 17–27.

ЕДИНИЧНО-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1

Доказано, что единично-центральное кольцо стабильного ранга 1 является квази-дуо-кольцом и кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда оно дуо-кольцо.

UNIT-CENTRAL RINGS OF STABLE RANK 1

It is proved that unit-central ring of stable rank 1 is an quasiduo ring, and it is an elementary divisor ring if and only if it is a duo ring

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
01.10.13