

ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КВАДРАТНОЇ ПРИЗМИ, ОСЛАБЛЕНОЇ КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІД ДІЄЮ ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ

Визначено тривимірний напружений стан рівномірно навантаженої на двох протилежних бічних гранях ізотропної квадратної призми, ослабленої круговим отвором. Розглянуто отвір невеликого радіуса, призму замінено товстостінним циліндром. Збурений напружений стан товстостінного циліндра подано в вигляді ряду за власними неортогональними функціями. Коефіцієнти ряду визначено методом найменших квадратів із умови найбільш точного задоволення крайових умов на бічних поверхнях циліндра. Зроблено числовий аналіз розподілу напружень залежно від коефіцієнта Пуассона і радіуса отвору.

Плоский напружений стан однобічно розтягнутої пружної площини, ослабленої круговим отвором, уперше дослідив G. Kirsch [12, див. також 7, 8]. Розподіл напружень у товстій пластині з круговим отвором вивчали у праці [2]. Якісними дослідженнями тривимірних крайових задач [1] встановлено, що між плоскою і просторовою задачами теорії пружності, коли зростає товщина пластини, немає асимптотичної відповідності. Тривимірний напружений стан однобічно розтягнутого пружного шару з круговим отвором досліджували [6, 10] за допомогою побудованих власних функцій, які задовольняють нульові крайові умови на поверхнях шару; розглянуто [15] пружний півпростір з циліндричним вирізом.

Формулювання задачі. Розглянемо тривимірний напружено-деформований стан ізотропної квадратної призми зі стороною a , висотою $2h$, ослабленої круговим циліндричним отвором радіусом R_1 у напрямку осі Oz декартової системи координат. Призма навантажена зусиллями рівномірного розтягу σ_0 в напрямку осі Ox . Вважатимемо, що сторони основи призми паралельні осям Ox , Oy і набагато довші від радіуса отвору, $a \geq 8R_1$, тому її можна моделювати [8] товстостінним циліндром $D = \{(r, \varphi, z) \in ([R_1, R_2] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$, де $R_2 = a$. Вивчали [5, 14] задачі теорії пружності в циліндричній системі координат з використанням однорідних розв'язків (власних функцій). Аналітичні методи знаходження напруженого стану суцільного циліндра розглянуто в працях [3, 11, 13]. Використано [9] метод суперпозиції, а компоненти тензора напружень виражено через гармонічні функції Дуголла.

Загальний напружено-деформований стан (НДС) товстостінного циліндра подамо у вигляді суми основного і збуреного станів. Основний напружений стан у декартовій системі координат має відмінну від нуля тільки одну компоненту $\sigma_x^0 = \sigma_0$ тензора напружень. Відповідно, в циліндричній системі координат відмінні від нуля

$$\sigma_r^0 = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{\sigma_0}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad \tau_{r\varphi}^0 = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi, \quad (1)$$

а всі інші компоненти тензора напружень рівні нулю [8]. Збурений тривимірний НДС [6, 10], який враховує отвір, шукатимемо у циліндричних координатах. Його згідно з заданими напруженням (1) потрібно подати у вигляді суми напружень, залежних від кута 2φ і осесиметричного плоского НДС, який на бокових поверхнях циліндра задовольняє крайові умови

$$\sigma_r^p(R_1, \varphi, z) = -\frac{\sigma_0}{2}, \quad \sigma_r^p(R_2, \varphi, z) = 0, \quad \tau_{rz}^p(R_j, \varphi, z) = 0, \quad j = \overline{1, 2}$$

і має такий розподіл:

$$\sigma_r^p(r, \varphi, z) = -\frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_\varphi^p(r, \varphi, z) = \frac{A}{r^2} + B, \quad (2)$$

де $A = \frac{\sigma_0 R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}$, $B = \frac{\sigma_0 R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}$, а всі інші компоненти тензора напружень рівні нулю.

Залежний від кута 2φ збурений НДС повинен задовольнити крайові умови в напруженнях

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_j, \varphi, z) &= -\delta_j^1 \frac{\sigma_0}{2} \cos(2\varphi), \quad \tau_{rz}(R_j, \varphi, z) = 0, \\ \tau_{r\varphi}(R_j, \varphi, z) &= \delta_j^1 \frac{\sigma_0}{2} \sin(2\varphi), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

на бічних поверхнях;

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, \pm h) = 0 \quad (4)$$

на торцях $z = \pm h$ товстостінного циліндра, де δ_j^1 – символ Кронекера. Відзначимо, що розподіл напружень (2) задовольняє крайові умови (4).

