УДК 512.5+512.6

О. М. Тертична

0-НАПІВПРОСТІ МАТРИЦІ ТА ЗОБРАЖЕННЯ G-ІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП

Вивчено властивості матричних зображень для природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами, які пов'язані з 0-напівпростими матрицями. Виявлено, що властивості нескінченних напівгруп (що стосуються таких матриць) відрізняються від вивчених раніше властивостей скінченних напівгруп.

Називатимемо напівгрупу g-*ідемпотентною*, якщо її задає система ідемпотентних твірних. Розглянемо природний клас g-ідемпотентних напівгруп з нулем, які породжені елементами e_i і задані визначальними співвідношеннями $e_i^2 = e_i$ для всіх i та деякими співвідношеннями вигляду $e_i e_j = 0$.

Дамо точне визначення.

Нехай I – скінченна множина, що не містить елемента 0, і J – підмножина в декартовому добутку $I \times I$ без діагональних елементів, тобто без елементів вигляду (i, i). Позначимо через $S(I, J)$ напівгрупу з твірними елементами e_i, $i \in I \cup 0$, і визначальними співвідношеннями

1) $e_0 = 0$ ($e_0 e_i = e_i e_0 = 0$ для $i \in I \cup 0$);

2) $e_i^2 = e_i$ для довільного $i \in I$;

3) $e_i e_j = 0$ для довільної пари $(i, j) \in J$.

Напівгрупу такого типу називають *породженою ідемпотентами з частковим нульовим множенням* [2]. Множину всіх напівгруп вигляду $S(I, J)$ позначимо через $\Im$, а через $\Im_{<\infty}$ і $\Im_\infty$ – множини всіх скінченних і нескінченних напівгруп $S(I, J)$. Зокрема, $\Im_\infty = \Im \setminus \Im_{<\infty}$.

Матричне зображення розмірності n *напівгрупи* $S = S(I, J) \in \Im$ над полем k – це (згідно з означенням матричного зображення довільної напівгрупи з нулем) такий набір матриць розміру $n \times n$ $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup 0\}$ з елементами із k, що виконуються умови

1) $M(e_0) = 0$;

2) $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для довільного $i \in I$;

3) $M(e_i) M(e_j) = 0$ для довільної пари $(i, j) \in J$.

Коли говоритимемо про матричне зображення M напівгрупи $S(I, J)$, то поле k вважатимемо довільним, а матриці $M(e_i)$ вказуватимемо лише для $i \neq 0$.

Еквівалентність матричних зображень $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ і $N = \{N(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи $S(I, J)$ означає існування такої оборотної матриці C, що $M(e_i) = C^{-1} N(e_i) C$ для всіх $i \in I$.

Прямою сумою матричних зображень $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ і $N = \{N(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи $S(I, J)$ називають зображення $M \oplus N =$ $= \{M(e_i) \oplus N(e_i) \mid i \in I\}$, де $M(e_i) \oplus N(e_i) = \left(\begin{array}{c|c} M(e_i) & 0 \\ \hline 0 & N(e_i) \end{array}\right)$.

Зображення M називають *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* – в іншому разі (нульове матричне зображення – це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгруп $S(I,J)$ та деякі їх властивості досліджували в низці праць (див., зокрема, [1–6]). Розвиваючи цей напрямок, вивчатимемо властивості матричних зображень таких напівгруп над довільним полем k.

Кожній напівгрупі $S=S(I,J)\in\Im$ (або, що те ж саме, парі (I,J)) поставимо у відповідність такий орієнтований граф $\Lambda=(\Lambda_0,\Lambda_1)$ з множиною вершин Λ_0 і множиною стрілок Λ_1: $\Lambda_0=\{e_i \mid i\in I\}$, а Λ_1 складається зі стрілок $e_i\to e_j$, де (i,j) пробігає множину J. Позначимо цей граф через $\Lambda=\Lambda(I,J)=\Lambda(S)$.

