УДК 330.43+336.764.2

В. С. Янішевський, Р. В. Фещур

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ЦІНИ ОПЦІОНУ В МОДЕЛІ ГЕСТОНА

Подано послідовний вивід формули ціни європейського опціону колл в моделі Гестона, який ґрунтується на розв'язанні рівняння для ядра еволюції Мертона–Гармана із застосуванням перетворень Фур'є і Лапласа. Отримана формула еквівалентна відомій формулі Гестона, проте записана в компактнішому вигляді. Показано, що за постійної волантильності можна отримати відому формулу Блека–Шоулза.

Вступ. Розрахунок раціональної ціни опціонів бере початок від класичної праці [1], в якій наведено формулу Блека–Шоулза. З цього часу з'явилось чимало досліджень, пов'язаних з її уточненням і узагальненням. Відомо [1, 2], що в ній волантильність базового фінансового активу (ціни акцій) вважають сталою величиною, що є суттєвим спрощенням. Через те запропоновані моделі, де волантильність змінюється в часі. Зокрема, побудовано [2–4] рівняння динаміки ціни опціону, яке отримало назву моделі Мертона–Гармана. Тут волантильність задають стохастичним рівнянням, що об'єднує низку часткових випадків, в тому числі модель Гестона [5]. У працях [2, 3], використовуючи подібність до задач квантової механіки, для аналізу динаміки ціни опціонів у моделі Мертона–Гармана застосували метод континуального інтегрування. В праці [6] отримали континуальне подання ядра оператора еволюції рівняння Мертона–Гармана і узагальнили формулу Блека–Шоулза для ціни європейського опціону колл. Зазначимо, що континуальні квадратури суттєво ускладнюють практичне застосування формул, наведених раніше [2, 3, 6].

У часткових випадках для рівняння Мертона–Гармана можна використати ефективніші способи розв'язання і отримати розв'язки в звичайних квадратурах. Зокрема, розглянемо це рівняння для випадку, що відповідає відомій моделі Гестона для динаміки волантильності [5]. Як продемонстровано раніше [7], тут досить ефективне перетворення Лапласа. Такий підхід використано [7] до розв'язування рівняння Фоккера–Планка для умовної густини ймовірності в моделі Гестона, яка є предметом вивчення багатьох праць, пов'язаних з ціноутворенням опціонів [5, 8–11], дослідженням фондових ринків [12, 13]. Для аналізу ціни опціонів у моделі Гестона використовують формулу, отриману раніше [5]. Під час виведення формули ціни її задавали у вигляді, що збігається з формулою Блека–Шоулза і містить невідомі функції. Після підстановки в рівняння динаміки ціни для невідомих функцій визначали рівняння, яким вони задовольняють, і знаходили їх розв'язки.

Нижче подано спосіб виведення формули ціни європейського опціону колл в моделі Гестона, який ґрунтується на застосуванні підходу праці [7] до розв'язування рівняння для ядра оператора еволюції Мертона–Гармана.

Вихідні положення моделі Мертона–Гармана. Як і в моделі Блека–Шоулза [1, 3], розглянемо два фінансових активи – банківський рахунок і акції. Банківський рахунок $\Pi(t) > 0$ є безрисковий і його зміну визначає рівняння

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt, \tag{1}$$

де $r \ldots 0$ – процентна ставка. Акції є рисковим активом і динаміку їх ціни $S(t) \ldots 0$ задає стохастичне рівняння

$$dS(t) = \phi S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)R_1(t)dt, \tag{2}$$

де $\phi \geq 0$ – процентна ставки акцій, $\sqrt{V(t)}$ – волантильність їх ціни, зміну якої описує стохастичне рівняння

$$dV(t) = (\lambda + \mu V(t) + \xi V(t)^{\alpha} R_2(t))dt. \tag{3}$$

Величини $R_1(t)$ і $R_2(t)$ у рівняннях (2) і (3) позначають корельовані ґауссові шуми, моменти яких

$$\begin{gathered} \langle R_1(t)\rangle = \langle R_2(t')\rangle = 0, \\ \langle R_1(t)R_1(t')\rangle = \langle R_2(t)R_2(t')\rangle = \delta(t-t'),\ \langle R_1(t)R_2(t')\rangle = \rho\delta(t-t'). \end{gathered} \tag{4}$$

Тут дужки $\langle \mathbf{K} \rangle$ позначають усереднення за ґауссовими розподілами випадкових величин $R_1(t)$, $R_2(t)$; $\delta(t-t')$ – дельта-функція Дірака; параметр кореляції $-1 \leq \rho \leq 1$. Величина α змінюється в межах $0 \leq \alpha \leq 1$, на параметри λ, μ, ξ слід накласти додаткові обмеження для виконання умови $V(t) > 0$.