Для побудови розв'язку задачі використаємо загальне подання тензора напружень у циліндричній системі координат [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q}{r \partial \varphi} \right], \quad \sigma_z = 2G \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{r} \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \varphi^2} + z \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2\nu r \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q}{r \partial \varphi} \right], \\ \tau_{rz} &= 2G \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial \varphi} \right], \\ \tau_{z\varphi} &= 2G \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial z \partial \varphi} - \frac{1-2\nu}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi}{r \partial z \partial \varphi} - \frac{\partial^2 Q}{2r \partial z} \right], \\ \tau_{r\varphi} &= 2G \left[z \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q}{r \partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де Φ, Ψ, Q – гармонічні функції переміщень; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона. Для знаходження залежного від кута 2φ НДС подамо функції Φ, Ψ, Q у вигляді ряду за власними функціями, напруження від яких тотожно задовольняють крайові умови (4):

$$\begin{aligned} \Psi &= h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\delta(\mu_k) [a_k I_2(\beta_k r) + b_k K_2(\beta_k r)] \cos(\mu_k \gamma)\} \cos(2\varphi), \\ \Phi &= h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{[a_k I_2(\beta_k r) + b_k K_2(\beta_k r)] \sin(\mu_k \gamma)\} \cos(2\varphi), \\ Q &= h^2 \sum_{k=1}^{\infty} [g_k I_2(\lambda_k r) + s_k K_2(\lambda_k r)] \cos(\eta_k \gamma) \sin(2\varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\gamma = z/h$ – безрозмірна змінна; μ_k – корені трансцендентного рівняння $\sin(2\mu) + 2\mu = 0$, $\operatorname{Re} \mu_k > 0$, $\beta_k = \mu_k/h$; a_k, d_k – комплексні, а g_k, s_k – дійсні коефіцієнти; $\delta(\mu) = -[2(1-\nu)/\mu + tg(\mu)]$; $I_j(\beta_k r)$ – модифіковані

функції Бесселя; $K_j(\beta_k r)$ – модифіковані функції Макдональда, які спадають зі збільшенням r ; $\eta_k = \pi k$, $\lambda_k = \eta_k / h$.

Знайдено [6], що крім розв'язків (6), крайові умови (4) також задовольняють власні поліноміальні розв'язки, які відповідають нульовому власному значенню $\mu = 0$ і мають вигляд

$$\Psi_{1,2} = (d_1 r^2 + d_3 r^{-2}) \cos 2\varphi, \quad \Phi_{2,2} = z(d_2 r^2 + d_4 r^{-2}) \cos 2\varphi, \quad (7)$$

$$\Psi_{2,2} = (1 - \nu)(\varphi_2 + \psi_2) \cos 2\varphi, \quad Q_{2,2} = 2(\psi_2 - \varphi_2) \sin 2\varphi,$$

де

$$\varphi_2 = d_2(z^2 r^2 - \chi_1 r^4), \quad \psi_2 = d_4(z^2 r^{-2} - \chi_2), \quad \chi_1 = \frac{1}{6}, \quad \chi_2 = -\frac{1}{2}, \quad j = \overline{1,2}; \quad d_j, \\ j = \overline{1,4} - \text{дійсні коефіцієнти.}$$

Запис крайових умов. Обмежимося у поданні (6) першими N членами щодо індексу k , додамо до них чотири розв'язки (7) і позначимо такі набори функції переміщень Φ_N , Ψ_N , Q_N . Напруження (5), вираженні через ці функції, точно задовольняють всі співвідношення тривимірної теорії пружності та крайові умови (4). Підставимо знайдені напруження у крайові умови (3), після виділення дійсних частин та прирівнювання коефіцієнтів біля $\cos(2\varphi)$, $\sin(2\varphi)$ одержимо:

$$\sum_{k=1}^I c_k A_k^m(\gamma) = P_m, \quad m = \overline{1,6}, \quad \gamma \in [-1, 1], \quad (8)$$

