

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ФУНКЦІЙ У МОЛОДШОМУ КОЕФІЦІЕНТІ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежних від часу параметрів у коефіцієнті за невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Çàää÷à, yëy äîñë³æø°мо, î î°äí ó° äää ðëì è çää÷: êí äö³ó³óí òí ó î ääð-í äí ó ðà çää÷÷÷ ç ä³ëuí îð î äæâð. Êí äö³ó³óí òí³ î ääðí äí³ çää÷÷³, ä yëëð äí î ä³äîî èð î äëäæëðü î äëí ääí ääë³ëüëà êí äö³ó³óí ð³ä ð³äí ýíí ý, ä î äëàñðüð ç ä³äîî èí è î äæäì è äîñðàðí ùí î î äí î äëä÷äí³, çí êðäì à [8, 15], î ääðí äí³ çää÷÷³ äëçí ä÷äí í ý êí äö³ó³óí ðà çä î ä³äîî òí òóí êö³; ä î äí î äëè ð³í î ò î äðääí ë³÷í î-ì ó ð³äí ýíí³. Вепä³ðëäí î [5, 6, 9] ðëðäí í ý î äí î ÷äñí î; äääí ðëö³ëäð³; êí äö³ó³óí òí ðí ðäí êí î äí ä³äí îñ³ ðà ðäí êí î òí ò³. Діñë³æääí î [11] çää÷÷÷÷ î äí î ÷äñí î äí äëçí ä÷äí í ý öóí êö³ë, Ùí çäëäæäðü ä³ä ð³çí êö äðäðí äí ð³ä, ó êí äö³ó³óí ð³ çä î ä³äîî òí òóí êö³; ä î äí î äëè ð³í î ò î äðääí ë³÷í î ð³äí ýíí³.

Ääääðí î ðäëðë÷íî ääæëëäëð çää÷÷÷ çäëä÷÷÷ çäëä÷÷÷ ç ä³ëuí èí è î äæä-ì è. Çäí ð³íð çí ð³íêö çää÷÷÷÷ ç ä³ëuí èí è î äæäì è î î äëí ä çääñðë äí êí äö³ó³óí òí òí êö î ääðí äí êö çää÷÷÷÷ î äëäñðüð ç ä³äîî èí è î äæäì è. Çí äëääí î [1, 2, 4] òí î äë ññí òääí í ý ðà °äëí îñ³ ðíçä'ýçë³ä î ääðí äí êö çää÷÷÷÷ äëý î äí î - î äâîâî-ìîðíñ î äðääí ë³÷í êö ð³äí ýíí ù ç î ä³äîî èí è, çäëäæí èí è ä³ä ÷äñ, ððäððëè è êí äö³ó³óí ðäí è ä î äëäñðüð ç ä³ëuí èí è î äæäì è. Встановлено [3] умови одно-значної розв'язності задачі з вільною межею для двовимірного параболіч-ного рівняння у криволінійному прямокутнику, розташування криволінійної частини якого визначає функція, що є добутком невідомої функції часу та заданої функції просторової змінної. Аивчено [12, 14] î ääðí äí³ çää÷÷÷÷ äëçí ä÷äí í ý çäëäæäí î ä³ä ÷äñ êí äö³ó³óí ðà çä î ä³äîî òí òóí êö³; ä î äí î äëè ð³í î ò î äðääí ë³÷í î ð³äí ýíí³ ä î äëäñð³, ÷äñêëí ä ääí äñý î äæä yëí î ä³äîî òí î.

Рíçäëüíëìî î ääðí äí ý çää÷÷÷÷÷ äëçí ä÷äí í ý êí äö³ó³óí ðà çä î ä³äîî òí òóí êö³; î äí î äëè ð³í î î äðääí ë³÷í î ð³äí ýíí ý ç ääí î ä î ä³äîî èí è î äðäí äðäè è, çäëäæäí èí è ä³ä ÷äñ, ä î äëäñð³ ç ä³ëuí îð î äæâð.

Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо параболічне рівняння

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + (c_1(t)x + c_2(t))u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з невідомими функціями $c_1(t), c_2(t)$ за початкової умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

крайових умов

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умов перевизначення

$$\int_0^{h(t)} x^{i-3} u(x, t) dx = \mu_i(t), \quad i = \overline{3, 5}, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Увівши нову змінну $y = \frac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)–(4) до оберненої за-дачі з невідомими $(h(t), c_1(t), c_2(t), v(y, t))$, де $v(y, t) = u(yh(t), t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t), t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v +$$

$$+f(yh(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$v(y, 0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0, 1], \quad (6)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$h(t) \int_0^1 v(y, t) dy = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$h^2(t) \int_0^1 yv(y, t) dy = \mu_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$h^3(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy = \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Існування розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

- А) $a, b, f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $\varphi \in C^2[0, 1]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = \overline{1, 5}$;
 Б) $0 < a_0 \leq a(y, t) \leq a_1$, $f(y, t) \geq 0$, $(y, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$, $\varphi(yh_0) \geq \varphi_0 > 0$,
 $y \in [0, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{2, 5}$, $t \in [0, T]$, де a_0, a_1, φ_0 – відомі додатні сталі;

В) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$, $h_0^2 \int_0^1 y\varphi(yh_0) dy = \mu_4(0)$,

$h_0^3 \int_0^1 y^2 \varphi(yh_0) dy = \mu_5(0)$, де $h_0 = h(0) > 0$ – розв'язок рівняння

$h(0) \int_0^1 \varphi(yh_0) dy = \mu_3(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0, T_0] \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T_0]$, задачі (5)–(10).

