УДК 512.547.25

М. В. Стойка

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НАД ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

Встановлено деякі умови для кільця цілісності характеристики нуль, за яких задача про опис над ним матричних зображень циклічної групи другого порядку є дикою.

Групу G називають дикою над комутативним кільцем R, якщо задача про опис її матричних R-зображень містить задачу про класифікацію з точністю до подібності пар матриць над деяким полем. Задача про дикість скінченної p-групи G над локальною областю цілісності R характеристики нуль з полем лишків характеристики p розв'язана в таких випадках:

1) R – кільце цілих p-адичних чисел [2, 3];

2) R – повне дискретно нормоване кільце [2–5, 11];

3) R – кільце формальних степеневих рядів від m змінних з коефіцієнтами з кільця цілих P-адичних чисел [1, 9];

4) R – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p $(\varepsilon \in R, \varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$ і виконується одна із таких умов:

а) $p > 3$;

б) G – 3-група порядку $|G| > 3$;

в) R – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G – нециклічна 2-група або циклічна 2-група порядку $|G| > 4$ [6];

г) R – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G – 2-група порядку $|G| > 2$ [7];

5) R – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, R не є дискретно нормованим кільцем, G – циклічна група порядку 4 і виконується одна із таких умов:

а) 2 – не простий елемент кільця R;

б) факторкільце $R / 2R$ не є кільцем головних ідеалів [8];

6) R – нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, $2 = t_1 \cdot t_2$, де t_1, t_2 – різні прості елементи кільця R, $t_1 \neq \theta \cdot t_2$ $(\theta \in R^*)$ і R / t_1R не є областю головних ідеалів, G – скінченна 2-група порядку $|G| > 1$ [10].

Через $m(I)$, де I – ідеал деякого кільця K, позначатимемо найменше число його твірних. Мета статті – довести таку теорему.

Нехай $G = \langle a \mid a^2 = e \rangle$ *і* K *– локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики* 2 *таке*, що

1) $2 = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$, $(s \in N,\ s > 1)$, де $t_1, t_2, \ldots, t_s$ *– різні прості елементи кільця* K, $t_i \neq \theta \cdot t_j$ $(\theta \in K^*, i = \overline{1,s}, j = \overline{1,s},\ i \neq j)$;

2) *кільце* $\bar{K}_1 = K / t_1K$ *містить ідеал* I *із скінченним* $m(I) > 1$.

Тоді задача про опис матричних зображень групи G *над кільцем* K *є дикою.*

ISSN 1810-3022. **Прикл. проблеми мех. і мат.** – 2013. – **Вип.** 11. – **С.** 58–62.

Нам знадобиться така лема.

Нехай K *таке, як в умові теореми. Тоді існує такий* $v \in K$, *що* $(v, t_1) = 1$.

Дійсно, якщо навпаки $(v, t_1) \neq 1$, то $(v, t_1) = t_1$ і v ділиться на t_1, $\overline{v} = v + t_1 K = t_1 K = 0$ і ідеал $\overline{V} = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \langle \overline{u}, 0 \rangle = \langle \overline{u} \rangle$ головний, що неможливо.

Переходимо до доведення теореми.

Застосуємо той самий метод, що і в праці [10] для доведення леми 4 (яку узагальнює наша теорема).

За лемою існує ідеал $V = \langle t_1, v \rangle$ кільця K, що $(t_1, v) = 1$.

Розглянемо таке матричне K-зображення групи G:

$$\Gamma(A,B) : a \to \begin{pmatrix} -E & D(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B),$$

де

$$D(A,B) = \begin{pmatrix} vt_1E & t_1^2A & 0 \\ v^2E & vt_1E & t_1^2B \\ 0 & v^2E & vt_1E \end{pmatrix},$$

A, B – довільні матриці порядку n над K; E – одинична матриця порядку n.

Нехай два такі зображення $\Gamma(A,B)$ і $\Gamma(A',B')$ є K-еквівалентні, тобто існує така матриця $C \in GL(6n, K)$, що

$$\Gamma_a(A,B)C = C\,\Gamma_a(A',B'), \tag{1}$$

де $C = \|C_{ij}\|;\ i,j = \overline{1,6},\ C_{ij}$ – $n \times n$-матриці над K.