де $I = 2M$, $M = 3N + 2$; $P_1 = -\sigma_0 / G$, $P_3 = \sigma_0 / G$; $P_2 = P_4 = P_5 = P_6 = 0$;

$$c_k = \operatorname{Re} a_k, \quad c_{k+N} = \operatorname{Im} a_k, \quad c_{k+2N} = g_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad c_{3N+1} = d_1,$$

$$c_{3N+2} = d_2; \quad c_{k+M} = \operatorname{Re} b_k, \quad c_{k+M+N} = \operatorname{Im} b_k, \quad c_{k+M+2N} = s_k, \quad k = \overline{1, N};$$

$$c_{2M-1} = d_3, \quad c_{2M} = d_4;$$

$$A_k^m(\gamma) = A_{k,2}^m(R_1, \gamma), \quad A_{k+M}^m(\gamma) = A_{k,1}^m(R_1, \gamma),$$

$$A_k^{m+3}(\gamma) = A_{k,2}^m(R_2, \gamma), \quad A_{k+M}^{m+3}(\gamma) = A_{k,1}^m(R_2, \gamma), \quad m = \overline{1,3}, \quad k = \overline{1, M};$$

$$A_{k,j}^m(R, \gamma) = \operatorname{Re} V_{k,j}^m(R, \gamma), \quad A_{k+N,j}^m(R, \gamma) = \operatorname{Im} V_{k,j}^m(R, \gamma),$$

$$A_{k+2N,j}^m(R, \gamma) = Y_{k,j}^m(R, \gamma), \quad A_{3N+k,j}^m = E_{k,j}^m(R, \gamma), \quad m = \overline{1,3},$$

$$k = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1,2};$$

$$V_{k,j}^{2m-1}(R, \gamma) = N_{1,j}^{2m-1}(R, \mu_k) \gamma \sin(\mu_k \gamma) + N_{2,j}^{2m-1}(R, \mu_k) \cos(\mu_k \gamma), \quad m = \overline{1,2};$$

$$V_{k,j}^2(R, \gamma) = N_{1,j}^2(R, \mu_k) \gamma \cos(\mu_k \gamma) + N_{2,j}^2(R, \mu_k) \sin(\mu_k \gamma);$$

$$Y_{k,j}^{2m-1}(R, \gamma) = B_j^{2m-1}(R, k\pi) \cos(k\pi\gamma), \quad Y_{k,j}^2(R, \gamma) = B_j^2(R, k\pi) \sin(k\pi\gamma), \quad m, j = \overline{1,2};$$

$$E_{1,2}^1 = 2; \quad E_{2,2}^1 = -4h^2\nu\gamma^2; \quad E_{k,2}^2 = 0, \quad k = \overline{1,2};$$

$$E_{1,2}^3 = -4, \quad E_{2,2}^3 = 4\nu h^2 \gamma^2 - 2(\nu + 1)R^2; \quad E_{1,1}^1 = 12R^{-4};$$

$$E_{2,1}^1 = -2[6\nu h^2 R^{-4} \gamma^2 + 2(1 + \nu)R^{-2}]; \quad E_{k,1}^2 = 0, \quad k = \overline{1,2};$$

$$E_{1,1}^3 = 12R^{-4}; \quad E_{2,1}^3 = -12\nu h^2 \gamma^2 R^{-4} - 2(1 + \nu)R^{-2}.$$

Функції $N_{n,j}^m(R, x)$, $m = \overline{1, 3}$, $n, j = \overline{1, 2}$ визначають за формулами

