УДК 512.64

В. Р. Зеліско, М. І. Кучма

СИМЕТРИЧНІ МАТРИЦІ ТА МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ НАД КІЛЬЦЕМ КВАЗІМНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Над кільцем квазімногочленів з інволюцією встановлено необхідні і достатні умови існування й єдиності факторизації симетричних матриць та існування єдиного розв'язку одного типу лінійних матричних рівнянь.

Матриці над кільцями комплексних та дійсних квазімногочленів з інволюціями різних типів, зокрема їх факторизацію, вперше вивчали в праці [7]. За результатами виділення регулярних множників з многочленних матриць [5] і їх напівскалярної еквівалентності [5, 6] знайдені необхідні та достатні умови існування [3] та єдиності [1, 2] факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією.

Мета цієї праці – перенести вказані результати на матриці над кільцями квазімногочленів з інволюцією і дослідити питання про існування єдиного розв'язку одного типу лінійних матричних рівнянь над таким кільцем.

Нехай у кільці квазімногочленів

$$\boldsymbol{C}[x, x^{-1}] = \{ f(x) = \sum_{i=-l}^{p} a_i x^i ,\ a_i \in \boldsymbol{C} \}$$

введено інволюцію ∇ одним із таких можливих способів [7]:

$$(\delta) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i \right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i x^{-i},$$

$$(\varepsilon) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i \right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i (-x)^{-i}, \qquad (1)$$

$$(\varsigma) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i \right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} a_i (-x)^{-i}.$$

На кільце матриць $M_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$ інволюцію ∇ перенесемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \left\| a_{ij}(x) \right\|^{\nabla} = \left\| a_{ji}(x)^{\nabla} \right\|.$$

Квазімногочленну матрицю (к-м.м.) $A(x)$ називають симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$.

Очевидно, що кожну к-м.м. $A(x)$ можна зобразити як матричний квазімногочлен, який за симетричності має вигляд

$$A(x) = \sum_{i=-m}^{m} A_i x^i, \quad A_i^{\nabla} = A_i,$$

а ∇ – одна із вказаних у рівності (1) інволюцій.

Введене у працях [5, 6] поняття напівскалярної еквівалентності многочленних матриць і встановлена там нижня трикутна форма з інваріантними множниками на діагоналі легко перенести на кільце квазімногочленних матриць, оскільки матриці Ex^l, де E – одинична матриця, є оборотними над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$.

Отже, к-м.м. $A(x)$ і $B(x)$ називатимемо напівскалярно еквівалентними, якщо існують такі матриці $Q \in GL_n(\boldsymbol{C})$ і $S(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$, що $A(x) = QB(x)S(x)$.

Нехай $S_A(x)$ – форма Сміта к-м.м. $A(x)$:

$$S_A(x) = P(x)A(x)Q(x) = diag(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \qquad (2)$$

де $P(x), Q(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$, $\varepsilon_i(x)$ – інваріантні квазімногочлени, $\varepsilon_i(x) | \varepsilon_{i+1}(x)$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 1. *Нехай* $A(x)$ *– неособлива к-м.м. Тоді для неї існують такі матриці* $C \in GL_n(\mathbf{C})$ і $R(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$, що

$$CA(x)R(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_n(x) \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де $\varepsilon_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ *– інваріантні квазімногочлени, і* $\varepsilon_i(x)$ *ділить всі елементи стовпця, до якого він належить.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо многочленну матрицю $A_1(x) = A(x)x^l$. Згідно з працями [5, 6] про напівскалярну еквівалентність многочленних матриць, існують такі матриці $C \in GL_n(\mathbf{C})$ і $R_1(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x])$, що

$$CA_1(x)R_1(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon'_n(x) \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де $\varepsilon'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ – інваріантні многочлени матриці $A_1(x)$, $\varepsilon'_i(x)$ ділить всі елементи стовпця, до якого він належить, $\varepsilon'_i(x) = x^{l_i}\varepsilon_i(x)$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = l$, $\varepsilon_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ – інваріантні квазімногочлени. Оскільки елементи вигляду x^{l_i} є зворотними в кільці $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$, то правими елементарними перетвореннями матрицю (4) зведемо до вигляду

$$CA(x)x^l R_1(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_n(x) \end{pmatrix} T(x), \qquad (5)$$

де $T(x) = diag(x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n})$ оборотна над $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ матриця. Домножуючи вираз (5) справа на матрицю $T(x)^{-1}$, одержимо рівність (3), де

$$x^l R_1(x) T(x)^{-1} = R(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}]).$$

Теорему доведено і її можна узагальнити для скінченного набору к-м.м.