Проте важливішу роль відіграє орієнтований граф $\overline{\Lambda}=\overline{\Lambda}(I,J)=\overline{\Lambda}(S)$ з множиною вершин $\overline{\Lambda}_0$ та множиною стрілок $\overline{\Lambda}_1$: $\overline{\Lambda}_0=\Lambda_0$, а стрілка $e_i\to e_j$ належить $\overline{\Lambda}_1$ тоді і лише тоді, коли $e_i\to e_j$ не належить Λ_1 і при цьому $i\neq j$. Іншими словами, орієнтований граф $\overline{\Lambda}$ є доповненням графа Λ до повного орієнтованого графа без петель (тобто такого орієнтованого графа, який не має стрілок $x\to x$ і має рівно одну стрілку $x\to y$ для довільних вершин x і $y\neq x$).

Очевидно, що напівгрупа $S\in\Im$ однозначно відтворюється за введеними орієнтованими графами.

Доведено [2] критерій скінченності напівгрупи $S(I,J)$, а саме: напівгрупа $S=S(I,J)$ скінченна (тобто $S\in\Im_{<\infty}$) тоді і лише тоді, коли граф $\overline{\Lambda}(S)$ ациклічний (тобто не має орієнтованих циклів).

Квадратну матрицю A над полем k називатимемо *0-напівпростою* (або *майже невиродженою*), якщо виконується одна з таких еквівалентних умов (див. [4, 5]):

a) $\operatorname{rank}(A^2)=\operatorname{rank}(A)$;

b) матриця A подібна до прямої суми невиродженої і нульової матриць;

c) мінімальний поліном $m_A(x)$ матриці A не ділиться на x^2;

d) існує такий поліном $f(x)=xg(x)$, що $g(0)\neq 0$ і $f(A)=0$.

Доведено у [4], що для довільної напівгрупи $S(I,J)$ з класу $\Im_{<\infty}$ матриця $P=\sum_{i\in I}M(e_i)$, де $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ – довільне фіксоване матричне зображення $S(I,J)$ над довільним полем k, є 0-напівпростою. Позначатимо цю властивість через $(*)$.

Сформулюємо основний результат цієї статті.

Теорема. *Нехай k – поле довільної характеристики. Тоді в класі $\Im_\infty$ не виконується властивість $(*)$ над k.*

У випадку, коли характеристика поля дорівнює 2, ця теорема доведена у праці [1].

Д о в е д е н н я. Для доведення теореми слід вказати нескінченну напівгрупу $S(I,J)$ і деяке її фіксоване матричне зображення $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ над довільним полем k, щоб матриця $P=\sum_{i\in I}M(e_i)$ не була 0-напівпростою.

Розглянемо напівгрупу $S(I,J)$ із класу $\Im$, для якої $I=\{1,2\}$, а $J=\varnothing$, позначимо її через S_2, тобто $S_2=\left\langle 0,e_1,e_2 \mid e_1^2=e_1,\ e_2^2=e_2\right\rangle$. Орієнтованим графом $\bar{\Lambda}(S_2)$ є орієнтований цикл довжини 2, тобто $\bar{\Lambda}_0(S_2)=\{e_1,e_2\}$ – множина його вершин, а $\bar{\Lambda}_1(S_2)=\{e_1\to e_2,\ e_2\to e_1\}$ – множина його стрілок. Тому (згідно з критерієм скінченності напівгруп із $\mathfrak{I}$) напівгрупа $S_2\in\mathfrak{I}_\infty$, тобто нескінченна.

Для довільного натурального числа $m>1$ розглянемо таке матричне зображення $M=\{M(e_i)\mid i=1,2\}$ розмірності $2m$ напівгрупи S_2 над довільним полем k:

$$M(e_1)=\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),\quad M(e_2)=\left(\begin{array}{c|c} E_m-J_m(0) & E_m-J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right), \tag{1}$$

де E_m – одинична матриця розміру m, а $J_m(0)$ – клітина Жордана розміру m з власним числом 0.

Оскільки

$$[M(e_1)]^2=\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)=M(e_1),$$

$$[M(e_2)]^2=\left(\begin{array}{c|c} (E_m-J_m(0))^2+(E_m-J_m(0))J_m(0) & (E_m-J_m(0))^2+(E_m-J_m(0))J_m(0) \\ \hline J_m(0)(E_m-J_m(0))+J_m^2(0) & J_m(0)(E_m-J_m(0))+J_m^2(0) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} E_m-2J_m(0)+J_m^2(0)+J_m(0)-J_m^2(0) & E_m-2J_m(0)+J_m^2(0)+J_m(0)-J_m^2(0) \\ \hline J_m(0)-J_m^2(0)+J_m^2(0) & J_m(0)-J_m^2(0)+J_m^2(0) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} E_m-J_m(0) & E_m-J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right)=M(e_2),$$

то M справді є зображенням напівгрупи S_2.

