УДК 517.98

А. В. Загороднюк, Г. М. Петрів

ГОМОМОРФІЗМИ АЛГЕБРИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Досліджено гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі. Запропоновано узагальнення поняття радіус-функції, доведено формулу для її обчислення. Показано, що не кожен гомоморфізм є аналогом функціонала “значення в точці”.

Вступ. Нехай X – банахів простір над полем комплексних чисел C. Функцію $f : X \to$ C називають аналітичною обмеженого типу, якщо f обмежена на обмежених множинах і звуження f на кожен скінченновимірний підпростір $V \subset X$ є аналітичною функцією на V. Позначимо $H_b(X)$ алгебру цілих функцій обмеженого типу. Відзначимо, що $H_b(X)$ є алгеброю Фреше відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Позначимо $M_b(X)$ множину неперервних характерів (комплексних гомоморфізмів) алгебри $H_b(X)$. Множину комплексних гомоморфізмів $M_b(X)$ вивчали у працях [1, 2, 3, 5, 6].

Нижче досліджено гомоморфізми алгебри $H_b(X)$ в деяку скінченновимірну комутативну алгебру A. Зокрема, наведено приклад гомоморфізму, який не є оператором “значення в точці” деякого елемента з $H_b(X)$ у сенсі функціонального числення.

Основні результати. Нехай A – деяка скінченновимірна комутативна алгебра з одиницею e. Як A, наприклад, можна взяти деяку комутативну підалгебру M_n^+ алгебри M_n квадратних матриць $n \times n$.

Розглянемо тензорний добуток $A \otimes X$, кожен елемент якого $\bar{a} \in A \otimes X$ можна подати у вигляді формальної суми $\sum_k a_k \otimes x_k$, де $a_k \in A, x_k \in X$.

Нагадаємо, що проективною на тензорному добутку називають норму

$$\|\bar{a}\|_\pi = \inf \sum_k \|a_k\| \|x_k\|,$$

де $\inf$ беруть по всіх зображеннях $\bar{a} = \sum_k a_k \otimes x_k$.

Позначимо $A \otimes_\pi X$ поповнення $A \otimes X$ за нормою $\|\cdot\|_\pi$.

Нагадаємо, що довільне n-лінійне відображення $B : X \times \mathbf{K} \times X \to$ C можна продовжити до неперервного $\tilde{B} : X'' \times \mathbf{K} \times X'' \to$ C так:

$$\tilde{B}(x_1'', \mathbf{K}, x_n'') = \lim_{\alpha_1} \mathbf{K} \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \mathbf{K}, x_{\alpha_n}),$$

де для кожного k, $1 \le k \le n$, (x_{α_k}) – це напрямленість у X, збіжна в $*$-слабкій топології простору X до x_k''.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^n X)$, де $\mathcal{P}(^n X)$ – простір однорідних поліномів, і B – n-лінійне відображення, асоційоване з P. Тоді продовження Арона–Бернера $\tilde{P}$ полінома P визначає формула $\tilde{P} := \tilde{B}(x, \mathbf{K}, x)$. Оскільки кожна аналітична функція обмеженого типу є рівномірною границею сум поліномів, то продовження Арона–Бернера для функцій з $H_b(X)$ визначають природним чином [1].

Твердження. Для кожної функції $f \in H_b(X)$ існує така функція $\tilde{f} \in H_b(A \otimes_\pi X'', A)$, що $\tilde{f}(e \otimes x) = ef(x)$, $x \in X$ і відображення $f \mapsto \tilde{f}$ є гомоморфізмом алгебр $H_b(X)$ і $H_b(A \otimes_\pi X'', A)$.

Д о в е д е н н я. Для кожного $\bar{a} \in A \otimes_\pi X$, $f \in H_b(X)$ визначимо $\bar{f}(\bar{a})$ в сенсі функціонального числення для аналітичних функцій на банаховому просторі [4]. Нехай $\tilde{f}$ – продовження Арона–Бернера для $\bar{f}$. Відомо [4], що відображення $f \mapsto \bar{f}$ є гомоморфізмом і $\tilde{f}(e \otimes x) = ef(x)$ для кожного $x \in X$. Тоді $f \mapsto \tilde{f}$ буде гомоморфізмом з $H_b(X)$ в $H_b((A \otimes_\pi X)'', A) = H_b(A \otimes_\pi X'', A)$.

