УДК 512.552.13

Б. В. Забавський, О. М. Романів

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ *n*-РАЗ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 2

Введено поняття кільця n-раз стабільного рангу 2. Доведено, що комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників. Також доведено, що довільні n матриць над комутативним кільцем Безу n-раз стабільного рангу 2 зводяться до спеціального трикутного вигляду з елементарними дільниками на головній діагоналі за допомогою ідентичних однобічних елементарних перетворень та домноженням на відповідні оборотні матриці, з іншого боку.

Всі розглядувані нижче кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $U(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через $GL_n(R)$ – кільце всіх оборотних матриць порядку n з елементами із кільця R.

Комутативне кільце R називають *кільцем Безу* [3], якщо будь-який скінченно породжений ідеал кільця R є головним.

Комутативне кільце R називають *кільцем Ерміта* [5], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ і оборотна матриця $Q \in GL_2(R)$ такі, що $(a, b)Q = (d,0)$.

Комутативне кільце R називають *кільцем елементарних дільників* [5], якщо для довільної матриці A з елеменами кільця R існують такі оборотні матриці P, Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = diag(e_1, e_2, \dots, e_k, 0, \dots, 0),$$

де e_i — повний дільник елемента e_{i+1}, $i=1, 2, \dots, k-1$.

Кільце R називатимемо *кільцем n-раз стабільного рангу* 2, якщо для довільних елементів $a_i, b_i, c_i \in R$, $i=1, \dots, n$, таких, що $a_iR + b_iR + c_iR = R$, існує такий елемент $x \in R$, що $(a_i + b_ix)R + c_iR = R$.

З праці [2] випливає, що кільце $C[x]$ є кільцем n-раз стабільного рангу 2.

Адекватне кільце R – це кільце Безу, в якому для довільних елементів $a, b \in R$, a ¹ 0, існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR$ ¹ R для довільного необоротного дільника s' елемента s [1]. Адекватне кільце є прикладом кільця 1-раз стабільного рангу 2.

У праці [1] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Якщо R – адекватне кільце, то для таких елементів $a, b, c \in R$, що $(a, b, c) = 1$, існує такий елемент $x \in R$ такий, що $(a + rb, c) = 1$.*

Теорема 2. *Комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2 є кільцем Ерміта.*

Д о в е д е н н я. Нехай R – комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2. Розглянемо довільні елементи $a, b \in R$. Оскільки R – кільце Безу, то $aR + bR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = a_0d$, $b = b_0d$, $au + bv = d$. Звідси отримуємо $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$, причому $a_0R + b_0R + cR = R$ для такого елемента $c \in R$, що $dc = 0$.

Оскільки R – кільце n-раз стабільного рангу 2, то існує такий елемент $x \in R$, що $(a_0 + cx)R + b_0R = R$. Звідси для деяких елементів $t, s \in R$, отримуємо $(a_0 + cx)t + b_0s = 1$.

Очевидно, що матриця

$$Q = \begin{pmatrix} a_0 + cx & b_0 \\ -s & t \end{pmatrix}$$

є оборотною, причому $(d, 0)Q = (a,b)$. Тоді $(a, b)Q^{-1} = (d,0)$, звідки випливає, що R є кільцем Ерміта.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Комутативне кільце Безу* n*-раз стабільного рангу* 2 *є кільцем елементарних дільників.*

Д о в е д е н н я. Нехай R – комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2. Оскільки R є кільцем Ерміта (за теоремою 2), то для доведення достатньо розглянути матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(R).$$

Нехай $aR + bR + cR = R$. Оскільки R – комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2, то для елементів a, b, c існує такий елемент $x \in R$, що $(ax + b)u + cv = 1$, де $u, v \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -au & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -c \\ v & xa+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Якщо $aR + bR + cR = dR$, то, оскільки матриця $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ належить центру кільця $M_2(R)$, маємо таку саму ситуацію, як за взаємної простоти елементів a, b, c.

Теорему доведено.

Нагадаємо, що під елементарними [4] розуміємо квадратні матриці таких трьох типів: отримані з одиничної переставлянням рядків чи стовпців; діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць порядку n з елементами кільця R позначатимемо $GE_n(R)$ [3].

Оскільки

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -au & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GE_2(R),$$

то із доведення теореми 3 випливає правильність такої теореми.

Теорема 4. *Якщо* R *– комутативне кільце Безу* n*-раз стабільного рангу* 2, *то для довільної матриці* A *з елементами кільця* R *існують такі елементарні матриці* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *та оборотна матриця* Q *відповідних розмірів, що*

$$P_1P_2\ldots P_kAQ = diag(e_1, e_2, \ldots, e_k, 0, \ldots, 0),$$

де e_i *– повний дільник елемента* e_{i+1}, $i=1, 2, \ldots, k-1$.

