

ПРУЖНІ ХВИЛЬОВІ ПОЛЯ У ТРИВИМІРНІЙ МАТРИЦІ ІЗ ОБ'ЄМНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Числовим методом граничних елементів досліджено поширення пружних гармонічних хвиль у безмежній тривимірній матриці зі сферичним включенням та у формі скінченного циліндричного волокна. На поверхні з'єднання матриці та включення виконуються умови ідеального механічного контакту. На основі розв'язків граничних інтегральних рівнянь відносно контактних параметрів проаналізовано розподіли напружень всередині складників розглянутої механічної системи. Виявлено зони локалізації екстремальних напружень залежно від хвильового числа.

Вступ. Числово методом граничних елементів (МГЕ) розв'язано тривимірну задачу розсіяння пружних гармонічних хвиль поодиноким включенням з метою виявлення ефектів проходження хвиль та концентрації динамічних напружень біля матричних наповнювачів різної геометрії. Відомі розв'язки аналогічної задачі про контактні параметри [1, 2]. Раніше досліджували також поля внутрішніх динамічних напружень за умов низькочастотних навантажень матриці зі сферичним включенням [3, 4], розсіяних сферичним включенням дальніх хвильових полів [5], та статичних напружень для включення некласичної форми [6]. Нижче МГЕ застосовано до тривимірних задач розсіяння пружних гармонічних хвиль на включенні з довільною гладкою поверхнею, яке розташоване у безмежній матриці. Задачу зведено до побудови інтегральних зображень розв'язків, що пов'язують параметри поля всередині тіла з їх значеннями на межі, та отримання на основі сконструйованих подань граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих параметрів. Числово проаналізовано вплив частоти падаючої поздовжньої плоскої гармонічної хвилі на напруження у матриці та у включенні залежно від пружних характеристик складників і форми включення.

Гранично-інтегральне формулювання задачі та числове її розв'язання. Розглянемо тривимірне пружне неоднорідне тіло, яке складається з безмежної матриці та сферичного включення довільної форми, що має гладку поверхню S із зовнішньою нормаллю $n(n_1, n_2, n_3)$. Механічні властивості включення і матриці визначають густини ρ^M і ρ^I , модулі зсуву G^I , G^M і коефіцієнти Пуассона ν^I , ν^M відповідних складників матеріалів (індексом "I" позначено величини, що відносяться до включення, а індексом "M" – до матриці). Між матрицею та включенням реалізується ідеальний механічний контакт, тобто забезпечується неперервність переміщень $u(u_1, u_2, u_3)$ і зусиль $t(t_1, t_2, t_3)$ за перетину міжфазної поверхні:

$$u^M(x) = u^I(x) = u(x), \quad t^M(x) = t^I(x) = t(x), \quad x \in S. \quad (1)$$

Динамічне деформування тіла обумовлено поширенням із нескінченності гармонічної в часі t пружної хвилі із заданою циклічною частотою ω та відомим розподілом у просторі $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ амплітуди переміщень $u^{in}(u_1^{in}, u_2^{in}, u_3^{in})$. Внаслідок періодичності динамічного процесу спільний експоненціальний часовий множник $\exp(-i\omega t)$ вилучаємо із розв'язку, що опишемо згодом лише амплітудними характеристиками.

На основі принципу суперпозиції та формули Сомільяно вихідну задачу за методикою праці [1] зведемо до системи шести граничних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно компонент контактних переміщень та зусиль

$$\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}) - \iint_S T_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) u_j(\mathbf{y}) dS_y + \iint_S U_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y = u_i^{in}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}) + \iint_S T_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) u_j(\mathbf{y}) dS_y - \iint_S U_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2)$$

де використано сумування за повторюваними індексами, U_{ij}^L та T_{ij}^L ($L = M, I$) – відомі фундаментальні розв'язки тривимірних задач теорії пружності у частотній області з порядком особливості $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ і $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$, відповідно [5].

Оскільки ядра отриманих ГІР містять особливості в точці $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, їх числовому розв'язку повинні передувати процедури регуляризації інтегралами, ядрами яких є статичні аналоги ядер U_{ij}^L та T_{ij}^L ($L = M, I$). Після регуляризації ГІР дискретизують за схемою МГЕ, що передбачає покриття міжфазної поверхні S компактною неперервною сіткою чотирикутних і трикутних криволінійних елементів з використанням квадратичних апроксимацій для поверхні. Вводимо також білінійне наближення шуканих функцій на кожному із елементів.