Теорема 2. *Нехай* $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$ *– неособливі к-м. м. Тоді існують такі неособлива числова матриця* C *і оборотні матриці* $R_j(x)$, $j = \overline{1, k}$ *над* $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$, *що*

$$CA_j(x)R_j(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(j)}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_n^{(j)}(x) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, k}, \qquad (6)$$

де $\varepsilon_i^{(j)}(x)$ *– інваріантні квазімногочлени матриць* $A_j(x)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$ – неособливі к-м. м. і

$$s = -\min_{j=1}^{k}\{\underline{\deg} A_j(x)\}.$$

Матриці $B_j(x) = A_j(x)x^s$, $j = \overline{1,k}$ є многочленними. Згідно з працями [5, 6], існують такі неособлива числова матриця C і оборотні $R'_j(x)$ над $\boldsymbol{C}[x]$, що

$$CB_j(x)R'_j(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1'^{(j)}(x) & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ * & & \varepsilon_n'^{(j)}(x) \end{pmatrix}, \qquad j = \overline{1,k}, \tag{7}$$

де $\varepsilon_i'^{(j)}(x) = x^{s_{ij}}\varepsilon_i^{(j)}(x)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ij} = s$, $j = \overline{1,k}$, $\varepsilon_i'^{(j)}(x)$ і $\varepsilon_i^{(j)}(x)$ – інваріантні многочлени і квазімногочлени, відповідно, матриць $B_j(x)$ і $A_j(x)$.

Правими елементарними перетвореннями матрицю (7) зведемо до вигляду

$$CA_j(x)x^sR'_j(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(j)}(x) & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ * & & \varepsilon_n^{(j)}(x) \end{pmatrix} T_j(x), \qquad j = \overline{1,k},$$

де $T_j(x) = diag(x^{s_{1j}}, x^{s_{2j}}, \mathbf{K}, x^{s_{nj}})$, $j = \overline{1,k}$, оборотні над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ матриці. Домножуючи останнє співвідношення справа на матрицю $T_j(x)^{-1}$, $j = \overline{1,k}$, отримаємо рівність (6), де $x^sR'_j(x)T_j(x)^{-1} = R_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, оборотні над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ матриці. Теорему доведено.

К-м.м. $A(x) = \sum\limits_{i=-l}^{p} A_i x^i$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $R(x)$ над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$, що к-м.м.

$$A(x)R(x) = A_{-s_1}x^{-s_1} + \mathbf{K} + A_0 + \mathbf{K} + A_{s_2}x^{s_2}$$

регулярна, тобто $\left|A_{-s_1}\right| \neq 0, \left|A_{s_2}\right| \neq 0$.

Доведемо теорему про регуляризацію к-м. м. $A(x)$ у термінах значення матриці на системі коренів елементів діагональної матриці [5].

Нехай к-м. м. $A(x)$ має форму Сміта $S_A(x)$, причому $\deg \det S_A(x) = ns$.

Теорема 3. *Для того, щоб для к-м. м. $A(x)$ існувала оборотна матриця $R(x)$ над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$, що к-м. м. $A(x)R(x)$ є регулярною степеня s, необхідно і достатньо, щоб*

$$\det M_{P(x)\left\| Ex^{-s+1}, \mathbf{K}, Ex^{-1}, E \right\|}(S_A) \neq 0, \tag{8}$$

де матриця $P(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$ із співвідношення (2).

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $A(x)$ регуляризується справа, тобто має вигляд

$$A(x) = (A_{-s_1}x^{-s_1} + \mathbf{K} + A_0 + \mathbf{K} + A_{s_2}x^{s_2})R(x)^{-1}, \tag{9}$$

де $R(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$, $s_1 + s_2 = s$ – степінь к-м. м. $A(x)R(x)$.