Теорема 5. *Якщо* R *– комутативне кільце Безу* n*-раз стабільного рангу* 2, *то для довільних матриць* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in M_2(R)$ *існують такі матриці* $P \in GE_2(R)$ *і* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in GL_2(R)$, *що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ * & e_i' \end{pmatrix},$$

причому e_i *– повний дільник* e_i', $i = 1, 2, \ldots, n$.

Д о в е д е н н я. З ермітовості кільця R випливає, що доведення достатньо виконати для трикутних матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Нехай $a_iR + b_iR + c_iR = R$. Оскільки R – кільце n-раз стабільного рангу 2, то для елементів $a_i, b_i, c_i \in R$ існує такий елемент $x \in R$, що $(a_ix + b_i)R + c_iR = R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_i + b_i & c_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GE_2(R)$. Крім цього, оскільки R – кільце Безу, то існують такі елементи u_i, $v_i \in R$, що $(a_i x + b_i)u_i + c_i v_i = e_i \in U(R)$, а тому

$$\begin{pmatrix} xa_i + b_i & c_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i & -c_i \\ v_i & xa_i + b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

де, зрозуміло, $\begin{pmatrix} u_i & -c_i \\ v_i & xa_i + b_i \end{pmatrix} \in GL_2(R)$.

Зауважимо також що, якщо $c_i = 0$, то $a_i R + b_i R = R$. Тому існує такий елемент $x \in R$, що $(a_i x + b_i)R = R$, тобто $a_i x + b_i \in U(R)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_i + b_i & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Нехай $a_i R + b_i R + c_i R = d_i R$. Тоді існують такі елементи a_i', b_i', $c_i' \in R$, що $a_i = d_i a_i'$, $b_i = d_i b_i'$, $c_i = d_i c_i'$, причому $a_i'R + b_i'R + c_i'R = R$. Оскільки

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i' & 0 \\ b_i' & c_i' \end{pmatrix},$$

де, очевидно, матриця $\begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix}$ належить центру кільця $M_2(R)$, то цей випадок аналогічний, як і для взаємнопростих елементів a, b, c.

Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай $A = BC$, де B, C – матриці другого порядку над комутативним кільцем Безу n-раз стабільного рангу 2. Тоді елементарні дільники матриці A діляться на відповідні елементарні дільники матриць B та C.*

Д о в е д е н н я. Нехай R – комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 2. Тоді за теоремою 4 існують такі матриці $P \in GE_2(R)$ і Q_1, $Q_2 \in GL_2(R)$, що

$$PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}CQ_1.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} e_A & 0 \\ * & e_A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_B & 0 \\ * & e_B' \end{pmatrix} Q_2^{-1}CQ_1.$$

Очевидно, що матриця $Q_2^{-1}CQ_1$ – трикутна, тобто

$$Q_2^{-1}CQ_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$e_A = e_B c_{11}, \quad e_A' = e_B' c_{22},$$

що й потрібно довести.

Теорему доведено.

1. *Білявська С. І., Забавський Б. В.* Стабільний ранг адекватного кільця // Мат. студії. – 2010. – 33, № 2. – С. 212–214.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теор. та прикл. питання алгебри і диф. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.

3. *Кон П.* Свободные кольца и их связи // М.: Мир, 1976. – 422 с.
4. *Cohn P.* On the structure of the GL_2 of a ring // I. H. E. S. Publ. Math. – 1996. – 30. – P. 365–413.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РЕДУКЦИЯ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗУ *n*-РАЗ СТАБИЛЬНОГО РАНГА 2

Введено понятие кольца n-раз стабильного ранга 2. Доказано, что коммутативное кольцо Безу n-раз стабильного ранга 2 является кольцом элементарных делителей. Также доказано, что произвольные n матрицы над коммутативным кольцом Безу n-раз стабильного ранга 2 приводятся к специальному треугольному виду с элементарными делителями на главной диагонали путем идентичных односторонних элементарных преобразований и умножения на обратные матрицы с другой стороны.

ELEMENTARY REDUCTION OF MATRICES OVER COMMUTATIVE BEZOUT RING WITH *n*-FOLD STABLE RANGE 2

It is shown, that a commutative Bezout rings n-fold stable range 2 stable is an elementary divisor ring. Moreover, it is proved that an arbitrary set of n matrices over commutative Bezout rings n-fold stable range 2 again reducible to a special triangular form with elementary divisors on the main diagonal by identical unilateral elementary transformations.

Львів. нац. ун-т
імені Івана Франка, Львів

Одержано
12.09.13