

**ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ХОДИ ЛЮДИНИ
З УРАХУВАННЯМ БІОМЕХАНІЧНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ**

Досліджено низку задач математичного моделювання ходи людини з урахуванням двосторонніх обмежень на міжланкові кути в основних суглобах ніг та реакції опорної поверхні. На підставі енергетично-оптимізаційного підходу задачі моделювання ходи сформульовані у вигляді задач оптимального керування для нелінійної механічної системи зі складними фазовими обмеженнями та цільовим функціоналом енерговитрат. Побудовано наближений розв'язок задач оптимального керування, який ґрунтується на методах параметризації узагальнених координат системи кубічними згладжувальними сплайнами, процедурі обернених задач динаміки, алгоритмах штрафних функцій та генетичних алгоритмах параметричної оптимізації. Проаналізовано вплив кінематичних та динамічних обмежень на характеристики субоптимального керованого процесу системи.

У біомеханіці ходи людини важливим є аналіз динамічних та енергетичних характеристик руху. На сьогодні в практиці біомеханічних досліджень найдоступніші кінематичні характеристики опорно-рухового апарату людини та сили взаємодії стоп з опорною поверхнею, які отримують за допомогою експериментальних вимірювань [3, 10]. Також за калориметричними замірами можна оцінити енерговитрати на переміщення людини під час ходи [14]. Однак під час експериментальних досліджень не вдається безпосередньо виміряти зусилля, що генеруються м'язо-скелетною системою людини та забезпечують її переміщення. Ефективні тут засоби математичного моделювання. Побудувати математичні моделі ходи людини досить важко, що пояснюють складністю динамічної поведінки їх опорно-рухового апарату. Тому розробка таких математичних моделей, що ґрунтуються на результатах експериментальних досліджень, є актуальною задачею біомеханіки.

Задачам математичного моделювання ходи людини у різноманітних формулюваннях присвячено низку праць, зокрема, [2, 4–8, 11, 15–21]. У монографіях [2, 11, 16] відображено результати багатопланових досліджень задач динаміки механічних систем, що моделюють ходу людини. У статті [6] її моделюють плоскою системою семи твердих тіл (корпус і дві триланкові нижні кінцівки). Вважають, що на проміжку подвійного кроку задані значення чотирьох міжланкових кутів системи та опорні реакції стопи. Задачу моделювання ходи людини сформульовано у вигляді задачі оптимального керування з цільовим функціоналом енерговитрат. Розроблено числово-аналітичну процедуру побудови наближеного розв'язку задачі керування, яка ґрунтується на параметризації узагальнених координат системи скінченним рядом Фур'є та зведенні вихідної задачі до задачі нелінійного математичного програмування. Запропоновану параметричну методику використано у праці [8] для моделювання ходи людини з протезом стегна (у фазі опори на протезовану ногу). У праці [7] для моделювання ходи людини використовують систему дев'яти твердих тіл, які представляють корпус, стегна, гомілки та дволанкові стопи. Також вважають заданими (на проміжку подвійного кроку) значення міжланкових кутів у колінному та гомілко-востопному суглобах кожної кінцівки. Для моделювання ходи формують відповідну задачу оптимального керування з функціоналом енерговитрат, для розв'язання якої використовують методи параметричної оптимізації. Частина узагальнених координат системи параметризують кубічними згладжувальними сплайнами, отриману задачу нелінійного математичного програмування розв'язують числовим методом Розенброка. Розроблені де-

в'ятиланкову математичну модель та параметричну методику поширили у праці [4] на випадок, коли задані експериментальні значення шести міжланкових кутів в основних суглобах нижніх кінцівок. Тут за цільовий функціонал використано комбінацію функціоналу енерговитрат та функціоналу, яким оцінюють відхилення отриманих розрахункових кінематичних характеристик від їх заданих реальних значень. У статті [5] ці ж модель та методика розвинуті для задачі моделювання ходи людини на протезі гомілки. У статті [15] опорно-руховий апарат людини моделюють плоскою системою 11-ти стрижнів з поздовжніми пружними деформаціями. За допомогою програмного пакета "Mathematica 6.0.3" побудована система нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує динаміку ходи в одноопорній фазі. Праця [17] присвячена побудові критерію оптимальності ходи людини. Автори вводять параметризований цільовий функціонал з ваговими коефіцієнтами, за якими досліджують вісім різних критеріїв, що характеризують механічні енерговитрати, напруження м'язів та їх втому під час ходи. Досліджували [18] модель ходи людини під дією двох груп м'язів у тазостегновому суглобі та однієї групи м'язів у гомілці. Решту м'язів моделювали послідовно з'єднаними пружними елементами, параметри яких вибирали за умови мінімізації енерговитрат. У статті [20] змодельовано ходу людини як у "нормі", так і на протезі стегна. Тут з використанням семиланкової плоскої моделі опорно-рухового апарату вивчено задачу оптимального керування, розв'язок якої побудовано на параметризованій множині керувань з допомогою прямих методів механіки. Подано [21] усереднені дані експериментальних біомеханічних досліджень ходи людини. ґрунтовний огляд підходів до математичного моделювання ходи людини наведено в праці [19].