Запишемо вираз (1) у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} -E & D(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E & D(A',B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{26} \end{pmatrix},\ C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Ця рівність еквівалентна рівності

$$D(A,B)C_4 = C_1 D(A',B') + 2C_2.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} vt_1E & t_1^2A & 0 \\ v^2E & vt_1E & t_1^2B \\ 0 & v^2E & vt_1E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} vt_1E & t_1^2A' & 0 \\ v^2E & vt_1E & t_1^2B' \\ 0 & v^2E & vt_1E \end{pmatrix} + 2C_2,$$

$$\begin{pmatrix} vt_1C_{44} + t_1^2AC_{54} & vt_1C_{45} + t_1^2AC_{55} & vt_1C_{46} + t_1^2AC_{56} \\ v^2C_{44} + vt_1C_{54} + t_1^2BC_{64} & v^2C_{45} + vt_1C_{55} + t_1^2BC_{65} & v^2C_{46} + vt_1C_{56} + t_1^2BC_{66} \\ v^2C_{54} + vt_1C_{64} & v^2C_{55} + vt_1C_{65} & v^2C_{56} + vt_1C_{66} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} vt_1C_{11} + v^2C_{12} & t_1^2C_{11}A' + vt_1C_{12} + v^2C_{13} & t_1^2C_{12}B' + vt_1C_{13} \\ vt_1C_{21} + v^2C_{22} & t_1^2C_{21}A' + vt_1C_{22} + v^2C_{23} & t_1^2C_{22}B' + vt_1C_{23} \\ vt_1C_{31} + v^2C_{32} & t_1^2C_{31}A' + vt_1C_{32} + v^2C_{33} & t_1^2C_{32}B' + vt_1C_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Звідси, зокрема, маємо:

$$v^2C_{54} + vt_1C_{64} = vt_1C_{31} + v^2C_{32} + 2D_1, \tag{2}$$

$$vt_1C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_1C_{54} + t_1^2BC_{64} + 2D_2, \tag{3}$$

$$vt_1C_{11} + v^2C_{12} = vt_1C_{44} + t_1^2AC_{54} + 2D_3, \tag{4}$$

$$t_1^2C_{31}A' + vt_1C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_1C_{65} + 2D_4, \tag{5}$$

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_1C_{55} + t_1^2BC_{65} + 2D_5, \tag{6}$$

$$t_1^2C_{11}A' + vt_1C_{12} + v^2C_{13} = vt_1C_{45} + t_1^2AC_{55} + 2D_6, \tag{7}$$

$$t_1^2C_{32}B' + vt_1C_{33} = v^2C_{56} + vt_1C_{66} + 2D_7, \tag{8}$$

$$t_1^2C_{22}B' + vt_1C_{23} = v^2C_{46} + vt_1C_{56} + t_1^2BC_{66} + 2D_8, \tag{9}$$

$$t_1^2C_{12}B' + vt_1C_{13} = vt_1C_{46} + t_1^2AC_{56} + 2D_9, \tag{10}$$

де

$$D_1 = C_{34},\ D_2 = -C_{24},\ D_3 = -C_{14},$$

$$D_4 = -C_{35},\ D_5 = -C_{25},\ D_6 = -C_{15},$$

$$D_7 = -C_{36},\ D_8 = -C_{26},\ D_9 = -C_{16}.$$

Із співвідношення (3) одержимо:

$$vt_1C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_1C_{54} + t_1^2BC_{64} + t_1t_2\ldots t_sD_2, \tag{11}$$

$$vt_1(C_{21} - C_{54}) + v^2(C_{22} - C_{44}) = t_1^2BC_{64} + t_1t_2\ldots t_sD_2.$$

Звідси

$$C_{22} \equiv C_{44}(\operatorname{mod} RadK). \tag{12}$$

Із виразу (4) отримаємо, що

$$vt_1C_{11} + v^2C_{12} = vt_1C_{44} + t_1^2AC_{54} + t_1t_2\ldots t_sD_3,$$

$$C_{12} \equiv 0(\operatorname{mod} RadK), \tag{13}$$

$$v(C_{11} + vC_{12} - C_{44}) = t_2^2AC_{54} + t_2t_3\ldots t_sD_3. \tag{14}$$

Нехай $C_{11} + vC_{12} - C_{44} \not\equiv 0(\operatorname{mod} RadK)$. Тоді із формули (14) матимемо $\bar{v}\cdot\bar{\theta} = \bar{t}_1\cdot\bar{x}_1$ $(\bar{x}_1 \in \bar{K}_1)$. Оскільки $\theta \in K^*$, то $\bar{\theta} \in (K / t_2K)^*$.

Значить, $\bar{v} = \overline{\theta^{-1}}\,\overline{t_1}\,\overline{x_1} = \overline{t_1x_2} = \bar{u}\bar{x}_2$. Протиріччя, бо $\bar{V} = \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ не є головним ідеалом.