Простори $C[0, T]$, $C^1[0, T]$, $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ введено в праці [7, с. 17].

Д о в е д е н н я. Доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (5)–(10) до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\mathfrak{V}(y, t) = v(y, t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y - 1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для цієї функції одержуємо задачу:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_t &= \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \mathfrak{V}_{yy} + \frac{b(yh(t), t) + yh'(t)}{h(t)} (\mathfrak{V}_y + h_0 \varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \\ &- \mu_1(t) + \mu_1(0)) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t)) (\mathfrak{V} + \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + \\ &+ (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0))) + h_0^2 \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \varphi''(yh_0) + f(yh(t), t) - y\mu_2'(t) + \\ &+ \mu_1'(t)(y - 1), \quad (y, t) \in Q_T, \\ \mathfrak{V}(y, 0) &= 0, \quad y \in [0, 1], \\ \mathfrak{V}(0, t) &= \mathfrak{V}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (11)$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\mathcal{V}_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \mathcal{V}_{yy} + \frac{b(yh(t), t)}{h(t)} \mathcal{V}_y$$

задачу (11) зводимо до рівняння

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(y, t) = & \int_0^1 \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} (\mathcal{V}_\eta(\eta, \tau) + h_0 \phi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \right. \\ & + \mu_1(0)) + \frac{b(\eta h(\tau), \tau)}{h(\tau)} (h_0 \phi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + (c_2(\tau) + \\ & + \eta h(\tau) c_1(\tau)) (\mathcal{V}(\eta, \tau) + \eta(\mu_2(\tau) - \mu_2(0)) + (1 - \eta)(\mu_1(\tau) - \mu_1(0)) + \phi(\eta h_0)) + \\ & \left. + f(\eta h(\tau), \tau) - \eta \mu_2'(\tau) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) + h_0^2 \frac{a(\eta h(\tau), \tau)}{h^2(\tau)} \phi''(\eta h_0) \right) d\eta d\tau, \\ & (y, t) \in \bar{Q}_T. \end{aligned} \quad (12)$$

Позначимо $w(y, t) = v_y(y, t)$, $\rho(t) = h'(t)$. Подамо рівняння (12) у вигляді

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \phi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{\eta \rho(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) + (\eta h(\tau) c_1(\tau) + c_2(\tau)) v(\eta, \tau) + \right. \\ & + \frac{b(\eta h(\tau), \tau)}{h(\tau)} (h_0 \phi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \\ & \left. - \eta \mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau), \tau) + h_0^2 \frac{a(\eta h(\tau), \tau)}{h^2(\tau)} \phi''(\eta h_0) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T. \end{aligned} \quad (13)$$

Продиференціювавши (13) за змінною y , одержуємо:

$$\begin{aligned} w(y, t) = & h_0 \phi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0) + \int_0^1 \int_0^1 G_{1y}(y, t, \eta, \tau) \times \\ & \times \left(\frac{\eta \rho(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) + (\eta h(\tau) c_1(\tau) + c_2(\tau)) v(\eta, \tau) + \frac{b(\eta h(\tau), \tau)}{h(\tau)} (h_0 \phi'(\eta h_0) + \right. \\ & + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \eta \mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau), \tau) + \\ & \left. + h_0^2 \frac{a(\eta h(\tau), \tau)}{h^2(\tau)} \phi''(\eta h_0) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T. \end{aligned} \quad (14)$$

З умови (8) отримуємо:

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y, t) dy}, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Продиференціювавши співвідношення (8)–(10) за змінною t і використавши рівняння (5), одержуємо:

$$\begin{aligned} c_1(t) = & \left[\int_0^1 (h(t) (b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t)) w(y, t) + h(t) f(yh(t), t)) (h(t) \mu_4(t) - \right. \\ & - \mu_5(t) - y(h^2(t) \mu_3(t) - \mu_5(t)) + y^2 h(t) (h(t) \mu_3(t) - \mu_4(t))) - a(yh(t), t) \times \\ & \times w(y, t) (\mu_5(t) - h^2(t) \mu_3(t) - 2yh(t) (\mu_4(t) - h(t) \mu_3(t)))) dy + \mu_5'(t) (\mu_4(t) - \\ & - h(t) \mu_3(t)) + \mu_4'(t) (h^2(t) \mu_3(t) - \mu_5(t)) + (\mu_3'(t) h(t) + a(0, t) w(0, t)) (\mu_5(t) - \\ & \left. - h(t) \mu_4(t)) \right] \Delta^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
c_2(t) = & \left[h^4(t) \int_0^1 y^3 v(y, t) dy \left(\int_0^1 (h(t)(1-y) ((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t)) w(y, t) + \right. \right. \\
& + h(t) f(yh(t), t) + a(yh(t), t) w(y, t)) dy - a(0, t) w(0, t) - h(t) \mu_3'(t) + \\
& + \mu_4'(t) - h(t) \int_0^1 (h(t) ((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t)) w(y, t) + h(t) f(yh(t), t)) \times \\
& \times (\mu_5(t) - yh(t) \mu_4(t) + y^2 (h(t) \mu_4(t) - \mu_5(t))) + a(yh(t), t) w(y, t) (h(t) \mu_4(t) - \\
& - 2y (h(t) \mu_4(t) - \mu_5(t))) dy + \mu_5'(t) (h(t) \mu_4(t) - \mu_5(t)) - \mu_4'(t) h^2(t) \mu_4(t) + \\
& \left. \left. + (\mu_3'(t) h(t) + a(0, t) w(0, t)) h(t) \mu_5(t) \right) \right] \Delta^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(t) = & \left[h^4(t) \int_0^1 y^3 v(y, t) dy \left(\int_0^1 (((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t)) w(y, t) + h(t) \times \right. \right. \\
& \times f(yh(t), t)) (yh(t) \mu_3(t) - \mu_4(t)) - \mu_3(t) a(yh(t), t) w(y, t)) dy + \mu_4(t) \mu_3'(t) + \\
& + \frac{a(0, t)}{h(t)} \mu_4(t) w(0, t) + \frac{a(h(t), t)}{h(t)} (h(t) \mu_3(t) - \mu_4(t)) w(1, t) - \mu_3(t) \mu_4'(t) - \\
& - \int_0^1 (((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t)) w(y, t) + h(t) f(yh(t), t)) (y^2 h^2(t) (\mu_3(t) \mu_5(t) - \\
& - \mu_4^2(t)) - \mu_5^2(t) + yh(t) \mu_4(t) \mu_5(t)) - a(yh(t), t) w(y, t) (\mu_4(t) \mu_5(t) + 2yh(t) \times \\
& \times (\mu_3(t) \mu_5(t) - \mu_4^2(t))) dy + (\mu_5^2(t) + h^2(t) \mu_4^2(t) - h(t) \mu_5(t) (h(t) \mu_3(t) + \\
& + \mu_4(t))) \frac{a(h(t), t)}{h(t)} w(1, t) - \frac{a(0, t)}{h(t)} \mu_5^2(t) w(0, t) + \mu_5'(t) (\mu_3(t) \mu_5(t) - \mu_4^2(t)) + \\
& \left. \left. + \mu_4'(t) \mu_4(t) \mu_5(t) - \mu_3'(t) \mu_5^2(t) \right) \right] (\mu_2(t) \Delta(t))^{-1}, \quad t \in [0, T], \quad (18)
\end{aligned}$$

де

$$\Delta(t) = h^6(t) \begin{vmatrix} \int_0^1 (1-y) v(y, t) dy & \int_0^1 (y-y^2) v(y, t) dy \\ \int_0^1 (1-y^2) v(y, t) dy & \int_0^1 (y-y^3) v(y, t) dy \end{vmatrix}.$$

Таким чином, задачу (5)–(10) зведено до системи рівнянь (13)–(18) відносно невідомих $(v(y, t), w(y, t), h(t), c_1(t), c_2(t), \rho(t))$. Якщо $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0, T] \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(v, w, h, c_1, c_2, \rho) \in (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0, T])^4$ є розв'язком системи рівнянь (13)–(18). Правильним є і обернене твердження.

Нехай $(v, w, h, c_1, c_2, \rho)$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (13)–(18). Умови теореми 1 дають можливість продиференціювати (13) за змінною y . Праві частини отриманої рівності та рівності (14) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w(y, t) \equiv v_y(y, t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
v_t = & \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t), t) + yp(t)}{h(t)} v_y + (yh(t) c_1(t) + c_2(t)) v + \\
& + f(yh(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (19)
\end{aligned}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0, T]$ функцій $c_1(t)$, $c_2(t)$, $h(t)$, $p(t)$. Рівність (15) збігається з умовою (8). Подамо рівняння (16)–(18) у вигляді