Тоді матриця $P=\sum_{i\in I}M(e_i)$ має вигляд

$$P=M(e_1)+M(e_2)=\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c|c} E_m-J_m(0) & E_m-J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} 2E_m-J_m(0) & E_m-J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right).$$

Щоб довести, що вона не є 0-напівпростою, скористаємось умовою а) означення 0-напівпростоти матриці, тобто покажемо, що ранги матриць P і P^2 не збігаються. Використовуючи елементарні перетворення, знайдемо спочатку ранг матриці P:

$$P=\left(\begin{array}{c|c} 2E_m-J_m(0) & E_m-J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right):\left[\begin{array}{l}\text{віднімемо послідовно від } i\text{-го стовпця} \\ \text{1-ої вертикальної смуги } i\text{-й стовпець} \\ \text{2-ої вертикальної смуги, де } i=1,\mathbf{K},m\end{array}\right]:$$

$$:\left(\begin{array}{c|c} E_m & E_m-J_m(0) \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right):\left[\begin{array}{l}\text{додамо послідовно } i\text{-й рядок 2-ої} \\ \text{горизонтальної смуги до } i\text{-го рядка} \\ \text{1-ої горизонтальної смуги, де } i=1,\mathbf{K},m\end{array}\right]:$$

$$: \left(\begin{array}{c|c} E_m & E_m \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right) : \left[\begin{array}{l} \text{віднімемо послідовно від } i\text{-го стовпця} \\ \text{2-ої вертикальної смуги } i\text{-й стовпець} \\ \text{1-ої вертикальної смуги, де } i = 1,\ldots,m \end{array}\right] : \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{rank}(P) = m + (m-1) = 2m-1$.

Тепер знайдемо ранг матриці P^2:

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} (2E_m - J_m(0))^2 + & (2E_m - J_m(0))(E_m - J_m(0)) + \\ +(E_m - J_m(0))J_m(0) & +(E_m - J_m(0))J_m(0) \\ \hline J_m(0)(2E_m - J_m(0)) + J_m^2(0) & J_m(0)(E_m - J_m(0)) + J_m^2(0) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 4E_m - 4J_m(0) + J_m^2(0) + & 2E_m - 2J_m(0) - J_m(0) + J_m^2(0) + \\ +J_m(0) - J_m^2(0) & +J_m(0) - J_m^2(0) \\ \hline 2J_m(0) - J_m^2(0) + J_m^2(0) & J_m(0) - J_m^2(0) + J_m^2(0) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 4E_m - 3J_m(0) & 2E_m - 2J_m(0) \\ \hline 2J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right) : \left[\begin{array}{l} \text{віднімемо послідовно від } i\text{-го стовпця} \\ \text{1-ої вертикальної смуги } i\text{-й стовпець} \\ \text{2-ої вертикальної смуги, помножений} \\ \text{на 2, де } i = 1,\ldots,m \end{array}\right] :$$

$$: \left(\begin{array}{c|c} J_m(0) & 2E_m - 2J_m(0) \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right) : \left[\begin{array}{l} \text{додамо послідовно } i\text{-й рядок 2-ої} \\ \text{горизонтальної смуги, помножений} \\ \text{на 2, до } i\text{-го рядка 1-ої горизонтальної} \\ \text{смуги, де } i = 1,\ldots,m \end{array}\right] :$$

$$: \left(\begin{array}{c|c} J_m(0) & 2E_m \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right) :$$

$$: \left[\begin{array}{l} \text{віднімемо послідовно від } i\text{-го стовпця} \\ \text{2-ої вертикальної смуги } (i+1)\text{-й стовпець} \\ \text{1-ої вертикальної смуги, помножений} \\ \text{на 2, де } i = 1,\ldots,m-1, \text{ а потім віднімемо} \\ \text{від } m\text{-го рядка 1-ої горизонтальної смуги} \\ (m-1)\text{-й рядок 2-ої горизонтальної смуги,} \\ \text{помножений на 2} \end{array}\right] : \left(\begin{array}{c|c} J_m(0) & 0 \\ \hline 0 & J_m(0) \end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{rank}(P^2) = (m-1) + (m-1) = 2m-2$.