Отже,

$$C_{11} + vC_{12} - C_{44} \equiv 0(\operatorname{mod} RadK). \tag{15}$$

Із виразу (5) матимемо:

$$t_1^2C_{31}A' + vt_1C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_1C_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_4,$$

звідси

$$C_{33} \equiv C_{55}(\operatorname{mod} RadK). \tag{16}$$

Із умови (6) одержимо:

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_1C_{55} + t_1^2BC_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_5.$$

Звідки

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1(C_{22} - C_{55}) = v^2(C_{45} - C_{23}) + t_1^2BC_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_5,$$

$$t_1C_{21}A' + v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1BC_{65} + t_2t_3\ldots t_sD_5,$$

$$v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1x + t_2t_3\ldots t_sD_5.$$

Аналогічними міркуваннями, як у виразі (14), одержуємо, що

$$C_{22} \equiv C_{55} (\mathrm{mod}\, RadK). \tag{17}$$

Із формули (7) дістанемо:

$$t_1^2 C_{11} A' + vt_1 (C_{12} - C_{45}) + v^2 C_{13} = t_1^2 AC_{55} + t_1 t_2 \ldots t_s D_6,$$

звідки випливає, що

$$C_{13} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, RadK), \tag{18}$$

$$t_1 (C_{11} A' - AC_{55}) - v(C_{12} - C_{45} + vC_{13}) = t_2 t_3 \ldots t_s D_6,$$

$$t_1 (C_{11} A' - AC_{55}) = vx + t_2 t_3 \ldots t_s D_6.$$

Нехай

$$C_{11} A' - AC_{55} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, RadK).$$

Тоді

$$\overline{t_1} \overline{\theta} = \overline{v} \overline{x},$$

звідки

$$\overline{t_1} = \overline{v} \overline{y} \ (\overline{y} = \overline{x} \overline{\theta}^{-1}),$$

що призвело до протиріччя з визначенням t_1.

Отже,

$$C_{11} A' - AC_{55} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, RadK). \tag{19}$$

Із виразу (8) матимемо:

$$t_1^2 C_{32} B' + vt_1 (C_{33} - C_{66} - vC_{56}) = t_1 t_2 \ldots t_s D_7,$$

$$t_1^2 C_{32} B' + vt_1 (C_{33} - C_{66}) = t_1 v^2 C_{56} + t_1 t_2 \ldots t_s D_7,$$

$$C_{56} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, RadK).$$

Аналогічними міркуваннями, як у виразі (14), одержуємо, що

$$C_{33} \equiv C_{66} (\mathrm{mod}\, RadK). \tag{20}$$

Зі співвідношення (9) отримаємо:

$$t_1^2 C_{22} B' + vt_1 C_{23} = v^2 C_{46} + vt_1 C_{56} + t_1^2 BC_{66} + t_1 t_2 \ldots t_s D_8,$$

$$t_1^2 (C_{22} B' - BC_{66}) + t_1 v (C_{23} - C_{56}) = v^2 C_{46} + t_1 t_2 \ldots t_s D_8,$$

звідки

$$C_{22} B' \equiv BC_{66} (\mathrm{mod}\, RadK). \tag{21}$$

Із виразів (12), (13), (16), (17), (19), (20) і (21) одержуємо:

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{66} (\mathrm{mod}\, RadK),$$

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, RadK),\ C_{11} A' \equiv AC_{11} (\mathrm{mod}\, RadK),\ C_{11} B' \equiv BC_{11} (\mathrm{mod}\, RadK).$$

Отже, задача описання матричних K-зображень групи G є дикою. Теорема доведена.

1. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми P-адическими коэффициентами // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1983. – С. 5–14.
2. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – 214, № 5. – С. 993–996.
3. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. математ. ин-та АН СССР. – 1978. – 148. – С. 96–105.
4. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произвидения групп над полными дискретно нормированными кольцами // ДАН СССР. – 1977. – 237, № 1. – С. 25–27.

5. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп и задача о паре матриц // Материалы XXIX науч. конф. профессорско–преподавательского состава УжГУ. Секция мат. наук. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1975. – С. 231–240. – Деп. в ВИНИТИ, №705–76.
6. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних p-груп над областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, Сер. математика і інформатика. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 49–56.
7. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Там само. –2006. – Вип. 12–13. – С. 59–64.
8. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про дикі скінченні 2-групи над локальними областями цілісності характеристики нуль // Там само. – 2009. – Вип. 18. – С. 59–64.
9. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – 44, № 6. – С. 753–765.
10. *Стойка М. В.* Про дикі скінченні 2-групи над локальними факторіальними кільцями характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2009. – Вип. 19. – С. 125–132.
11. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Annn. – 1983. – 266, № 1. – P. 1–22.

О МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ОБЛАСТЯМИ ЦЕЛОСТНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОЛЬ

Установлены некоторые условия для кольца целостности характеристики ноль, при которых задача описания над ним матричных представлений циклической группы второго порядка является дикой.

ON MATRIX REPRESENTATIONS OF CYCLIC TWO GROUP OVER THE DOMAIN OF INTEGRITY OF CHARACTERISTIC ZERO

There were obtained some conditions for the ring of integrity of characteristic zero in which the problem of description matrix representations of cyclic two group is wild over this ring.

Ужгородський нац. ун-т, Ужгород

Одержано
13.08.13