Для кожного $\bar{z} \in A \otimes_\pi X''$ визначимо $\theta_z : H_b(X) \to A$ такою формулою: $\theta_z(f) = \tilde{f}(\bar{z})$. Згідно з твердженням, θ_z буде гомоморфізмом з $H_b(X)$ в A.

Приклад. Нехай M_2^+ – комутативна підалгебра в M_2, яка містить елемент $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Покажемо, що не кожен гомоморфізм φ з $H_b(X)$ в M_2^+ має вигляд θ_z для деякого $\bar{z} \in M_2^+ \otimes X''$. Розглянемо алгебру $H_b(M_2^+ \otimes_\pi l_2, M_2^+)$. Нехай

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \otimes x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes e_k \in M_2^+ \otimes_\pi l_2,$$

де $x = (x_1, \ldots x_k, \ldots) \in l_2$, $a_k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{pmatrix} \in M_2^+$, e_k – елементи стандартної бази простору l_2. Позначимо $P_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ поліном другого степеня від x. Тоді $\bar{P}_2(\bar{a}) = \bar{P}_2(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Нехай $F \in H_b(l_2)$. Визначимо $\varphi(F) = \lim\limits_U \bar{F}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n)$, де границю обчислюють за деяким вільним ультрафільтром U.

Тоді

$$\varphi(P_2) = \lim_U \bar{P}_2(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n) = \lim_U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

З іншого боку, за теоремою Рісса для довільного лінійного функціоналу існує така послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$, що $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x_k$, де $g_k \to 0$ із умови збіжності ряду. Тому

$$\varphi(g) = \lim_U \bar{g}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_n) = \lim_U g_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо $\varphi = \theta_z$, то $\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. А це суперечить рівності (1).

Позначимо через $M_Y(H_b(X))$ множину всіх гомоморфізмів з банахової алгебри $H_b(X)$ в банахову алгебру Y. Для $\varphi \in M_b(X)$ введено [1] поняття радіус-функції $R(\varphi)$, як інфімум таких всіх r, що φ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на кулі радіуса r. Радіус-функцію можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sup \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}. \qquad (2)$$

де φ_n – звуження φ на простір n-однорідних поліномів $\mathrm{P}({}^nX)$ і $\|\varphi_n\|$ – норма в $\mathrm{P}({}^nX)'$.

Продовжуючи ідею з праці [1], означимо радіус-функцію $R(\Phi)$, $\Phi \in M_Y(H_b(X))$, як нижню грань таких усіх r, що Φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі rB.

Таким чином,

$$0 \le R(\Phi) \le \infty.$$

Позначимо P_m простір m-однорідних аналітичних функцій на X. Введемо на P_m норму рівномірної збіжності на одиничній кулі B з X :

$$\|P\| = \|P\|_1 = \sup\{|P(x)| : x \in B\}, P \in \mathrm{P}_\mathrm{m}. \qquad (3)$$

З однорідності $P \in \mathrm{P}_\mathrm{m}$ отримуємо:

$$\|P\|_r = r^m \|P\|, \ r > 0$$

Позначимо через Φ_m звуження $\Phi \in L(H_b(X), Y)$ (множина всіх лінійних і неперервних операторів з $H_b(X)$ в Y) на P_m. Тоді Φ_m є неперервним. Його норма на P_m :

$$\|\Phi_m\| = \sup\{\|\Phi(P)\| : P \in \mathrm{P}_\mathrm{m}, \|P\| \le 1\}.$$

Теорема. Радіус-функцію R на $M_Y(H_b(X))$ визначає формула

$$R(\Phi) = \lim_{m\to\infty} \sup \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Доведення. Припустимо, що

$$0 < t < \lim_{m\to\infty} \sup \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Тоді існує послідовність однорідних поліномів P_j степеня $n_j \to \infty$ таких, що $\|P_j\| = 1$ і $|\Phi(P_j)| > t^{n_j}$. Якщо $0 < r < t$, тоді (за однорідністю (3)),

$$\|P_j\|_r = \sup_{x \in rB_{l_1}} |P_j(x)| = r^{n_j},$$

так що $|\Phi(P_j)| > \left(\frac{t}{r}\right)^{n_j} \|P_j\|_r$ і Φ не є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$. Звідси випливає, що $R(\varphi) \ge r$. Оскільки вибираємо r довільно, то

$$R(\Phi) \ge \lim_{m\to\infty} \sup \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Нехай тепер $s > \lim\limits_{m\to\infty} \sup \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}$. З цього випливає, що $\|\Phi_m\| \le s^m$ для великих m. Тоді існує таке $c \ge 1$, що $\|\Phi_m\| \le cs^m$ для кожного m. Якщо