За розв'язками системи ГІР (2) компоненти внутрішніх напружень у матриці та включенні отримуємо так:

$$\sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}) + \int_S D_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) u_j(\mathbf{y}) dS_y - \int_S S_{ij}^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y,$$

$$\sigma_{ij}^L(\mathbf{x}) = \int_S S_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y - \int_S D_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) u_j(\mathbf{y}) dS_y. \quad (3)$$

Тут регулярні функції D_{ij}^L і S_{ij}^L ($L = M, I$) є лінійними комбінаціями похідних від функцій U_{ij}^L та T_{ij}^L , відповідно:

$$S_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\omega_{2L}^2} \left\{ \frac{2\nu^L}{1-2\nu^L} \left[-g_1^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - 2g_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{im} - \right.$$

$$\left. - \left[g_1^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \times \left(\frac{(x_m - y_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{ij} + \frac{(x_i - y_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{mj} \right) - \right.$$

$$\left. - 2g_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{im} + 2 \left[2g_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_m - y_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \right\},$$

$$D_{ij}^L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = \frac{G^L}{\pi\omega_{2L}^2} \left\{ \left[q_1^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + 5q_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + 8q_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_m - y_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} - \left[q_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + 2q_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \frac{(x_i - y_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{im} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu^L}{1-2\nu^L} \left[q_1^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - 4q_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_4^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_5^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] r_{,p} \delta_{jm} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \left[3q_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + 6q_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + q_4^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + q_5^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \left(\frac{(x_m - y_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{ij} + \frac{(x_i - y_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{mj} \right) \right\} \times$$

$$\times \frac{(x_i - y_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_i + \left\{ \frac{\nu^L}{1-2\nu^L} \left[q_1^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_2^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - 4q_3^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_4^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - q_5^L(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{v^L}{1-2v^L} \left[q_1^L(|x-y|) - q_2^L(|x-y|) - 4q_3^L(|x-y|) - q_4^L(|x-y|) - q_5^L(|x-y|) \right] - \right. \\
& - q_2^L(|x-y|) - 2q_3^L(|x-y|) \left. \right\} \frac{(x_i - y_i)(x_m - y_m)}{|x-y|^2} n_j - \frac{1}{4} \left[3q_2^L(|x-y|) + 6q_3^L(|x-y|) + \right. \\
& + q_4^L(|x-y|) + q_5^L(|x-y|) \left. \right] \left(\frac{(x_m - y_m)}{|x-y|} n_i + \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|} n_m \right) \frac{(x_j - y_j)}{|x-y|} + \\
& + \left\{ \left(\frac{v^L}{1-2v^L} \right)^2 \left[q_1^L(|x-y|) - 4q_2^L(|x-y|) + 2q_3^L(|x-y|) + 2q_4^L(|x-y|) - q_5^L(|x-y|) \right] + \right. \\
& + \frac{2v^L}{1-2v^L} \left[-q_2^L(|x-y|) + 2q_3^L(|x-y|) + q_4^L(|x-y|) \right] + q_3^L(|x-y|) \left. \right\} \delta_{im} n_j + \\
& + \frac{1}{2} \left[q_3^L(|x-y|) + q_4^L(|x-y|) \right] (\delta_{ij} n_m + \delta_{mj} n_i) \Bigg\} ,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
q_1^L(r) &= \left[(36 - 36i\omega_{1L}r - 17\omega_{1L}^2r^2 + 5i\omega_{1L}^3r^3 + \omega_{1L}^4r^4) \exp(i\omega_{1L}r) - \right. \\
& \left. - (36 - 36i\omega_{2L}r - 17\omega_{2L}^2r^2 + 5i\omega_{2L}^3r^3 + \omega_{2L}^4r^4) \exp(i\omega_{2L}r) \right] r^{-5} , \\
q_2^L(r) &= \left[(9 - 9i\omega_{1L}r - 4\omega_{1L}^2r^2 + i\omega_{1L}^3r^3) \exp(i\omega_{1L}r) - \right. \\
& \left. - (9 - 9i\omega_{2L}r - 4\omega_{2L}^2r^2 + i\omega_{2L}^3r^3) \exp(i\omega_{2L}r) \right] r^{-5} , \\
q_3^L(r) &= \left[(3 - 3i\omega_{1L}r - \omega_{1L}^2r^2) \exp(i\omega_{1L}r) - (3 - 3i\omega_{2L}r - \omega_{2L}^2r^2) \exp(i\omega_{2L}r) \right] r^{-5} , \\
q_4^L(r) &= \left[(3 - 3i\omega_{1L}r - \omega_{1L}^2r^2) \exp(i\omega_{1L}r) - (3 - 3i\omega_{2L}r - 2\omega_{2L}^2r^2 + i\omega_{2L}^3r^3) \exp(i\omega_{2L}r) \right] r^{-5} , \\
q_5^L(r) &= \left[(12 - 12i\omega_{1L}r - 5\omega_{1L}^2r^2 + i\omega_{1L}^3r^3) \exp(i\omega_{1L}r) - \right. \\
& \left. - (12 - 12i\omega_{2L}r - 7\omega_{2L}^2r^2 + 3i\omega_{2L}^3r^3 + \omega_{2L}^4r^4) \exp(i\omega_{2L}r) \right] r^{-5} . \quad (4)
\end{aligned}$$

