УДК 539.3: 534.1

О. Ф. Лесик[1], М. В. Марчук[2,3], В. С. Пакош[2]

ВПЛИВ ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ НА СПЕКТР ПОЗДОВЖНІХ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ПЛАСТИН-СМУГ

Запропоновано математичну модель процесу поздовжніх лінійних коливань податливих до трансверсального зсуву та стиснення пластин-смуг. Отримано аналітичний вираз для спектра власних частот трансверсально-ізотропної композитної пластини-смуги. Виявлено, що, враховуючи податливість до трансверсального стиснення, можна суттєво збільшити вищі частоти, а нижчі – неістотно.

Вступ. Видовжені в одному з напрямків пластини (смуги) – досить поширені тримкі конструкційні елементи споруд та технічних засобів різноманітного цільового призначення. Як правило, під час їх розрахунку за дії динамічних навантажень розглядають лише характеристики поперечних коливних процесів [4]. Однак існують певні збудники поздовжніх коливань таких елементів, зокрема сейсмічні [2]. Залежно від умов закріплення видовжених сторін у пластинах-смугах виникатимуть також коливні процеси вздовж нормальної до серединної площини координати, які зовсім не враховують у класичних підходах [1, 4, 5]. Тому є потреба в уточненій математичній моделі поздовжніх коливних процесів у пластинах, зокрема композитних, що дасть можливість кількісно оцінити вплив згаданих факторів на власні частоти.

Формулювання задачі. Розглянемо трансверсально-ізотропну композитну пластину-смугу сталої товщини $2h$ з розміром короткої сторони $2l$ з приведеними за товщиною пружними характеристиками та густиною ρ. Початок координат x_1 помістимо посередині між видовженими сторонами серединної площини. Тоді шляхом лінеаризації отриманих раніше співвідношень [3] з урахуванням незначного впливу умов закріплення коротких сторін пластини-смуги отримуємо математичну модель її лінійних поздовжніх вільних коливань, що охоплює рівняння руху

$$N' = 2\rho h \ddot{u}, \qquad Q_1' - 6\sigma_3^0 = 2\rho h \ddot{w}_1, \tag{1}$$

співвідношення пружності між узагальненими зусиллями та компонентами тензора деформацій, визначених на серединній площині, та характеризує лише симетричний до неї деформований стан пластини-смуги

$$N = B[(1+\alpha)e_1^0 + \bar{\lambda}e_3^0], \qquad Q_1 = \frac{3}{4}\Lambda\, 2e_{13}^1,$$

$$\sigma_3^0 = \frac{5}{6}E_0[e_3^0 + \lambda e_1^0], \tag{2}$$

деформаційні співвідношення між вказаними вище компонентами тензора деформації та узагальненими переміщеннями, означеними на серединній площині:

$$e_1^0 = u', \qquad 2e_{13}^1 = w_1', \qquad e_3^0 = w_1 / h. \tag{3}$$

У формулах (1)–(3) використані такі позначення: N – розтягувальне вздовж осі $0x_1$ зусилля; σ_3^0 – стискальне (розтягувальне) нормальне до серединної площини зусилля; Q_1 – узагальнене трансверсальне зусилля; u – тангенціальне переміщення точок серединної площини; w_1 – вертикальне переміщення точок лицевих поверхонь (стиснення) відносно їхніх проекцій на серединну площину; $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$ – жорсткість у напрямку координати x_1; $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна жорсткість пластини-смуги; $E_0 = \dfrac{1-\nu}{1-\nu-2\nu\nu'}E'$; $\alpha = \dfrac{(\nu')^2(1+\nu)}{1-\nu-2\nu\nu'}\dfrac{E}{E'}$; E, ν – модуль Юнґа та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних до неї площинах; E', ν' – ті самі величини в площинах, перпендикулярних до серединної; G' – трансверсальний модуль зсуву і коефіцієнт зсуву $k' = 14/15$; штрих над символом функції – похідна за x_1, а крапка – за часовою координатою.

Наслідком підстановки співвідношень (3) в (2), а результату – в (1) є рівняння руху в узагальнених переміщеннях:

$$(1+\alpha)u'' + \bar{\lambda}\frac{w_1'}{h} = \frac{1}{c_1^2}\ddot{u},$$

$$w_1'' - k^2 w_1 - k^2 h\lambda u' = \frac{1}{c_2^2}\ddot{w}_1, \tag{4}$$

де $c_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$, $c_2 = \sqrt{k'G'/\rho}$ – швидкості поширення поздовжніх та зсувних хвиль; $k^2 = \dfrac{20}{3}\dfrac{E_0}{\Lambda h}$.