$r > s$ є довільним і функція $f \in H_b(X)$ має розклад у ряд Тейлора $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, то

$$r^n \|f_n\| = \|f_n\|_r \le \|f\|_r, \; n \ge 0.$$

Звідси

$$|\Phi(f_m)| \le \|\Phi_m\| \|f_m\| \le \frac{cs^m}{r^m} \|f\|_r.$$

Таким чином, Φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на rB і $R(\Phi) \le r$. Оскільки r і s довільні, то

$$R(\Phi) \le \lim_{m\to\infty} \sup \|\Phi_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Теорему доведено.

Застосовуючи цю теорему, знайдемо оцінку радіус-функції гомоморфізму $\theta_{\bar{z}}$ і перевіримо, чи збігатиметься отриманий результат із значенням, отриманим безпосереднім обчисленням норми у відповідному просторі.

Розглянемо простір $\mathbf{l}_1$. Нехай $\bar{z} = z_1 e_1 + \mathbf{K} + z_n e_n + \mathbf{K} \in M_n^+ \otimes \mathbf{l}_1$, де z_n – конкретні матриці, які комутують між собою. Тоді

$$\|\bar{z}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| = c_1 + c_2 + \mathbf{K} + c_n + \mathbf{K} = c < \infty.$$

Тут числа $c_n, n = 1,2, \mathbf{K}$ – відповідні значення норми матриць z_n, визначені як операторна норма в просторі операторів на C^n.

Знайдемо $R(\theta_{\bar{z}})$. За формулою (2) і вище доведеною теоремою маємо:

$$R(\theta_{\bar{z}}) = \lim_{m\to\infty} \sup \|(\theta_{\bar{z}})_m\|^{\frac{1}{m}}$$

З іншого боку:

$$(\theta_{\bar{z}})_m(f) = \theta_{\bar{z}}(f_m) = \tilde{\tilde{f}}_m(\bar{z}).$$

Тому

$$\|(\theta_{\bar{z}})_m\| = \sup_{\|f_m\|\le 1} \left\|\tilde{\tilde{f}}(z)\right\| \le \|f_m\| \|\bar{z}\| = c^m.$$

Отже, остаточно маємо:

$$R(\theta_{\bar{z}}) = \lim_{m\to\infty} \sup \|(\theta_{\bar{z}})_m\|^{\frac{1}{m}} \le \lim_{m\to\infty} \sup \|c^m\|^{\frac{1}{m}} = c.$$

Таким чином, показали, що для довільного елемента простору $M_n^+ \otimes \mathbf{l}_1$ виконується нерівність

$$R(\theta_{\bar{z}}) = \|\bar{z}\| \le c.$$

1. *Aron R. M., Cole B. J., and Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – 415. –P. 51–93.
2. *Aron R. M., Cole B. J., and Gamelin T. W.* Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. – 1995. – 47. – P. 673–683.

3. *Aron R. M., Galindo P., Garcia D., and Maestre M.* Regularity and algebras of analytic function in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – 348. – P. 543–559.
4. *Dineen S., Hart R. E., and Taylor C.* Spectra of tensor product elements III : holomorphic properties // Proceedings of the Royal Irish Academy – 2003. –103A (1). – P. 61–92.
5. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – 134. – P. 2559–2569.
6. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemporary Math. – 2007. – 435. – P. 381–394.

ГОМОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ТИПА НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Исследованы гомоморфизмы алгебры целых функций ограниченного типа на банаховом пространстве. Получено обобщение для радиус-функции и показано, что не каждый гомоморфизм является аналогом функционала "значение в точке".

HOMOMORPHISMS OF ALGEBRAS OF ENTIRE FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE ON A BANACH SPACE

Homomorphisms of algebras of entire functions of bounded type on Banach spaces are investigated. Some generalization of radius-function is obtained and shows that there is a homomorphism whis is not an analosue of the point evaluation functional.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Прикарпатський нац. ун-т
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
05.09.13