Тут $\omega_{jL} = \omega / c_j^L$ ($j = 1, 2$) – хвильові числа матеріалів; $c_2^L = \sqrt{G^L / \rho^L}$, $c_1^L = c_2^L \sqrt{2(1-v^L)/(1-2v^L)}$ – швидкості поширення поперечної та поздовжньої хвиль у матриці, коли $L = M$, та включенні, коли $L = I$; δ_{ij} – символ Кронекера, $|x - \xi|$ – відстань між точкою поля x та точкою інтегрування y .

Регулярність інтегралів у співвідношеннях (3) забезпечується незбіжністю точки поля x та точки інтегрування y , тому для їх обчислення застосовують квадратурні формули Гаусса за припущення лінійної інтерполяції густини. Дискретизація в близьких до поверхні S точках передбачає попереднє зведення квазісингулярних інтегралів з ядрами D_{ij}^L до форми, яка вміщує ядра з пониженим на одиницю порядком особливості і тангенціальні похідні від функцій контактних переміщень [7].

Числові результати. Розглянемо задачу про падіння на включення плоскої поздовжньої пружної хвилі, що поширюється вздовж осі Ox_3 зі сталою амплітудою переміщень U_0 , тоді

$$U_3^{in}(x) = U_0 \exp(i\omega_{1M}x_3), \quad U_1^{in} = U_2^{in} = 0. \quad (5)$$

Контрастність механічних властивостей складників елементів тіла забезпечували різними модулями зсуву матриці і включення з параметром $G^I/G^M = 10$, у той час як їхні густини і коефіцієнти Пуассона вважали однаковими: $\nu^M = \nu^I = 0,3$. Розглядали включення двох форм: сферичне з радіусом a (рис. 1а) та у вигляді закругленого з обох кінців циліндричного волокна з радіусом закруглення a і висотою h , вісь волокна спрямована вздовж осі Ox_3 (рис. 1б). Така геометрія включень за розглянутого хвильового збурення забезпечує осьову симетрію задачі.

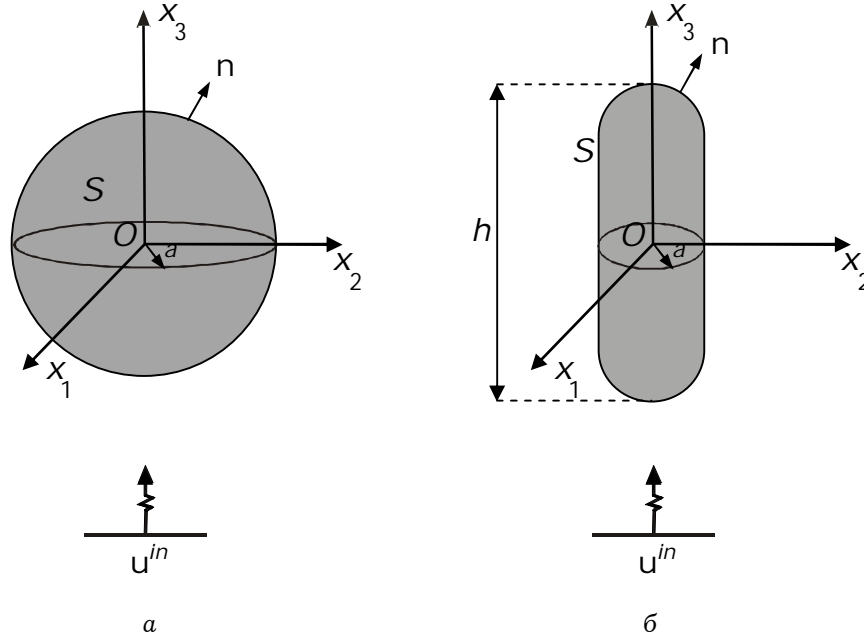


Рис. 1.