$$\begin{aligned} \rho(t)\mu_2(t) + c_1(t)\mu_4(t) + c_2(t)\mu_3(t) &= \frac{a(0, t)}{h(t)} v_y(0, t) - \frac{a(h(t), t)}{h(t)} v_y(1, t) + \\ &+ \mu_3'(t) - \int_0^1 ((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t))v_y(y, t) + h(t)f(yh(t), t)) dy, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \rho(t)h(t)\mu_2(t) + c_1(t)\mu_5(t) + c_2(t)\mu_4(t) &= -a(h(t), t)v_y(1, t) + \mu_4'(t) - \\ &- \int_0^1 (yh(t)((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t))v_y(y, t) + h(t)f(yh(t), t)) - \\ &- a(yh(t), t)v_y(y, t)) dy, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho(t)h^2(t)\mu_2(t) + c_1(t)h^4(t) \int_0^1 y^3 v(y, t) dy + c_2(t)\mu_5(t) &= \mu_5'(t) - \\ &- h(t)a(h(t), t)v_y(1, t) - \int_0^1 h(t)y(h(t)y((b(yh(t), t) - a_x(yh(t), t))v_y(y, t) + \\ &+ h(t)f(yh(t), t)) - 2a(yh(t), t)v_y(y, t)) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Припущення теореми дають можливість продиференціювати (15) за змінною t . Використавши те, що функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (19), і віднявши від отриманої рівності рівняння (20), одержуємо:

$$(h'(t) - p(t)) \frac{\mu_3(t)}{h(t)} = 0.$$

Отже, $p(t) = h'(t)$, $h \in C^1[0, T]$ і функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (5). Зведемо (21), (22) до вигляду

$$\begin{aligned} 2h'(t)h(t) \int_0^1 yv(y, t) dy + h^2(t) \int_0^1 y \left(\frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy}(y, t) + \right. \\ \left. + \frac{b(yh(t), t) + yh'(t)}{h(t)} v_y(y, t) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v(y, t) + \right. \\ \left. + f(yh(t), t) \right) dy = \mu_4'(t), \\ 3h'(t)h^2(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy + h^3(t) \int_0^1 y^2 \left(\frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy}(y, t) + \right. \\ \left. + \frac{b(yh(t), t) + yh'(t)}{h(t)} v_y(y, t) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v(y, t) + \right. \\ \left. + f(yh(t), t) \right) dy = \mu_5'(t). \end{aligned}$$

Використавши рівняння (5) і проінтегрувавши цю рівність від 0 до t , отримуємо умови (9), (10).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (13)–(18) у вище зазначеному сенсі доведено.

Подамо $\Delta(t)$ у вигляді [10, с. 72]

$$\Delta(t) = \frac{h^6(t)}{2} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} 1 - y_1 & 1 - y_2 \\ 1 - y_1^2 & 1 - y_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v(y_1, t) & v(y_2, t) \\ y_1 v(y_1, t) & y_2 v(y_2, t) \end{vmatrix} dy_1 dy_2 =$$

$$= \frac{h^6(t)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (1-y_1)(1-y_2)(y_2-y_1)^2 v(y_1, t) v(y_2, t) dy_1 dy_2.$$

Встановимо оцінки знизу функцій $v(y, t)$ і $h(t)$. Оскільки всі доданки (13), крім першого, прямують до нуля при $t \rightarrow 0$, то згідно з умовами 2) теореми 1 можемо зробити висновок про існування такого числа t_1 , $0 < t_1 \leq T$, яке визначає нерівність

$$\begin{aligned} & \left| y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{\eta \rho(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\eta h(\tau) c_1(\tau) + c_2(\tau)) v(\eta, \tau) + \frac{b(\eta h(\tau), \tau)}{h(\tau)} (h_0 \phi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \eta \mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau), \tau) + h_0^2 \frac{d(\eta h(\tau), \tau)}{h^2(\tau)} \phi''(\eta h_0) \right) d\eta d\tau \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \min_{[0,1]} \phi(y h_0), \quad (y, t) \in \bar{Q}_{t_1}, \end{aligned} \quad (23)$$

що

$$v(y, t) \geq \frac{1}{2} \min_{[0,1]} \phi(y h_0) \equiv M_0 > 0, \quad (y, t) \in \bar{Q}_{t_1}. \quad (24)$$

Враховавши (23), з (13) одержуємо:

$$v(y, t) \leq \max_{[0,1]} \phi(y h_0) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (y, t) \in \bar{Q}_{t_1}. \quad (25)$$

Тоді для розв'язків рівняння (15) справедлива нерівність

$$h(t) \geq \frac{1}{M_1} \min_{[0, T]} \mu_3(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (26)$$

Таким чином,

$$\Delta(t) \geq C_0 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (27)$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (13)–(18). Враховавши (25), для розв'язків рівняння (15) одержуємо нерівність

$$h(t) \leq \frac{1}{M_0} \max_{[0, T]} \mu_3(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \quad (28)$$

Позначимо $W(t) = \max_{y \in [0,1]} |w(y, t)|$. З (16)–(18), враховавши (25)–(28), отримуємо:

$$\begin{aligned} & |c_1(t)| \leq C_1 + C_2 W(t), \quad |c_2(t)| \leq C_3 + C_4 W(t), \\ & |\rho(t)| \leq C_5 + C_6 W(t), \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (29)$$