$$\begin{aligned} N_{1,2}^1(R, x) &= 2x^2 U_2(ax), & N_{2,2}^1(R, x) &= 2x^2 \delta(x) U_2(ax) - 4vx I_2(ax), \\ N_{1,2}^2(R, x) &= 2x^2 U_1(ax), & N_{2,2}^2(R, x) &= -2x[(1-2\nu) + x\delta(x)] U_1(ax), \\ N_{1,2}^3(R, x) &= -4U_3(ax), & N_{2,2}^3(R, x) &= -4\delta(x) U_3(ax), \\ N_{1,1}^1(R, x) &= 2x^2 T_2(ax), & N_{2,1}^1(R, x) &= 2x^2 \delta(x) T_2(ax) - 4vx K_2(ax), \\ N_{1,1}^2(R, x) &= 2x^2 T_1(ax), & N_{2,1}^2(R, x) &= -2x[(1-2\nu) + x\delta(x)] T_1(ax), \\ N_{1,2}^3(R, x) &= -4T_3(ax), & N_{2,2}^3(R, x) &= -4\delta(x) T_3(ax), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a &= \frac{R}{h}, & U_1(x) &= I_1(x) - \frac{2}{x} I_2(x), & T_1(x) &= -K_1(x) - \frac{2}{x} K_2(x), \\ U_2(x) &= \left[\frac{6}{x^2} + 1\right] I_2(x) - \frac{1}{x} I_1(x), & T_2(x) &= \left[\frac{6}{x^2} + 1\right] K_2(x) + \frac{1}{x} K_1(x), \\ U_3(x) &= \frac{1}{x} I_1(x) - \frac{3}{x^2} I_2(x), & T_3(x) &= -\frac{1}{x} K_1(x) - \frac{3}{x^2} K_2(x), \end{aligned}$$

а функції $B_j^m(R, x)$, $m = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 2}$ – за формулами

$$\begin{aligned} B_2^1(R, x) &= 4x^2 U_3(ax), & B_2^2(R, x) &= -xa^{-1} I_2(ax), \\ B_1^1(R, x) &= 4x^2 T_3(ax), & B_1^2(R, x) &= -xa^{-1} K_2(ax), \\ B_2^3(R, x) &= -2x^2 U_4(ax), & B_1^3(R, x) &= -2x^2 T_4(ax), \end{aligned}$$

де

$$U_4(x) = U_2(x) - \frac{1}{x} U_1(x) + \frac{4}{x^2} I_2(x), \quad T_4(x) = T_2(x) - \frac{1}{x} T_1(x) + \frac{4}{x^2} K_2(x).$$

Задоволення крайових умов. Отже, розрахунок тривимірного НДС товстостінного циліндра зведено до розв'язування системи рівнянь (8) з відомими коефіцієнтами. Для задоволення крайових умов і знаходження невідомих c_k використаємо вдосконалений метод найменших квадратів [5, 6]. Згідно з ним, відхилення наближеного розв'язку від точного визначатиме числове значення функціонала

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_l\} \equiv \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^6 \left\{ \sum_{k=1}^l c_k A_k^m(\gamma) - P_m \right\}^2 \right\} d\gamma. \quad (9)$$

За означенням функціонал (9) дорівнює узагальненій квадратичній формі

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_l\} \equiv \sum_{k,j=1}^l c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^l c_k V_k + P^2, \quad (10)$$

де

$$W_{kj} = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^6 A_k^m(\gamma) A_j^m(\gamma) d\gamma, \quad V_k = \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 A_k^m(\gamma) P_m d\gamma, \quad (11)$$

$W_{kj} = W_{jk}$, $k, j = \overline{1, l}$, $P^2 = 2(P_1^2 + P_3^2)$. Інтеграли (11) знаходять аналогічно, як у працях [4–6]. Коефіцієнти W_{kj} обчислені в явному аналітичному вигляді і виражені через тригонометричні, бesselеві та макдональдіві функції. Мінімум узагальненої квадратичної форми для заданого N позначимо

$F(N)$, а коефіцієнти, на яких досягається мінімум, — через c_k^N . Коефіцієнти c_k^N визначають зі системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^l c_k^N W_k^j = V_j, \quad j = \overline{1, l}. \quad (12)$$

Розв'яжемо її і за формулами (6), (7) визначимо найкращий наблизений розв'язок, який позначимо $\Phi_N, \Psi_N, \mathcal{O}_N$.

Лема. Функція $F(N)$ є невід'ємна та не зростає.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $F(N) < \varepsilon^2 / 4$, то межі послідовностей $\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N, \Psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N, \mathcal{O} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}_N$ визначатимуть точний розв'язок задачі.

Доведення леми і теореми аналогічне, як у праці [6].