Побудовано (рис. 2) діаграми просторових розподілів віднесених до величини $2G^M U_0(1 - \nu^M) / (1 - 2\nu^M)a$ амплітуд радіальних напружень $|\sigma_{rr}|$ у матриці зі сферичним включенням до відстані $\bar{r} = r/a = 3$ від центра a включення. Рис. 2а стосується нормалізованого хвильового числа $\omega_{1M}a = 0,3$, рис. 2б – $\omega_{1M}a = 0,9$, рис. 2в – $\omega_{1M}a = 1,5$. Значення $\bar{r} = 1$ відповідає поверхні контакту включення і матриці.

Зі збільшенням хвильового числа наростає асиметрія поля напружень відносно площини, яка проходить через центр включення і перпендикулярна до напрямку поширення хвилі збурення. Тобто стає вираженіший контраст хвильової картини з боку набігу хвилі на включення та сходу з нього. У низькочастотному діапазоні амплітуда напружень зменшується в обох напрямках від центра включення вздовж осі симетрії задачі, на відстані $r = 3a$ вплив включення на хвильову картину можна знехтувати (тоді поле напружень збігається з розподілом радіальних напружень у падаючій хвилі). В області вищих хвильових чисел спадає закономірність напружень у вказаних напрямках змінюється на протилежну, розсіяні включенням хвилі генеруються також на більших відстанях від включення. Зони максимальної концентрації динамічних напружень локалізовані у лобовій до падаючої хвилі області поблизу поверхні включення. Амплітуда радіальних напружень менша з тильного боку поверхні, мінімальні значення фіксуються в бокових напрямках.

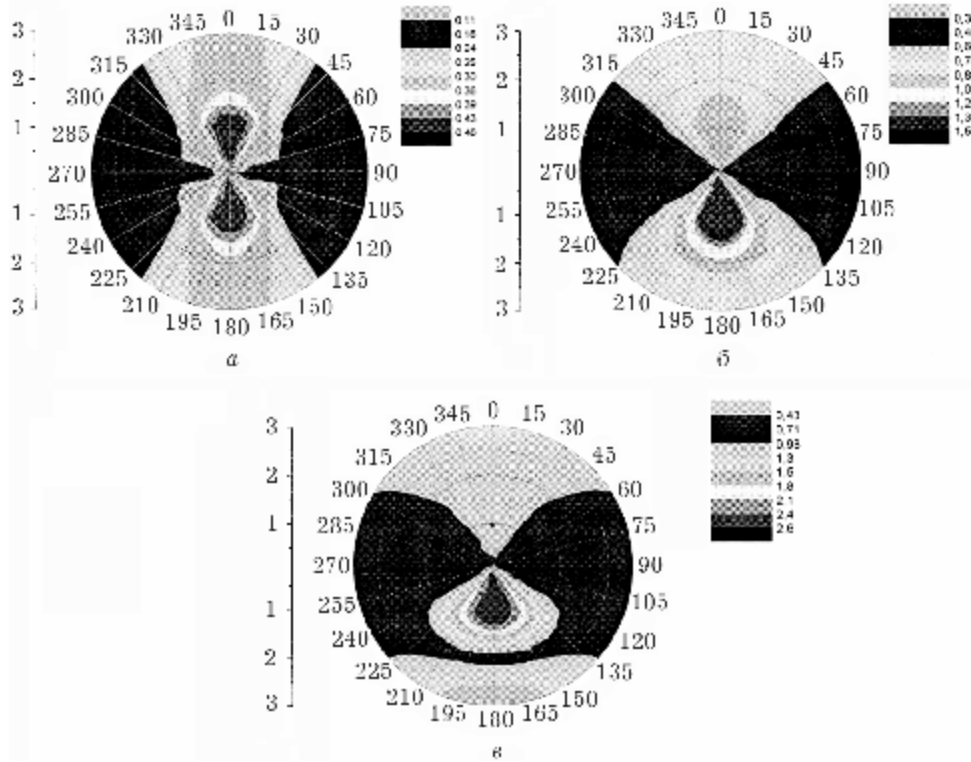


Рис. 2.

На рис. 3 продемонстровано залежності відносних амплітуд напружень $|\bar{\sigma}_{33}|$ у матриці із волокнистим включенням висоти $h=4a$ вздовж осі Ox_3 (рис. 3а), коли $x_1 = x_2 = 0$, і напружень $|\bar{\sigma}_{11}|$ вздовж осі Ox_1 (рис. 3б), коли $x_3 = 0$, для різних значень хвильового числа: 1 – $\omega_{1M}a = 0,3$; 2 – $\omega_{1M}a = 0,9$; 3 – $\omega_{1M}a = 1,5$. Точки $x_3/a = 2$ та $x_3/a = -2$ на рис. 3а та точка $x_1/a > 1$ на рис. 3б є точками стику поверхонь волокнистого включення та матриці. Аналогічна поведінка напружень у напрямку поширення хвилі, як і для сферичного включення, проте їх просторова зміна монотонніша.