За шарнірного закріплення точок серединної поверхні на видовжених сторонах пластини-смуги крайові умови при $x_1 = \pm l$ записуємо так:

$$u(\pm l,\, t) = 0, \quad Q_1(\pm l,\, t) = 0. \tag{5}$$

За необхідності визначення амплітуди поздовжніх коливань точок серединної площини пластини та амплітуди коливань точок лицевих поверхонь початкові умови подаємо у вигляді

$$u(x_1, t_0) = u_0(x_1), \quad \dot{u}(x_1, t_0) = u_1(x_1),$$

$$w_1(x_1, t_0) = w_1^0(x_1), \quad \dot{w}_1(x_1, t_0) = w_1^1(x_1), \tag{6}$$

де u_0, u_1, w_1^0 та w_1^1 – задані функції в початковий момент часу $t = t_0$.

Побудова розв'язку. Систему рівнянь (4) шляхом виключення з неї функції w_1 зводимо до одного розв'язувального рівняння відносно функції u:

$$\left[(1+\alpha)u'''' - \frac{1}{c_1^2}\ddot{u}''\right]\frac{h}{\bar{\lambda}} - k^2\frac{h}{\bar{\lambda}}\left[(1+\alpha)u'' - \frac{1}{c_1^2}\ddot{u}\right] - \lambda k^2 h u'' =$$

$$= \frac{1}{c_1^2}\left[(1+\alpha)\ddot{u}'' - \frac{1}{c_1^2}\ddddot{u}\right]\frac{h}{\lambda}. \tag{7}$$

Задаючи коливний процес у вигляді

$$u = U(x)e^{i\omega t}, \tag{8}$$

для визначення функції $U(x)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$(1+\alpha)U'''' + \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - (1+\alpha)k^2 - k^2\lambda\bar{\lambda} - \frac{1+\alpha}{c_2^2}\omega^2\right]U'' - \frac{k^2\omega^2}{c_1^2}U + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2}U = 0, \tag{9}$$

розв'язок якого подаємо у вигляді

$$U(x) = A_1 sh k_1 x + A_2 ch k_1 x + A_3 \sin k_2 x + A_4 \cos k_2 x \,. \tag{10}$$

Тут A_i, $i = \overline{1,4}$ – коефіцієнти, що визначають з крайових умов (5), а k_1, k_2 – різні корені характеристичного рівняння

$$(1+\alpha)\mu^4 + \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} - (1+\alpha)k^2(1+\lambda\bar{\lambda}) - \frac{1+\alpha}{c_2^2}\omega^2 \right]\mu^2 - \\ - \left(\frac{k^2\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2} \right) = 0. \tag{11}$$

За нехтування інерцією точок лицевих площин для цих коренів отримуємо вирази

$$k_1^2 = \frac{1}{2(1+\alpha)} \left[\sqrt{(\omega^2 / c_1^2 - k^2)^2 + 4(1+\alpha)\frac{k^2\omega^2}{c_1^2}} - (\omega^2 / c_1^2 - k^2) \right],$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2(1+\alpha)} \left[\sqrt{(\omega^2 / c_1^2 - k^2)^2 + 4(1+\alpha)\frac{k^2\omega^2}{c_1^2}} + (\omega^2 / c_1^2 - k^2) \right]. \tag{12}$$

Ввівши до розгляду безрозмірну величину $\bar{\omega}$, пов'язану з власною частотою ω співвідношенням

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E(1-\nu)}} h$$

та взявши до уваги, що за крайових умов (5) для хвильового числа [4] маємо вираз $k_n = n\pi$ для спектра безрозмірних частот $\bar{\omega}_n$, отримуємо:

$$\bar{\omega}_n = \varepsilon \cdot k_n \cdot \mu_n \,, \tag{13}$$

де

$$\mu_n = \sqrt{1 + \alpha \frac{\frac{7}{25}\frac{1-\nu-2\nu\nu'}{1-\nu}\varepsilon^2 k_n^2 (E / E') / (E / G')}{1 + \frac{7}{25}\frac{1-\nu-2\nu\nu'}{1-\nu}\varepsilon^2 k_n^2 (E / E') / (E / G')}} \,,$$

$\varepsilon = h / l$ – параметр тонкостінності пластини-смуги.