Використавши (25), (26), (28), (29) та оцінку функції Яріна [7, с. 469]

$$\int_0^1 |G_{1y}(y, t, \eta, \tau)| d\eta \leq \frac{C_7}{\sqrt{t-\tau}},$$

з (14) одержуємо:

$$W(t) \leq C_8 + C_9 \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$, тоді попередню нерівність подамо у вигляді

$$W_1(t) \leq C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (30)$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата та використаємо нерівність Коші–Буняковського

$$W_1^2(t) \leq C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Замінивши t на σ , домножимо попередню нерівність на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ та проінтегруємо від 0 до t :

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leq C_{14} + C_{13} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}} d\tau.$$

Змінивши порядок інтегрування у другому доданку правої частини нерівності та використавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi,$$

одержуємо:

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leq C_{14} + C_{15} \int_0^t W_1^4(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Підставивши (31) в (30), отримуємо:

$$W_1(t) \leq C_{16} + C_{17} \int_0^t W_1^4(\tau) d\tau.$$

Позначимо $S(t) \leq C_{16} + C_{17} \int_0^t W_1^4(\tau) d\tau$. Тоді

$$S'(t) \leq C_{17} S^4(t).$$

Інтегруючи це співвідношення, знаходимо:

$$S(t) \leq \frac{C_{16}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{16}^3 C_{17} t}} \leq C_{18}, \quad t \in [0, T_0],$$

де число $T_0, 0 < T_0 \leq t_1$, задовольняє умову $1 - 3C_{16}^3 C_{17} T_0 > 0$. Таким чином,

$$W(t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Тоді

$$|c_1(t)| \leq C_1 + C_2 M_2 \equiv B_1 < \infty, \quad |c_2(t)| \leq C_3 + C_4 M_2 \equiv B_2 < \infty,$$

$$|p(t)| \leq C_5 + C_6 M_2 \equiv B_3 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Подамо систему рівнянь (13)–(18) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y, t), w(y, t), h(t), c_1(t), c_2(t), p(t))$, а оператор $P = (P_1, \mathbf{K}, P_6)$ визначає праві частини рівнянь (13)–(18). Позначимо

$$N = \{(v, w, h, c_1, c_2, p) \in (C(\bar{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^4 : M_0 \leq v(y, t) \leq M_1, |w(y, t)| \leq M_2,$$

$$H_0 \leq h(t) \leq H_1, |c_1(t)| \leq B_1, |c_2(t)| \leq B_2, |p(t)| \leq B_3\}. \text{ З наведених вище оцінок}$$

випливає, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N у себе. Залишилося довести, що множина PN компактна у просторі неперервних функцій, або, згідно з теоремою Арцела–Асколі, рівномірно обмежена та одностайно неперервна. З наведених вище оцінок можна стверджувати, що множина PN рівномірно обмежена. За умов 1) і 2) теореми 1, аналогічно міркуючи як у праці [13], легко переконатися у тому, що множина PN одностайно неперервна. Таким чином, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок

$(v, w, h, c_1, c_2, \rho) \in (C(\overline{Q_{T_0}}))^2 \times (C[0, T_0])^4$ системи рівнянь (13)–(18), а отже, розв'язок задачі (5)–(10) при $(y, t) \in \overline{Q_{T_0}}$.

Теорему 1 доведено.

Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. Нехай виконуються умови

- ⌈ $a \in C^{2,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $b, f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$,
 ⌋ $a(y, t) > 0$, $(y, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$, $\varphi(yh_0) \geq \varphi_0 > 0$, $y \in [0, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$,
 $i = \overline{1, 3}$, $t \in [0, T]$.

Тоді задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0, T] \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q_T})$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Д о в е д е н н я. Нехай $(h_i(t), c_{1i}(t), c_{2i}(t), v_i(y, t))$, $i = 1, 2$ – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо:

$$\frac{h'_i(t)}{h_i(t)} = p_i(t), \quad i = 1, 2, \quad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$r(t) = c_{11}(t) - c_{12}(t), \quad q(t) = c_{21}(t) - c_{22}(t), \quad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $v(y, t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t = & \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t), t)}{h_1(t)} + yp_1(t) \right) v_y + (yh_1(t)c_{11}(t) + c_{21}(t))v + \\ & + (yh_1(t)r(t) + yc_{12}(t)(h_1(t) - h_2(t)) + q(t))v_2 + \left(\frac{b(yh_1(t), t)}{h_1(t)} - \right. \\ & \left. - \frac{b(yh_2(t), t)}{h_2(t)} + yp(t) \right) v_{2y} + \left(\frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t), t)}{h_2^2(t)} \right) v_{2yy} + \\ & + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (32)$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (33)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (34)$$

$$\int_0^1 v(y, t) dy = \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (35)$$

$$\int_0^1 yv(y, t) dy = \mu_4(t) \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (36)$$

$$\int_0^1 y^2 v(y, t) dy = \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_1^3(t)} - \frac{1}{h_2^3(t)} \right), \quad t \in [0, T]. \quad (37)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t), t)}{h_1(t)} + yp_1(t) \right) v_y + (yh_1(t)c_{11}(t) + c_{21}(t))v$$