Використовуючи принцип безрискового портфеля Блека і Шоулза [1], отримали [2, 3] рівняння для динаміки ціни опціону C:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + (\lambda + \mu V)\frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\xi V^{1/2+\alpha} S\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2} = rC. \tag{5}$$

Ціну європейського опціону колл у момент часу t визначимо, розв'язуючи задачу Коші для рівняння (5) з початковою умовою (або платіжною функцією) у момент часу $T > t$:

$$C(T,S) = (S-K)^{+} = \begin{cases} S-K, & S > K; \\ 0, & S \leq K, \end{cases} \tag{6}$$

де K – договірна ціна акцій (страйк ціна); S – ринкова ціна акцій у момент T. Згідно зі змістом платіжної функції (6) опціон відбувається лише тоді, якщо ринкова ціна акцій S перевищує договірну K. У працях [2, 3, 6] знайдено розв'язок задачі Коші (5, 6) для довільних значень α і отримана формула для ціни європейського опціону колл, яка є узагальненням формули Блека–Шоулза для стохастичної волантильності. Проте, як вже вказувалось, отримані розв'язки виражено через континуальні інтеграли, що ускладнює їх практичне застосування.

Розглянемо випадок $\alpha = 1/2$, який відповідає стохастичному процесу для волантильності моделі Гестона [5]. Підставляючи значення $\alpha = 1/2$ у рівняння (5) і виконуючи також заміну змінної $S = e^x$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}V)\frac{\partial C}{\partial x} + (\lambda + \mu V)\frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \rho\xi V\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial x} + \frac{1}{2}\xi^2 V\frac{\partial^2 C}{\partial V^2} = rC, \tag{7}$$

яке запишемо також у вигляді

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = H_{MG}C(t), \tag{8}$$

де оператор H_{MG} позначає гамільтоніан Мертона–Гармана [2, 3, 6]

$$H_{MG} = -\frac{1}{2}V\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\frac{1}{2}V - r)\frac{\partial}{\partial x} + r - \frac{1}{2}\xi^2 V\frac{\partial^2}{\partial V^2} - \rho\xi V\frac{\partial^2}{\partial V \partial x} - (\lambda + \mu V)\frac{\partial}{\partial V}. \tag{9}$$

Рівняння для ядра оператора еволюції. Розв'язок рівняння (7) запишемо у вигляді

$$C(t) = e^{-\tau H_{MG}}C(T), \tag{10}$$

де $\tau = T - t$; $C(T)$ – ціна опціону в момент часу T (6). Оператору еволюції $e^{-\tau H_{MG}}$ у (10) поставимо у відповідність ядро $g(\tau, x - x_0, V, V_0)$ згідно з рівністю

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(\tau, x - x_0, V, V_0) C(T, x_0, V_0) dx_0 dV_0. \tag{11}$$

Ядро $g(\tau, x - x_0, V, V_0)$ запишемо також у вигляді

$$g(\tau, x - x_0, V, V_0) = e^{-\tau H_{MG}} \delta(x - x_0)\delta(V - V_0). \tag{12}$$

Оскільки платіжна функція (6) не залежить від змінної V_0, то введемо ядро $g(\tau, x - x_0, V)$ згідно з рівністю

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(\tau, x - x_0, V) C(T, x_0) dx_0, \tag{13}$$

де

$$g(\tau, x - x_0, V) = \int_{0}^{\infty} e^{-\tau H_{MG}} \delta(x - x_0)\delta(V - V_0) dV_0. \tag{14}$$

Так як коефіцієнти гамільтоніану H_{MG} (9) не залежать від змінної x, зручно перейти до Фур'є-зображень:

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t, k) e^{ikx} dk. \tag{15}$$

У результаті для Фур'є-зображення ядра $g(\tau, x - x_0, V)$ (14) отримаємо:

$$\tilde{g}(\tau, k, V) = \int_{0}^{\infty} e^{-\tau \tilde{H}_{MG}(k)} \delta(V - V_0) dV_0, \tag{16}$$