Числовий аналіз. Оскільки коефіцієнти W_k^j системи рівнянь (12) і мінімум узагальненої квадратичної форми $F(N)$ знаходять з високою точністю, то це дає змогу чисельно перевірити виконання умов теореми. Розрахунки показали, що мінімум квадратичної форми (10) прямує до нуля, якщо $N \rightarrow \infty$. Наведемо знайдені числові значення $F(N)$: $F(100) = 2,8 \cdot 10^{-7}$, $F(200) = 1,9 \cdot 10^{-8}$.

Введемо безрозмірну координату $\alpha = r / R_1$. Значення всіх напружень діленням на σ_0 зведемо до безрозмірного вигляду. На рис. 1 наведено симетричний відносно змінної γ розподіл напружень на поверхні кругового отвору $\alpha = 1$ для різних значень кута φ . Для аналізу впливу на НДС пластини коефіцієнта Пуассона розглянуто розподіл напружень відповідно при $\nu = 0,2$ і $0,3$. Якісна картина розподілу напружень тут подібна. Як видно із графіків, напруження $\sigma_\varphi(1, \pi/2, \gamma), \sigma_\varphi(1, 0, \gamma)$ добре узгоджуються з напруженнями для шару з отвором [6, 10] та напруженнями плоскої задачі, де їх усереднені значення відповідно рівні 3 і 1. Проте в околі отвору виникають значні нормальні σ_z та дотичні $\tau_{z\varphi}$ напруження, які відсутні у плоскій задачі. Максимальне значення напружень σ_z може досягати 100% від σ_0 .

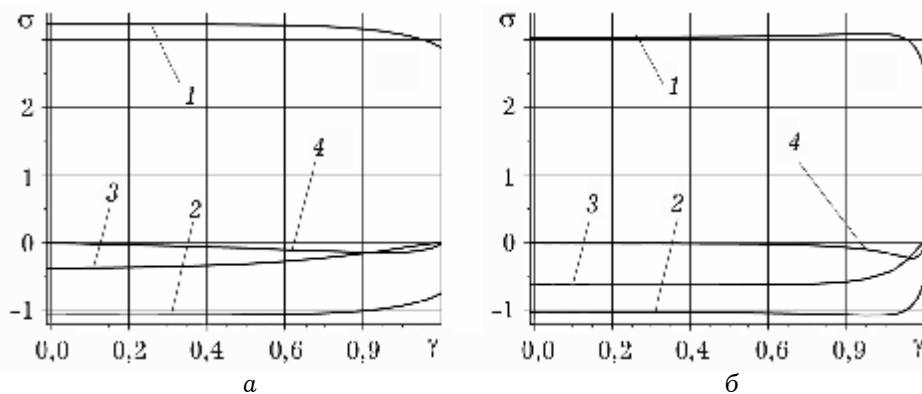


Рис. 1. Розподіл безрозмірних напружень на поверхні кругового отвору:

$a - R/h = 0,5, \nu = 0,2; b - R/h = 0,1, \nu = 0,3;$

$1 - \sigma_\varphi(1, \pi/2, \gamma); 2 - \sigma_\varphi(1, 0, \gamma); 3 - \sigma_z(1, 0, \gamma); 4 - \tau_{z\varphi}(1, \pi/4, \gamma).$

На рис. 2 подано розподіл напружень відносно координати α з віддаленням від поверхні кругового вирізу. Вже на відстані $3R_1$ від контуру отвору всі напруження в пластині практично наближаються до напружень основного стану.

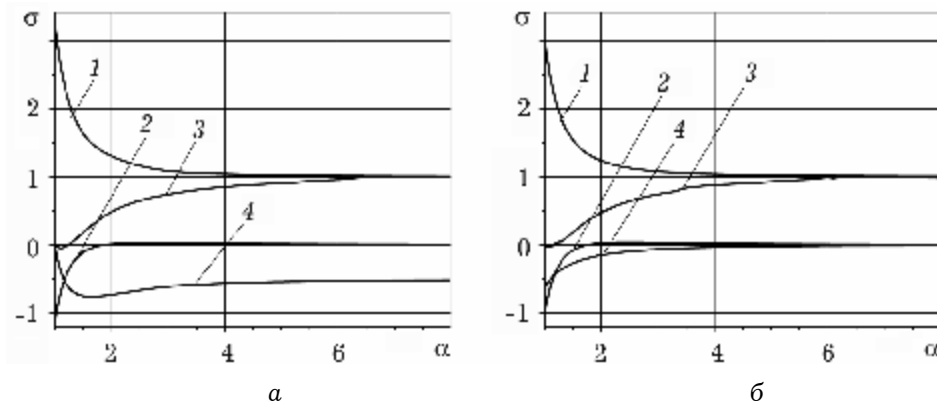


Рис. 2. Розподіл напружень з віддаленням від отвору:

$a - R/h = 0,5, \nu = 0,2, 4 - \tau_{r\phi}(\alpha, \pi/4, 0)$; $b - R/h = 0,1, \nu = 0,3$,
 $1 - \sigma_{\phi}(\alpha, \pi/2, 0)$; $2 - \sigma_{\phi}(\alpha, 0, 0)$; $3 - \sigma_r(\alpha, 0, 0)$; $4 - \sigma_z(\alpha, 0, 0)$.

ВИСНОВКИ

Тривимірний розподіл напружень у квадратній призмі з малим круговим отвором відрізняється від напружень у пружному шарі з круговим отвором [6] з похибкою менше ніж 10%. Знайдені напруження σ_{ϕ} для довільних відношень R/h добре узгоджуються з відповідними для плоскої задачі. Проте за відношення $R/h < 2$ в околі отвору виникають значні напруження $\sigma_z, \tau_{z\phi}$, максимальне значення яких може досягати до 100% від σ_0 і задачу Кірша потрібно розглядати як просторову.

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории // Прикл. математика и механика – 1964. – № 3. – С. 589–596.
2. Космодаманский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
3. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесимметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 120–137.
4. Ревенко В. П. Спектральний метод розв'язання задачі Кірша у тривимірній постановці // Доп. НАН України. – 2006. – № 1. – С. 59–66.
5. Ревенко В. П. О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 7. – С. 52–65. (Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 7. – P. 730–741.)
6. Ревенко В. П. Дослідження тривимірного напруженого стану в пружній пластині з круговим отвором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009 – 45, № 5. – С. 71–76.
7. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Токовий Ю. В. Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного

- скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – 55, № 1. – С. 49–60.
10. Улітко А. Ф. Вибрані праці. – К.: Вид. центр «Київський університет», 2004. – 457 с.
 11. Chau K. T., Wei X. X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I: Analytic solution // *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – 37. – P. 5707–5732.
 12. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // *Z. Verein Deutscher Ingenieure.* – 1898 – 42. – P. 797–802.
 13. Okumura I., Onaka T. An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates // *Struct. Eng. / Earthquake Eng.* – 1986 – 3, № 2. – P. 185–194.
 14. Robert M., Keer L. M. Stiffness of an elastic circular cylinder of finite length // *J. Appl. Mech.* – 1988. – 55, № 3. – P. 560–565.
 15. Youngdahl C. K., Strenberg E. Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // *J. Appl. Mech.* – 1966. – 33, № 4. – P. 855–865.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЁХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КВАДРАТНОЙ ПРИЗМЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Исследовано трёхмерное напряженное состояние изотропной квадратной призмы, ослабленной круговым отверстием, и равномерно нагруженной на двух противоположных гранях. Рассмотрено отверстие небольшого радиуса, и призму заменено толстостенным цилиндром. Возмущенное напряженное состояние толстостенного цилиндра представлено в виде ряда по собственным неортогональным функциям. Коэффициенты ряда определены методом наименьших квадратов из требования наиболее точного удовлетворения граничных условий на поверхности цилиндра. Дан численный анализ распределения напряжений в зависимости от коэффициента Пуассона и радиуса отверстия.

INVESTIGATION OF THE 3D STRESS STATE OF THE SQUARE PRISM WITH A CIRCULAR HOLE, UNDER ACTION OF THE UNIAXIAL LOADING

The problem of determination of the stressed state of an elastic square prism, weakened by a circular hole is solved in three-dimensional statement. The hole of small radius is considered, and a prism is substituted by the thick-walled cylinder. The perturbed stressed state is obtained in the form of a series by the eigen function. The series coefficients are determined by the least squares method from the requirement of the most exact satisfaction of boundary conditions on a surface of the cylinder. The numerical analysis is carried out for the stress distribution in dependence on Poisson ratio and a hole radius.