Якщо виконується умова (9), то очевидно, що існують такі матриці $N_1, N_2, \mathbf{K}, N_s$ над $\boldsymbol{C}$, що

$$A(x) = (Ex^{-s_1} - N_1x^{-s_1+1} - \mathbf{K} - N_sx^{s_2})x^{-s_2}x^{s_2}R_1(x),$$

де $R_1(x) = A_{-s_1}R(x)^{-1}$ оборотна над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ матриця. Зважаючи, що матриці $Ex^{\pm s}$ оборотні над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$, маємо:

$$A(x) = (Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \ldots - N_{s-1} x^{-1} - N_s) R_2(x),$$

де $R_2(x) = x^{s_2} R_1(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$.

Домножуючи матрицю $A(x)$ зліва на матрицю $P(x)$ із співвідношення (2) і зважаючи, що $P(x)A(x) = S_A(x)Q(x)^{-1}$, отримаємо:

$$P(x)(Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \ldots - N_{s-1}x^{-1} - N_s) = S_A(x)Q(x)^{-1}R_2(x)^{-1}$$

або

$$\left\| P(x)x^{-s}, -P(x)x^{-s+1}, \ldots, -P(x)x^{-1}, -P(x) \right\| \begin{pmatrix} E \\ N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix} = S_A(x)Q_1(x),$$

де $Q_1(x) = Q(x)^{-1}R_2(x)^{-1} \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$.

Беручи певну кількість похідних (яка залежить від кратності коренів елементів діагональної матриці $S_A(x)$) і враховуючи поняття значення матриці на системі коренів елементів діагональної матриці [5], отримаємо:

$$M_{P(x)x^{-s}}(S_A) - M_{P(x)\left\|Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E\right\|}(S_A) \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix} = 0.$$

Це означає, що лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$M_{P(x)\left\|Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E\right\|}(S_A) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix} = M_{P(x)x^{-s}}(S_A),$$

де $X_1, X_2, \ldots, X_s$ – невідомі матриці порядку n, має розв'язок.

Розв'язок $\begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix}$ відмінний від нуля ($|N_s \neq 0|$) і визначається одночасно $S_A(x)$ та $R(x)$. Отже, виконується умова (8).

Достатність. Для к-м.м. $A(x)$ існують такі матриці

$$P(x), Q(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]),$$

такі, що виконується умова (2), тобто $A(x) = P(x)^{-1}S_A(x)Q(x)^{-1}$. Умова (8) означає, що матриця $P(x)^{-1}S_A(x)$ регуляризується справа, тобто існує така матриця

$Z(x) \in GL_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$, що $P(x)^{-1}S_A(x)Z(x) = B(x)$ – регулярна к-м.м. степеня s.

Тоді зі співвідношення (2) маємо, що $A(x)R(x) = B(x)$, де $R(x) = Q(x)Z(x)$ – оборотна над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ матриця. Теорему доведено.

Враховуючи теорему 3, отримуємо метод знаходження коефіцієнтів регулярного множника, що виділяється. Матричні коефіцієнти $N_1, N_2, \ldots, N_s$ регулярного множника $B(x) = Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \ldots - N_s$ знаходимо за формулою

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix} = \left(M_{P(x)\left\|Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E\right\|}(S_A) \right)^{-1} M_{P(x)x^{-s}}(S_A).$$

Зауважимо, що регуляризувати к-м.м. $A(x)$ не вдається регуляризацією відповідної многочленної матриці $A(x)x^l$, де $l = -\underline{\deg} A(x)$, оскільки не завжди виконується умова $n | \deg\det A(x)x^l$, n – порядок матриці $A(x)$.

Нехай $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ – d-матриця, яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ к-м.м. $A(x)$. Через

$$V(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{\varphi_2 k_{21}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_n k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \frac{\varphi_n k_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \ldots & \frac{\varphi_n k_{nn-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} & 1 \end{pmatrix}$$

позначимо матрицю, породжену d-матрицею $\Phi(x)$, в якій $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ – найбільший спільний дільник квазімногочленів $\varphi_i(x)$ і $\varepsilon_j(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \ge j$,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \\ k_{ijh_{ij}} x^{-h_{ij}} + \ldots + k_{ij1} x^{-1} + k_{ij0}, & \text{якщо } (\varphi_i, \varepsilon_j) \ne \varphi_j; \end{cases} \qquad (10)$$

$h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1$, $i = \overline{2, n}$, $j = \overline{1, n-1}$, $i > j$, k_{ijs} – попарно різні змінні величини, які приєднують до поля $\mathbf{C}$, $s = \overline{0, h_{ij}}$.