розв'язок задачі (32)–(34) подамо у вигляді

$$v(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau) ((\eta h_1(\tau)r(\tau) + \eta c_{12}(\tau)(h_1(\tau) - h_2(\tau)) +$$

$$\begin{aligned}
 & +q(\tau)v_2(\eta, \tau) + \left(\frac{b(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1(\tau)} - \frac{b(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2(\tau)} + \eta\rho(\tau) \right) v_{2\eta}(\eta, \tau) + \\
 & + \left(\frac{a(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - \\
 & - f(\eta h_2(\tau), \tau) \, d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Продиференціювавши (38) за змінною y , отримуємо:

$$\begin{aligned}
 v_y(y, t) &= \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau) ((\eta h_1(\tau)r(\tau) + \eta c_{12}(\tau)(h_1(\tau) - h_2(\tau)) + \\
 & + q(\tau)v_2(\eta, \tau) + \left(\frac{b(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1(\tau)} - \frac{b(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2(\tau)} + \eta\rho(\tau) \right) v_{2\eta}(\eta, \tau) + \\
 & + \left(\frac{a(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - \\
 & - f(\eta h_2(\tau), \tau)) \, d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Оскільки для $c_{1i}(t)$, $c_{2i}(t)$, $h'_i(t)$, $i = 1, 2$, справджуються рівності, аналогічні (16)–(18), то

$$\begin{aligned}
 \rho(t)\mu_2(t) + r(t)\frac{\mu_4(t)}{h_1(t)} + q(t)\frac{\mu_3(t)}{h_1(t)} &= -\frac{a(h_1(t), t)}{h_1(t)} v_y(1, t) + \frac{a(0, t)}{h_1(t)} v_y(0, t) + \\
 + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) &\left(a(0, t)v_{2y}(0, t) - a(h_1(t), t)v_{2y}(1, t) - \frac{v_{2y}(y, t)}{h_2^2(t)} \times \right. \\
 \times (a(h_1(t), t) - a(h_2(t), t)) &+ \left. \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left(\mu'_3(t) - \int_0^1 ((b(yh_2(t), t) - \right. \right. \\
 - a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) &+ h_2(t)f(yh_2(t), t))dy - \mu_3(t)c_{22}(t) - \mu_4(t)c_{12}(t) - \\
 - \frac{1}{h_1(t)} \int_0^1 ((b(yh_1(t), t) - &a_x(yh_1(t), t))v_y(y, t) + (b(yh_1(t), t) - b(yh_2(t), t) - \\
 - a_x(yh_1(t), t) + a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) &+ h_1(t)(f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t)) + \\
 + (h_1(t) - h_2(t))f(yh_2(t), t))dy, & \quad t \in [0, T], \tag{40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(t)(\mu_5(t) - h_1(t)\mu_4(t)) + q(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t)) &= (h_1(t) - h_2(t))(\mu_3(t) \times \\
 \times c_{22}(t) + \mu_4(t)c_{12}(t) - \mu'_3(t)) - a(0, t)v_y(0, t) &+ \int_0^1 ((h_1(t) - h_2(t))(1 - y) \times \\
 \times (v_{2y}(y, t)(b(yh_2(t), t) - a_x(yh_2(t), t)) &+ h_2(t)f(yh_2(t), t)) + h_1(t)(1 - y) \times \\
 \times ((b(yh_1(t), t) - a_x(yh_1(t), t))v_y(y, t) &+ v_{2y}(y, t)(b(yh_1(t), t) - b(yh_2(t), t) - \\
 - a_x(yh_1(t), t) + a_x(yh_2(t), t)) + h_1(t)(f(yh_1(t), t) &- f(yh_2(t), t)) + (h_1(t) - \\
 - h_2(t))f(yh_2(t), t)) + (a(yh_1(t), t) - a(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) &+ a(yh_1(t), t) \times \\
 \times v_y(y, t))dy, \quad t \in [0, T], \tag{41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \int_0^1 (h_1(t)((b(yh_1(t), t) - a_x(yh_1(t), t))v_{1y}(y, t) + h_1(t)f(yh_1(t), t)) \times \\
 \times (h_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t) - y(h_1^2(t)\mu_3(t) - \mu_5(t)) - &y^2 h_1(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t))) - \\
 - a(yh_1(t), t)v_{1y}(y, t)(\mu_5(t) - h_1^2(t)\mu_3(t) - &2yh_1(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t))))dy + \\
 + \mu'_5(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t)) + \mu'_4(t)(h_1^2(t)\mu_3(t) &- \mu_5(t)) + (a(0, t)v_{1y}(0, t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_3'(t)h_1(t)(\mu_5(t) - h_1(t)\mu_4(t)) \Bigg] \left(h_1^4(t)(\mu_3(t)h_1(t) - \mu_4(t)) \int_0^1 y^3 v(y, t) dy - \right. \\
& - (h_1(t) - h_2(t))\mu_4(t)\mu_5(t) + (h_1^2(t) - h_2^2(t))(\mu_4^2(t) - \mu_3(t)\mu_5(t)) + (\mu_3(t)(h_1^5(t) - \\
& - h_2^5(t)) - \mu_4(t)(h_1^4(t) - h_2^4(t))) \int_0^1 y^3 v_2(y, t) dy \Bigg) (\Delta_1(t)\Delta_2(t))^{-1} + \left[\int_0^1 (h_1(t) \times \right. \\
& \times ((b(yh_1(t), t) - a_x(yh_1(t), t))v_y(y, t) + (b(yh_1(t), t) - b(yh_2(t), t) - \\
& - a_x(yh_1(t), t) + a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) + h_1(t)(f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t)) + \\
& + (h_1(t) - h_2(t))f(yh_2(t), t))(h_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t) - y(h_1^2(t)\mu_3(t) - \mu_5(t)) - \\
& - y^2 h_1(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t))) - (a(yh_1(t), t)v_y(y, t) + (a(yh_1(t), t) - \\
& - a(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t))(\mu_5(t) - h_1^2(t)\mu_3(t) - 2yh_1(t)(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_3(t))) + \\
& + (1 - y)(v_{2y}(y, t)(b(yh_2(t), t) - a_x(yh_2(t), t)) + h_2(t)f(yh_2(t), t))(1 + y) \times \\
& \times (h_1^2(t) - h_2^2(t))\mu_4(t) - y\mu_3(t)(h_1^3(t) - h_2^3(t)) - (h_1(t) - h_2(t))\mu_5(t) + \\
& + a(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t)((2y - 1)\mu_3(t)(h_1^2(t) - h_2^2(t)) - 2y(h_1(t) - h_2(t)) \times \\
& \times \mu_4(t)) dy + (h_1(t) - h_2(t))(\mu_3'(t)\mu_5(t) - \mu_5'(t)\mu_3(t) - \mu_4(t)a(0, t)v_{2y}(0, t) + \\
& + (h_1^2(t) - h_2^2(t))(\mu_4'(t)\mu_3(t) - \mu_3'(t)\mu_4(t)) + (\mu_5(t) - h_1(t)\mu_4(t))a(0, t) \times \\
& \left. \times v_y(0, t) \right] \Delta_2^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \tag{42}
\end{aligned}$$