Таким чином, $\mathrm{rank}(P) \neq \mathrm{rank}(P^2)$, тому матриця P не є 0-напівпростою.

Теорема доведена.

Твердження. *Указані в доведенні теореми зображення є нерозкладними.*

Доведення. Для доведення нерозкладності зображення (1) досить показати, що алгебра його ендоморфізмів локальна. Алгебра ендоморфізмів – це множина всіх таких матриць X, що виконуються матричні рівності $M(e_1)X = XM(e_1)$, $M(e_2)X = XM(e_2)$ або

$$\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (2)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_m - J_m(0) & E_m - J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m - J_m(0) & E_m - J_m(0) \\ \hline J_m(0) & J_m(0) \end{array}\right). \qquad (3)$$

Після перемноження матриць рівність (2) набуває вигляду

$$\left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & 0 \\ \hline X_{21} & 0 \end{array}\right),$$

звідки випливає, що $X_{12} = X_{21} = 0$. Отже, матриця X матиме блоково-діагональний вигляд:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & 0 \\ \hline 0 & X_{22} \end{array}\right).$$

Враховуючи це, матричну рівність (3) після перемноження матриць подамо так:

$$\left(\begin{array}{c|c} (E_m - J_m(0))X_{11} & (E_m - J_m(0))X_{22} \\ \hline J_m(0)X_{11} & J_m(0)X_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X_{11}(E_m - J_m(0)) & X_{11}(E_m - J_m(0)) \\ \hline X_{22}J_m(0) & X_{22}J_m(0) \end{array}\right),$$

що еквівалентно системі рівностей

$$(E_m - J_m(0))X_{11} = X_{11}(E_m - J_m(0)),$$

$$(E_m - J_m(0))X_{22} = X_{11}(E_m - J_m(0)),$$

$$J_m(0)X_{11} = X_{22}J_m(0),$$

$$J_m(0)X_{22} = X_{22}J_m(0).$$

З цієї системи маємо: $X_{11} = X_{22}$ і $J_m(0)X_{11} = X_{11}J_m(0)$.

Таким чином, матриця X остаточно матиме вигляд

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & 0 \\ \hline 0 & X_{11} \end{array}\right), \text{ де}$$

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdots & 1,m-1 & 1,m \\ 0 & 11 & 12 & \cdots & 1,m-2 & 1,m-1 \\ 0 & 0 & 11 & \cdots & 1,m-3 & 1,m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

що й доводить локальність алгебри ендоморфізмів зображення M .

Твердження доведене.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за цінні поради та увагу до роботи.

1. *Бондаренко В. М., Манжос Т. В., Тертична О. М.* Про один контрприклад для матричних зображень нескінченних напівгруп $S(I,J)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 18–24.
2. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – 3, № 3. – С. 23–44.
3. *Тертична О. М.* Матричні зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням: дис. канд. фіз.-мат. наук: К., 2009. – 167 с.
4. *Тертична О. М.* Про одну властивість матричних зображень скінченних напівгруп $S(I,J)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 148–153.
5. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On 0-semisimplicity of linear hulls of generators for semigroups generated by idempotents // Algebra Discrete Math. – 2012. – 14, № 2. – P. 168–173.
6. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Ibid. – 2008. – 6, № 4. – P. 15–22.

0-ПОЛУПРОСТЫЕ МАТРИЦЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ G-ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУГРУПП

Изучены свойства матричных представлений для естественного класса полугрупп, порожденных идемпотентами, связанные с 0-полупростыми матрицами. Показано, что свойства бесконечных полугрупп (касающиеся таких матриц) отличаются от изученных ранее свойств конечных полугрупп.

0-SEMISIMPLE MATRICES AND REPRESENTATIONS OF G-IDEMPOTENT SEMIGROUPS

We study the properties of the matrix representations for a natural class of semigroups generated by idempotents, associated with 0-semisimple matrices. It is shown that the properties of infinite semigroups (relating to such matrices) are different from the previously studied properties of finite semigroups.

Київський нац. економічний ун-т
імені Вадима Гетьмана, Київ

Одержано
28.08.13