Наступну теорему, яка дає необхідні і достатні умови існування факторизації симетричної к-м. м. $A(x)$, одержуємо із теорем, доведених раніше [2].

Теорема 4. *Нехай* $\Phi(x)$ – d*-матриця,* $\deg\det\Phi(x) = nr$ *і* $\Phi(x)$ – *дільник форми Сміта* $S_A(x)$ *к-м.м.* $A(x)$. *Для симетричної к-м.м.* $A(x)$ *існує факторизація*

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla},$$

в якій $B(x)$ – *регулярна к-м. м. степеня* r *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – *неособлива к-м. м. тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця*

$$V(\Phi)P(x)A(x)P(x)^{\nabla} V(\Phi)^{\nabla}$$

одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ *і справа на* $\Phi(x)^{\nabla}$ *за деяких допустимих значень параметрів* k_{ijs} *із рівності (10) матриці* $V(\Phi)$, *для яких виконується умова*

$$\det M_{V(\Phi)P(x) \| Ex^{-r+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(\Phi) \ne 0,$$

де матриця $P(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ *із співвідношення (2).*

К-м.м. $A(x) = \sum_{i=-l}^{p} A_i x^i$ назвемо унітальною, якщо $A(x)$ регулярна і $A_p = E$.

Теорема 5. *У факторизації* $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}$ *симетричної к-м. м.* $A(x)$ *унітальний множник* $B(x)$ *єдиний з формою Сміта* $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x), \kappa_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ *тоді і тільки тоді, коли форми Сміта к-м. м.* $A(x)$ *рівна добутку форм Сміта її співмножників.*

Доведення теореми випливає із теореми 1 з праці [2] із урахуванням попередніх теорем 1–4.

Наслідок. Використовуючи результати праць [4, 9], легко побачити, що теореми 4 і 5 справедливі для факторизації к-м.м. $A(x) \in M_n(\boldsymbol{R}[x, x^{-1}])$ з інволюціями (δ) і (ς).

Розглянемо питання про єдиність розв'язків лінійного матричного рівняння

$$A(x)X(x) - Y(x)A(x)^{\nabla} = C(x), \tag{11}$$

де $A(x), C(x) \in M_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$, інволюцію ∇ вводимо одним із способів (ε), (δ) чи (ς), а $X(x)$ та $Y(x)$ – невідомі матриці порядку n над $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$. Матричні рівняння такого типу над кільцями многочленів вивчали раніше [8, 10].

Для кожного із вказаних типів інволюцій у кільці $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ розглянемо множину Γ, яка складається із ∇-нерухомих незвідних елементів:

$$\Gamma = \left\{ c \in \boldsymbol{C} \,|\, (x-c)^{\nabla} = u(x-c),\ u \in \boldsymbol{C}^* \right\}.$$

Як показано в праці [7], під час інволюції (ε) множина Γ – одиничне коло $|x| = 1$, під час інволюції (δ) множина $\Gamma = \varnothing$, а за інволюції (ς) – $\Gamma = \{i; -i\}$.

Теорема 6. *Лінійне матричне рівняння (11), де* $A(x)$ *– унітальна матриця ненульового степеня над кільцем* $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$, *має за довільної матриці* $C(x)$ *та інволюції* ∇, *визначеної одним із способів* (ε), (δ) *чи* (ς), *єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли жодний корінь* $\det A(x)$ *не належить відповідній множині* Γ.

Д о в е д е н н я. Нехай $A(x)$ у рівнянні (11) має вигляд $A(x) = \sum_{i=-l}^{p} A_i x^i$. Домноживши обидві частини рівняння на оборотну над кільцем $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ матрицю Ex^l, одержимо матричне рівняння

$$A(x)x^l X(x) - Y(x)A(x)^{\nabla} x^l = C(x)x^l, \tag{12}$$

коефіцієнтами якого є матриці над $\boldsymbol{C}[x]$, причому $A(x)x^l$ і $B(x)x^l$ – унітальні і згідно з лемами 1 і 2 із праці [8] рівняння (12) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(\det A(x)x^{nl}, \det A(x)^{\nabla} x^{nl}) = 1$. Оскільки $x = 0$ не є коренем $\det A(x) \in \boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$ і враховуючи те, що $\det A(x)^{\nabla} = (\det A(x))^{\nabla}$, остання умова еквівалентна рівності $(\det A(x), (\det A(x))^{\nabla}) = 1$.