де

$$\Delta_i(t) = h_i^6(t) \begin{vmatrix} \int_0^1 (1-y)v_i(y, t) dy & \int_0^1 (y-y^2)v_i(y, t) dy \\ \int_0^1 (1-y^2)v_i(y, t) dy & \int_0^1 (y-y^3)v_i(y, t) dy \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Отже, задачу (32)–(37) зведено до системи рівнянь (40)–(42), де $v_y(y, t)$ визначає формула (39). Використавши принцип максимуму [7, с. 25] для розв'язку прямої задачі (5)–(7) і врахувавши умови 2) теореми 2, отримуємо:

$$\begin{aligned}
v_i(y, t) & \geq C_{19} \min \left\{ \min_{[0,1]} \phi(yh_0), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t) \right\} > 0, \\
i & = 1, 2, (y, t) \in \bar{Q}_T.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\Delta_i(t) > 0, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Згідно з припущеннями 1) теореми 2 перетворимо різницю

$$\begin{aligned}
f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t) & = \\
& = y(h_1(t) - h_2(t)) \int_0^1 f_x(yh_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t)), t) d\sigma. \tag{43}
\end{aligned}$$

Ця рівність справедлива і для функцій $b(yh_i(t), t)$, $a(yh_i(t), t)$ та $a_x(yh_i(t), t)$, $i = 1, 2$.

Виразимо $h_i(t)$ через $p_i(t)$:

$$h_i(t) = h_i(0) \exp \left(\int_0^t p_i(\tau) d\tau \right), \quad i = 1, 2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Врахувавши рівність

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau,$$

одержуємо:

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0} \int_0^t \rho(\tau) d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma\rho(\tau) + p_2(\tau)) d\tau\right) d\sigma. \quad (44)$$

Аналогічно (44) використаємо для зображення різниць $h_1^i(t) - h_2^i(t)$, $i = \overline{1,5}$,
 $\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}$.