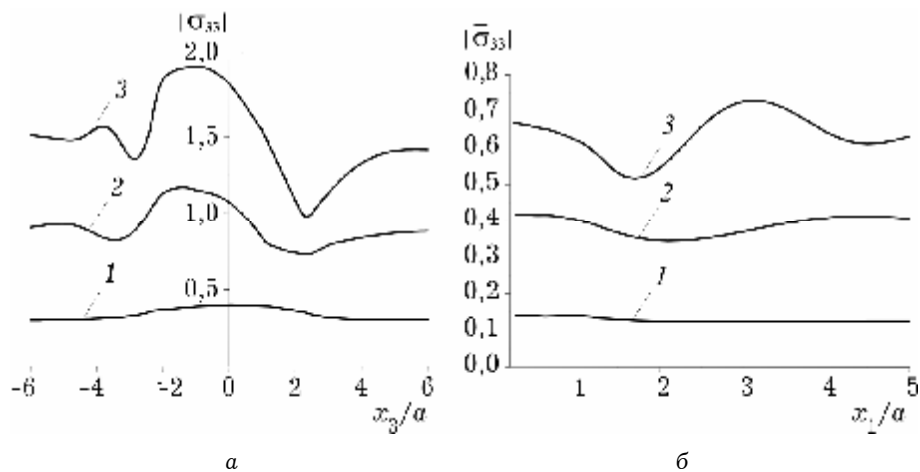


Рис. 3.

Висновки. Запропонована схема методу граничних елементів для числового дослідження тривимірних пружних гармонічних хвильових полів у матриці з включенням за умов їх ідеального контакту та ускладненої форми включення. Зменшення кількості результуючих рівнянь задачі досягнуто неявним урахуванням цих умов на етапі зведення задачі до ГІР. Проаналізовано поле напружень від падіння на сферичне включення та включення у формі скінченного волокна плоскої поздовжньої хвилі залежно від розташування актуальної точки у матриці і включенні за різних значень хвильового числа.

1. Бутрак І. О., Кільницька Т. І., Хай О. М. Динамічний контакт сферичного включення з матрицею за падіння пружної хвилі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – № 3. – С. 99–104.
2. Kitahara M., Nakagawa K., Achenbach J. D. Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity // Comp. Mech. – 1989. – 5. – № 2–3. – P. 129–144.
3. Kerr F. H. The scattering of a plane elastic wave by spherical elastic inclusions // Int. J. of Eng. Sci. – 1992. – 30. – P. 169–186.
4. Kanaun S. K., Levin V. M. Propagation of longitudinal elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions // Archive of Appl. Mech. – 2007. – 77. – P. 627–651.
5. Ємець В. Ф. Моделювання та інтерпретація даних розсіяння ультразвуку локальними об'єктами. – Львів: Фенікс, 2001. – 254 с.
6. Михаськів В. В., Стасюк Б. М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы // Прикл. механика. – 2007. – 43. – № 4. – С. 27–35.
7. Aliabadi M. H. The Boundary Element Method: V. 2. Applications in Solids and Structures. Boston: Wiley, 2002. – 598 p.

УПРУГИЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ В ТРЕХМЕРНОЙ МАТРИЦЕ С ОБЪЕМНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Численным методом граничных элементов исследовано распространение упругих гармонических волн в безграничной трехмерной матрице с включением сферической формы и в форме конечного цилиндрического волокна. На поверхности соединения матрицы и включения выполняются условия идеального механического контакта. На основе решений граничных интегральных уравнений относительно контактных параметров проанализировано распределение напряжений внутри составляющих рассматриваемой механической системы. Обнаружены зоны локализации экстремальных напряжений в зависимости от волнового числа.

ELASTIC WAVES FIELDS IN 3-D MATRIX WITH VOLUMETRIC INCLUSION

By the numerical method of boundary elements propagation of elastic harmonic waves in an infinite-dimensional matrix with the inclusion of spherical form and in the form of cylindrical finite fibers are investigated. On the surface of connection of the matrix and the inclusion conditions of ideal mechanical contact are satisfied. Based on the solutions of boundary integral equations of contact parameters the stresses distributions inside of considered mechanical system components are analyzed. Discovered zone of localization of extreme stresses depending on the wave number.