де Фур'є-зображення гамільтоніану H_{MG} (9)

$$\tilde{H}_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \Gamma V)\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2} V(k^2 + ik) + r(1 - ik). \tag{17}$$

У формулі (17) введено позначення $\Gamma = \mu + ik\xi\rho$. Далі застосуємо перетворення Лапласа [15] для ядра $\tilde{g}(\tau, k, V)$ (16):

$$\bar{g}(\tau, k, p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pV} \tilde{g}(\tau, k, V) dV. \tag{18}$$

Безпосереднім обчисленням отримаємо для зображення Лапласа ядра $\bar{g}(\tau, k, p)$ (18) диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \bar{g}(\tau, k, p)}{\partial \tau} + \bar{H}_{MG}(k, p)\bar{g}(\tau, k, p) = (\xi^2 / 2 - \lambda)\tilde{g}(\tau, k, 0) \tag{19}$$

з початковою умовою $\bar{g}(0, k, p) = \dfrac{1}{p}$. У формулі (19) введено також позначення:

$$\bar{H}_{MG}(k, p) = (b_2 + \Gamma p + \frac{1}{2}\xi^2 p^2)\frac{\partial}{\partial p} + (\xi^2 - \lambda)p + \Gamma - b_1, \tag{20}$$

де $b_1 = r(ik - 1)$, $b_2 = -\dfrac{1}{2}(k^2 + ik)$. Таким чином, досягнуто певного спрощення задачі, оскільки зображення Лапласа $\bar{g}(\tau, k, p)$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку. Проте рівняння (19) є неоднорідним і містить невідому функцію $\tilde{g}(\tau, k, 0)$. Зауважимо, що в рівнянні Фоккера–Планка [7] для густини умовної ймовірності, де застосовували такий підхід, аналогічний член відсутній, оскільки густина ймовірності для $V = 0$ рівна нулю.

Розв'язок рівняння для ядра $\bar{g}(\tau, k, p)$. Розглянемо спочатку диференціальне рівняння для $\tilde{g}(\tau, k, V)$ (16)

$$\frac{\partial \tilde{g}(\tau, k, V)}{\partial \tau} + \tilde{H}_{MG}(k)\tilde{g}(\tau, k, V) = 0 \tag{21}$$

з початковою умовою $\breve{g}(0,k,V)=1$. Для визначення $\breve{g}(\tau,k,0)$ достатньо розв'язати рівняння (21) для значень $V\approx 0$. З цією метою шукатимемо його розв'язок у вигляді

$$\breve{g}(\tau,k,V)\approx e^{g_0(\tau)+g_1(\tau)V}. \qquad (22)$$

Вибір розв'язку у такій формі забезпечує збіг з ядром моделі Блека–Шоулза (див. [3, 6]). Після підставляння (22) у рівняння (21) отримаємо систему рівнянь для величин $g_0(\tau), g_1(\tau)$:

$$\frac{dg_0(\tau)}{d\tau}-\lambda g_1(\tau)-b_1=0, \qquad (23)$$

$$\frac{dg_1(\tau)}{d\tau}-ag_1(\tau)-\frac{1}{2}\xi^2 g_1(\tau)^2-b_2=0.$$

Рівняння для $g_1(\tau)$ в (23) є рівняння Ріккаті [15] зі сталими коефіцієнтами і має аналітичний розв'язок. Підставляючи розв'язок $g_1(\tau)$ у перше рівняння (23), для початкових умов $g_0(0)=g_1(0)=0$ отримаємо:

$$\breve{g}(\tau,k,0)=\exp(\tau b_1+\int_0^\tau g_1(t)dt), \qquad (24)$$

$$g_1(t)=-\frac{(k^2+ik)\sinh(\frac{\Omega t}{2})}{\Omega\cosh(\frac{\Omega t}{2})-\Gamma\sinh(\frac{\Omega t}{2})}, \Omega=\sqrt{\Gamma^2+(k^2+ik)\xi^2}.$$

У результаті права частина в рівнянні (19) є визначеною і маємо замкнуте рівняння для $\bar{g}(\tau,k,p)$.