Очевидно, що при $E / E' = 0$, тобто за відсутності податливості до трансверсального стиснення, одержимо класичний результат [4].

Аналіз результатів. Числові розрахунки виконали для композитної пластини-смуги при $E / E' = 1$, $\nu = 0,375$, $E / G = 2(1+\nu)$ для різних значень параметра тонкостінності. У табл. 1–3 у першому рядку – результати розрахунку низки безрозмірних частот за класичною теорією, у другому рядку – за формулою (13), що відповідає запропонованій математичній моделі. В останньому рядку подано величину $\delta = \left|\bar{\omega}_{ут} - \bar{\omega}_{кл}\right| \cdot 100\% \,/\, \omega_{ут}$. Порівняння першого та другого рядків свідчить про незначний вплив трансверсального стиснення на значення низьких власних частот пластини-смуги. Однак він суттєвий для високих частот, що належать до частотного діапазону поширення акустичних хвиль.

$\varepsilon = 0{,}01$ Таблиця 1.

$\bar{\omega}_n$ / № варіанта	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{50}$	$\bar{\omega}_{100}$
1	0,0314159	0,1570796	0,3141593	1,5707963	3,1415922
2	0,0314171	0,1572319	0,31526845	4,6995978	3,8477538
δ , %	0,0381723	0,0967728	0,35308367	8,1997618	22,4778079

$\varepsilon = 0{,}05$ Таблиця 2.

$\bar{\omega}_n$ / № варіанта	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{50}$	$\bar{\omega}_{100}$
1	0,1570796	0,78539816	1,5707963	7,8530816	15,707963
2	0,157232	0,2085348	1,6995979	11,355859	23,8809861
δ , %	0,0969728	2,9458556	8,1997628	44,587281	52,0310816

$\varepsilon = 0{,}1$ Таблиця 3.

$\bar{\omega}_n$ / № варіанта	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{50}$	$\bar{\omega}_{100}$
1	0,3141593	0,3707962	3,1415927	15,7079638	31,1415927
2	0,3153711	1,6995979	3,8483419	23,8809865	48,0556126
δ , %	0,3857354	8,1997618	22,4963262	52,0310817	54,3132784

Висновки. З аналізу результатів розрахунку спектра власних частот поздовжніх власних коливань пластини-смуги можна зробити висновок про необхідність врахування податливості до трансверсального стиснення за дії високочастотних циклічних навантажень, оскільки поправка до їх значень δ може перевищувати 50 %. За дії ж низькочастотних навантажень достатньо точні результати дає класична теорія. У подальшому аналогічні дослідження доцільно виконати для пластин скінченних розмірів і різних умов закріплення країв.

1. *Баничук Н. В., Барсук А. А., Иванова С. Ю.* Асимптотический анализ свободных колебаний и устойчивости растянутых и сжатых упругих полос и прямоугольных пластинок // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 93–99.
2. *ДБНВ.1.1-12:2006.* Будівництво у сейсмічних районах України. – К.: Мінбуд України, 2006. – 54 с.
3. *Марчук М. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф.* Уточнені рівняння геометрично нелінійного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 134–143.

4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
5. *Nikkhah-Bahrami M., Loghmani M., and Pooyanfar M.* Analytical Solution for Free Vibration of Rectangular Kirchhoff Plate from Wave Approach // World Academy of Sci., Eng. and Tech. – 2008. – 39. – P. 221–223.

ВЛИЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО СЖАТИЯ НА СПЕКТР ПРОДОЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛАСТИН-ПОЛОС

Предложена математическая модель продольных линейных колебаний податливых к трансверсальному сдвигу и сжатию пластин-полос. Получено аналитическое выражение для спектра собственных частот трансверсально-изотропной композитной пластины-полосы. Выявлено, что учитывая податливость к трансверсальному сжатию можно значительно увеличить высокие частоты, а низкие несущественно.

INFLUENCE OF TRANSVERSAL COMPRESSION ON SPECTRUM OF LONGITUDINAL NATURAL FREQUENCIES OF PLATES-STRIPS

A mathematical model of linear longitudinal vibrations of plates-strips pliable to transversal shear and compression is proposed. An analytical expression for the spectrum of natural frequencies of transversally isotropic composite plate-strip is obtained. It is found that considering of pliability to transversal compression significantly affects the increase in higher frequencies, and the lower ones insignificantly.

[1]Тернопільський нац. економічний ун-т, Тернопіль;
[2]Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
[3]Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів

Одержано
11.09.12