Підставивши (43), (44) в (40)–(42), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду відносно невідомих $\rho(t)$, $q(t)$, $r(t)$. Використавши оцінку функції Гріна [7, с. 469]

$$\int_0^1 |G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau)| d\eta \leq \frac{C_{20}}{\sqrt{t-\tau}},$$

з властивостей розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з ядрами, які мають інтегровні особливості, випливає, що система рівнянь (40)–(42) має тільки тривіальний розв'язок $\rho(t) = 0$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Звідси отримуємо, що $\rho_1(t) = \rho_2(t)$, $h_1(t) = h_2(t)$, $c_{11}(t) = c_{12}(t)$, $c_{21}(t) = c_{22}(t)$, $t \in [0, T]$. Використавши це в задачі (32)–(34), одержуємо, що

$$v_1(y, t) = v_2(y, t), \quad (y, t) \in \overline{Q}_T.$$

Теорему 2 доведено.

Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Умови на вихідні дані задачі, за яких існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4), містяться в таких теоремах.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

- 1) $a, b, f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $\varphi \in C^2[0, h_0]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = \overline{1,5}$;
- 2) $0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1$, $f(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$,
 $x \in [0, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{2,5}$, $t \in [0, T]$;
- 3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$, $\int_0^{h_0} x\varphi(x) dx = \mu_4(0)$, $\int_0^{h_0} x^2\varphi(x) dx = \mu_5(0)$,

де $h_0 = h(0) > 0$ є розв'язком рівняння $\int_0^{h(0)} \varphi(x) dx = \mu_3(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(h, c_1, c_2, u) \in C^1[0, T_0] \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T_0]$, задачі (1)–(4).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

- 1) $a \in C^{2,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $b, f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$,
- 2) $a(x, t) > 0$, $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [0, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$,
 $i = \overline{1,3}$, $t \in [0, T]$.

Тоді задача (1)–(4) не може мати двох різних розв'язків $(h, c_1, c_2, u) \in C^1[0, T] \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

1. Баранська І. Визначення старшого коефіцієнта у параболическому рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
2. Баранська І. Є, Іванчов М. І. Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісник. – 2007. – 4, № 4. – С. 457–484.
3. Іванчов М. І. Задача з вільною межею для двовимірного параболического рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 1. – С. 27–35.
4. Іванчов М. І. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 901–910.
5. Еліаф І. А. Е. І а і ададіте сааа-а і ай і адді ай і і ай і і даааеаі еу еіу ООеОеаі ді а даі еі і ді ай ай і підє є даі еі ай еі підє // Неаирск. і ад. еобді. – 1994. – 35, № 3. – №. 612–621.
6. Еліаеу-оє Н. І. Аесі а-аі і у еі а О³О³О³ О³а даі еі і ді а аі і підє да і а³О³ і і і даі еі О³ і і підє а даааді еаді ай і о підааі а е О³ // І ад. і аді а е³ О³с-і ад. і і еу. – 1997. – 40, № 2. – №. 153–159.
7. Ладзыженская О. А., Нієї і єєі а А. А., Одаєуоаа І. І. Линеиные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. І ай арпді і а І. О. І а і і даааеаі єе еіу ООеОеаі да і адааі еє-анеі ай одааі ай еу // Епнєааовање і і еі о-аеО. одааі ениял. – 1989. – АСІ. 22. – №. 157–160.
9. Пабирицька Н. В. Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 1. – С. 51–58.
10. І і єеа А., Ніаа А. Сааа-є є даі даі О ес ай аєєса. ДуаО. Еі даадаеуі і а ен-єн-еаі еа. Оаі деу Ооі еоєе. – І . І аоєа, 1978. – 391 н.
11. НаааОааа А. А. Нааааі еа і ададіте сааа-є аєу одааі ай еу і адааі еє-анеі ай деі а // Атєе. ДАІ . – 1994. – 334, № 5. – №. 562–563.
12. Ні³Оеї А. А. Коефіцієнтна оадді ай а сааа-а аєу і адааі е³-і і ай о³аі у і і у а і аєан³ с а³еуі і р і аєаір // І ад. і аді ає да О³с-і ад. і і еу. – 2008. – 51, № 4. – №. 37–47.
13. Ні³Оеї А. А. І ааді ай а сааа-а аєу і адааі е³-і і ай о³аі у і і у а і аєан³ с а³еуі і р і аєаір // Там само. – 2007. – 50, № 4. – №. 7–18.
14. Ні³Оеї А. А. І ааді ай а сааа-а для і адааі е³-і і го о³аі у і і а з невідомими молодшими коефіцієнтами а і аєа³ с а³еуі і р і аєаір // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 231–245.
15. Cannon J., Lin Y., Wang S. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – 33. – P. 149–163.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ФУНКЦИЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящих от времени параметров в коэффициенте при неизвестной функции в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

DETERMINATION OF THE TIME-DEPENDENT FUNCTIONS IN THE MINOR COEFFICIENT IN A PARABOLIC EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

We established conditions of existence and uniqueness of solution to the inverse problem of finding the time-dependent parameters in the coefficient of the unknown function in one-dimensional parabolic equation in free boundary domain.