Для розв'язку рівняння (19) використаємо метод характеристик [16, 17]. Спочатку виконаємо також заміну:

$$\bar{g}(\tau,k,p)=e^{-(\Gamma-b_1)\tau}\mathrm{g}(\tau,k,p).$$

Для $\mathrm{g}(\tau,k,p)$ отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \mathrm{g}(\tau,k,p)}{\partial\tau}+\mathrm{H}_{MG}(k,p)\mathrm{g}(\tau,k,p)=f(\tau), \qquad (25)$$

де

$$\mathrm{H}_{MG}(k,p)=(b_2+\Gamma p+\frac{1}{2}\xi^2p^2)\frac{\partial}{\partial p}+(\xi^2-\lambda)p, \qquad (26)$$

$$f(\tau)=(\frac{1}{2}\xi^2-\lambda)\exp(\Gamma\tau+\int_0^\tau g_1(t)dt).$$

У результаті розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння (25) з початковою умовою $\mathrm{g}(0,k,p)=\frac{1}{p}$ запишемо у вигляді

$$\mathrm{g}(\tau,k,p)=\exp(-(\xi^2-\lambda)\int_0^\tau\varphi[t+\varphi^{-1}(p)-\tau]dt)\frac{1}{\varphi[\varphi^{-1}(p)-\tau]}+\Psi(\tau), \qquad (27)$$

$$\Psi(\tau)=\int_0^\tau f(t)\exp((\xi^2-\lambda)\int_0^t\varphi[t_1+\varphi^{-1}(p)-\tau]dt_1)dt.$$

Тут $\varphi(x)$ і $\varphi^{-1}(x)$ – взаємно обернені функції, які задаються виразами

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\xi^2}(\Gamma+\Omega\tanh(\frac{x\Omega}{2})), \varphi^{-1}(x)=-\frac{2}{\Omega}\operatorname{arctanh}(\frac{\Gamma+x\xi^2}{\Omega}). \qquad (28)$$

Після алгебричних перетворень знаходимо:

$$\varphi(t+\varphi^{-1}(p))=\frac{p\Omega\cosh(\frac{\Omega t}{2})-(k^2+ik-p\Gamma)\sinh(\frac{\Omega t}{2})}{\Omega\cosh(\frac{\Omega t}{2})-(\Gamma+p\xi^2)\sinh(\frac{\Omega t}{2})}.$$

Інтеграли в (27) обчислюємо в замкненому вигляді і після низки перетворень, які опускаємо, отримаємо:

$$\bar{g}(\tau,k,p)=e^{(b_1-\frac{\lambda\Gamma}{\xi^2})\tau}\,\Omega^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}\frac{[\Omega\cosh(\frac{\Omega\tau}{2})-\Gamma\sinh(\frac{\Omega\tau}{2})]^{1-\frac{2\lambda}{\xi^2}}}{p\Omega\cosh(\frac{\Omega\tau}{2})+(k^2+ik-p\Gamma)\sinh(\frac{\Omega\tau}{2})}. \tag{29}$$

На основі знайденого зображення Лапласа $\bar{g}(\tau,k,p)$ дістанемо вираз для ядра оригіналу $\tilde{g}(\tau,k,V)$ (16):

$$\tilde{g}(\tau,k,V)=A(k)e^{-B(k)V}, \tag{30}$$

$$A(k)=\frac{e^{(b_1-\frac{\lambda\Gamma}{\xi^2})\tau}\,\Omega^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}}{[\Omega\cosh(\frac{\Omega\tau}{2})-\Gamma\sinh(\frac{\Omega\tau}{2})]^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}},\ B(k)=\frac{(k^2+ik)\sinh(\frac{\Omega\tau}{2})}{\Omega\cosh(\frac{\Omega\tau}{2})-\Gamma\sinh(\frac{\Omega\tau}{2})}.$$

Порівнюючи вирази (22) і (30), можна переконатись, що вони рівні. Звідси випливає, що формула (22) визначає точний розв'язок для $\tilde{g}(\tau,k,V)$. Це дає можливість записати, Фур'є-зображення ядра $\tilde{g}(\tau,k,V)$ у вигляді

$$\tilde{g}(\tau,k,V)=e^{\tau b_1+\int_0^\tau g_1(t)dt+g_1(\tau)V}, \tag{31}$$

де величина $g_1(t)$ визначена у формулі (24).