Зауважимо, що оскільки $\deg A(x)^{\nabla} = \deg A(x)$, то рівняння (11) має деякий розв'язок $X_0(x)$, $Y_0(x)$, в якому $\deg X_0(x) < \deg A(x)$.

Дослідимо умови виконання рівності $(\det A(x), (\det A(x))^{\nabla}) = 1$ для кожного типу інволюцій у кільці $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$.

Нехай за інволюції (δ) квазімногочлени (к. м.) $\det A(x)$ та $(\det A(x))^{\nabla}$ мають спільний дільник $x - c$, тобто $c \in \boldsymbol{C}$ – спільний корінь к. м. $x - c$ та $(x-c)^{\nabla}$. Оскільки $(x-c)^{\nabla} = \frac{1}{x} - \overline{c}$, а коренем к. м. $\frac{1}{x} - \overline{c}$ є $\overline{c}^{-1}$, то для $c \in \boldsymbol{C}$ виконується умова $\overline{c} = \overline{c}^{-1}$, а тому $c \cdot \overline{c} = |c|^2 = 1$. Отже, умова $(\det A(x), (\det A(x))^{\nabla}) = 1$ не виконується, якщо к. м. $\det A(x)$ має хоча б один корінь c, для якого $|c| = 1$, тобто цей корінь належить множині Γ.

Аналогічно за інволюції (ε) кожний спільний корінь c к. м. $\det A(x)$ та $(\det A(x))^{\nabla}$ є коренем к. м. $x-c$ та $(x-c)^{\nabla} = -\frac{1}{x} - \bar{c}$. Звідси випливає, що $c = -\frac{1}{\bar{c}}$. Але тоді $|c|^2 = -1$, що неможливо для жодного $c \in \boldsymbol{C}$, тобто $c \in Æ = \Gamma$.

За інволюції (ς) кожний спільний корінь c к. м. $\det A(x)$ та $(\det A(x))^{\nabla}$ задовольняє умови $x - c = 0$ та $(x-c)^{\nabla} = -\frac{1}{x} - c = 0$. Звідси $c = -\frac{1}{c}$, а тому $c^2 = -1$ і $c \in \{i; -i\} = \Gamma$. Теорему доведено.

Наслідок. Розв'язок лінійного матричного рівняння (11) єдиний за довільної матриці $C(x) \in M_n(\boldsymbol{C}[x, x^{-1}])$ та інволюції (ε) у кільці $\boldsymbol{C}[x, x^{-1}]$.

1. *Зеліско В. Р.* Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30 – С. 36–38.
2. *Зеліско В. Р.* Матриці та матричні рівняння над кільцями многочленів з інволюцією // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8 – С. 18–22.
3. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 91–95.
4. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів елементів матриці та її застосування // Там же. – 2005. – 48, № 4. – С. 20–29.
5. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
6. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диф. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
7. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. – 1973. – 14, № 2. – С. 337–356.
8. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональные факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Матем. заметки. – 1985. – 37, вип. 6. – С. 789–996.
9. *Щедрик В. П.* Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 3. – С. 370–373.
10. *Feinstein J., Bar-Ness V.* On the Uniqueness of the Minimal Solution to the Matrix Polynomial Equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. of Franklin Institute. – 1980. – 310. – № 2. – P. 131–134.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД КОЛЬЦОМ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Над кольцом квазимногочленов с инволюцией установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности факторизации симметрических матриц и существование единственного решения одного типа линейных матричных уравнений

SYMMETRIC MATRICES AND MATRIX EQUATIONS OVER RINGS OF QUASIPOLYNOMIALS WITH INVOLUTION

Over a ring of quasipolynomials with involution are obtained necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of factorization of symmetric matrices and the existence of one type of solutions of linear matrix equations

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
10.10.13