Формула ціни європейського опціону типу колл. Неважко переконатись, що знайдений розв'язок (30) в границі сталої волантильності збігається з розв'язком в моделі Блека–Шоулза. Зокрема, рівняння волантильності для $\xi=0$ має вигляд

$$dV(t)=(\lambda+\mu V(t))dt. \tag{32}$$

Очевидно, рівняння (32) має сталий розв'язок

$$V=-\frac{\lambda}{\mu}.$$

За змістом V … 0, тому покладемо μ „ 0, λ … 0. Обчислюючи границю $\xi\to 0$ у виразах (30), після підстановки $\lambda=-\mu\sigma^2$ отримаємо ядро моделі Блека–Шоулза [6]. Зауважимо також, що умови, накладені на параметри μ, λ, забезпечують $V(t)$ … 0.

На основі знайденого Фур'є–зображення ядра $\tilde{g}(\tau,k,V)$ отримаємо:

$$g(\tau,x-x_0,V)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\tau,k,V)e^{ik(x-x_0)}dk. \tag{33}$$

Ціну європейського опціону колл знайдемо, якщо підставимо (33) у формулу

$$C(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau,x-x_0,V)(e^{x_0}-K)^+dx_0. \tag{34}$$

Отже, застосовуючи формулу (34), необхідно спочатку визначити ядро $g(\tau,x-x_0,V)$. Однак через складну залежність $\tilde{g}(\tau,k,V)$ від k виконати інтегрування в замкненому вигляді неможливо. Для цього запишемо такий вираз для $C(t)$:

$$C(t)=\int_{\ln(K)}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\tau,k,V)e^{ik(x-x_0)}dk(e^{x_0}-K)dx_0. \tag{35}$$

Щоб змінити порядок інтегрування в формулі (35), зсунемо змінну $k\to k+(1+\varepsilon)i$ в першому доданку і $k\to k+\varepsilon i$ – у другому ($\varepsilon>0$). Таке перетворення обґрунтоване, якщо функція $\tilde{g}(\tau,k,V)$ не має особливостей у смузі $\Im(k) \in [-(1+\varepsilon), 0]$ комплексної площини k. Інтегруючи за x_0, отримаємо:

$$C(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S\mathcal{G}(\tau, k - i(1+\varepsilon), V) - K\mathcal{G}(\tau, k - i\varepsilon, V)}{ik + \varepsilon} e^{(ik+\varepsilon)\ln(S/K)} dk. \qquad (36)$$

Для виконання границі $\varepsilon \to 0$ використаємо формулу Сохоцького [18]:

$$\frac{1}{k - i\varepsilon} = \mathrm{P}\,\frac{1}{k} + i\pi\delta(k),$$

де символ P вказує, що інтеграл за k визначається в сенсі головного значення, а $\delta(k)$ – дельта-функція Дірака. В результаті отримаємо:

$$C(t) = \frac{1}{2}(S - e^{-r\tau}K) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S\mathcal{G}(\tau, k - i, V) - K\mathcal{G}(\tau, k, V)}{ik} e^{ik\ln(S/K)} dk. \qquad (37)$$

У формулі (37) враховано також, що $\mathcal{G}(\tau, 0, V) = e^{-r\tau}$, $\mathcal{G}(\tau, -i, V) = 1$. Запишемо її також у вигляді, що відповідає відомій формулі Гестона [5, 8]:

$$C(t) = SP_1 - e^{-r\tau}KP_2, \qquad (38)$$

де

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\Big[\frac{e^{ik\ln(S/K)}\mathcal{G}(\tau, k - i, V)}{ik}\Big] dk,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{e^{r\tau}}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\Big[\frac{e^{ik\ln(S/K)}\mathcal{G}(\tau, k, V)}{ik}\Big] dk. \qquad (39)$$

Незважаючи на аналітичну відмінність між (39) і відповідними виразами моделі Гестона [5, 9], можна переконатись, що вони призводять до однакових результатів (слід також врахувати відповідність параметрів у рівняннях для ціни акцій і волантильності (2), (3)).

Зазначимо також, що для практичного застосування у виразах (37), (38), (39) доцільно перейти до дійсних величин, використовуючи спосіб праці [12].

Висновки. Запропоновано послідовний вивід формули для ціни європейського опціону типу колл в моделі Гестона, що є відмінним від загальноприйнятого. Метод ґрунтується на розв'язанні рівняння для ядра оператора еволюції в моделі Мертона–Гармана у частковому випадку, що відповідає моделі Гестона. Це рівняння для ядра є еволюційним диференціальним рівнянням другого порядку, записане в змінних $x = \ln(S), V$. Послідовним застосуванням перетворень Фур'є за змінною x і Лапласа – за V вдалося перейти до диференціального рівняння першого порядку. Такий спосіб застосовували раніше [7] до розв'язування рівняння Фоккера–Планка для густини умовної ймовірності в моделі Гестона. Проте в нашому випадку рівняння для зображення ядра є неоднорідним і містить невідому функцію, пропорційну значенню оригіналу для $V = 0$. Для визначення неоднорідної компоненти рівняння знайшли розв'язок вихідного рівняння в околі $V \approx 0$ і отримали замкнуте рівняння для зображення ядра і побудували аналітичний розв'язок. Показано, що в граничному випадку сталої волантильності формула для ціни опціону переходить у формулу Блека–Шоулза. Порівняння формули ціни опціону із відомою формулою Гестона демонструє, що вони дають однакові результати. Проте, слід зазначити, що отримана формула для ціни опціону записана в компактнішому вигляді і тому зручніша для практичних застосувань.

1. *Black F. and Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // J. of Political Economy. – 1973. – 81, № 3. – P. 637–654.
2. *Baaquie B. E.* A Path Integral Approach to Option Pricing with Stochastic Volatility: Some Exact Results // J. de Physique I. – 1997. – 7, № 12. – P. 1733–1746.
3. *Baaquie B. E.* Quantum finance. Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 280 p.

4. *Hull J. C.* Options, Futures and Other Derivatives. – Toronto: Prentice-Hall, 2003. – 836 p.
5. *Heston S. L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies. – 1993. – 6. – P. 327–343.
6. *Blazhyevskyi L. F., Yanishevsky V. S.* The path integral representation kernel of evolution operator in Merton-Garman model // Cond. Matter Phys. – 2011. – 14, № 2. – P. 23001: 1–16.
7. *Dragulescu A., Yakovenko V. M.*, Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility // Quant. Finance. – 2002. – 2. – P. 443–453.
8. *Janek A., Kluge T., Weron R. and Wystup U.* FX Smile in the Heston Model, SFB 649 Discussion Paper 2010-047, (arXiv:1010.1617v1 [q-fin.CP]).
9. *Kahl C. and Jëackel P.* Not-so-complex logarithms in the Heston Model. – Wilmott, 2005. – P. 94–103.
10. *Lee R.* Option pricing by transform methods: extensions, unification and error control // J. of Computational Finance. – 2004. – 7, № 3. – P. 51–86.
11. *In't Hout P., Bierkens J., van der Ploeg A. P. C. and in't Panhuis J.* A semi closed-form analytic pricing formula for call options in a hybrid Heston–Hull–White model // Proceedings of the 58 European Study Group Mathematics with Industry (Utrecht, The Netherlands, January 29–February 2, 2007). – Utrecht. – 2007. – P. 101–105.
12. *Бухбиндер Г. Л., Чистилин К. М.* Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // Матем. моделирование. – 2005. – 17, № 10. – С. 31–38.
13. *Silva A. C., Yakovenko V. M.* Comparison between the probability distribution of returns in the Heston model and empirical data for stock indexes // Physica A. – 2003. – 324. – P. 303–310.
14. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. 2. – 543 с.
15. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
16. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2005. – 251 с.
17. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
18. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЦЕНЫ ОПЦИОНА В МОДЕЛИ ГЕСТОНА

Приведен последовательный вывод формулы цены европейского опциона колл в модели Гестона, который основан на решении уравнения для ядра эволюции Мертона–Гармана с применением преобразований Фурье и Лапласа. Полученная формула єэквивалентная известной формуле Гестона, однако имеет более компактный вид. Показано, что в случае постоянной волантильности можно получить известную формулу Блека–Шоулза.

ABOUT THE METHOD OF SOLUTION AN OPTION PRICE EQUATION IN THE HESTON MODEL

A consecutive derivation of the European option call price formula in Heston model that is based on the solution of the equation for Merton–Garman evolution core by applying Fourier and Laplace transforms is introduced. Received formula is equivalent to the well known Heston's, however is written in more compact way. It was shown that in limit of constant volatility one can receive the well known Black–Scholes formula.

Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано 26.09.12