Ця стаття продовжує цикл праць [4, 5, 7], в її основі – розроблена математична модель ходи людини та оптимізаційний підхід до аналізу динамічних характеристик ходи. Вважаємо, що на підставі експериментальних досліджень ходи людини задані двосторонні обмеження на: а) шість міжланкових кутів нижніх кінцівок; б) опорні реакції стоп. Моделювання ходи подано у вигляді низки задач оптимального керування для нелінійної механічної системи з цільовим функціоналом енерговитрат та набором різних комбінацій заданих двосторонніх обмежень. Побудовано наближений розв'язок задач оптимального керування, який ґрунтується на методах параметризації узагальнених координат системи кубічними згладжувальними сплайнами та числових алгоритмах нелінійного математичного програмування. Досліджено вплив заданих обмежень на кінематичні та динамічні характеристики ходи людини. Порівняно також розв'язки отриманої (зведеної) задачі нелінійного математичного програмування, побудовані як за гібридним генетичним алгоритмом [13], так і за алгоритмом Розенброка [1].

Математична модель ходи людини.

Розглядаємо ходу людини по нерухомій горизонтальній поверхні вздовж прямої OX інерційної системи відліку OXY . Опорно-руховий апарат моделюємо системою твердих тіл (рис. 1). Тіло NG моделює корпус, тіла $NK_i, K_iA_i, A_iH_iM_i, M_iS_i$ – відповідно стегно, гомілку і дволанкову стопу i -ої ноги, $i = 1, 2$. Тіла з'єднані ідеальними циліндричними шарнірами $N, K_i, A_i, M_i, i = 1, 2$, осі яких перпендикулярні площині руху моделі OXY . Система рухається внаслідок взаємодії активних (керуючих) моментів сил q_i, u_i, p_i, w_i у шарнірах N, K_i, A_i, M_i , сил реакцій опорної поверхні R_i та сили тяжін-

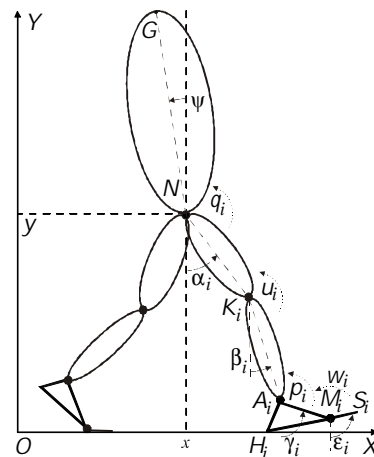


Рис. 1.

ня, $i = 1, 2$. Враховуючи, що вага стоп є мала порівняно з вагою людини (Становить $\sim 2\%$), надалі вважаємо тіла $A_i H_i M_i$, $M_i S_i$ безінерційними, а їх масу зосередженою у шарнірі A_i , $i = 1, 2$.

Введемо вектор узагальнених координат механічної системи $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, де (x, y) – координати точки N в інерційній системі відліку OXY ; $\psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i$ – кути відхилення тіл $NG, NK_i, K_i A_i, A_i H_i M_i, M_i S_i$ від вертикалі, $i = 1, 2$. Тоді рух моделі можна описати системою диференціальних та алгебричних рівнянь виду

$$A(\xi)\dot{\xi} + B(\xi)\ddot{\xi} + g(\xi) = C(\xi)f, \quad (1)$$

$$S(\xi, x_{R1}, x_{R2})f = 0, \quad (2)$$

де A, B, C, S – матриці розмірностей $7 \times 11, 7 \times 11, 7 \times 12, 4 \times 12$ відповідно; $b = (\xi_{s1}^0, \xi_{s2}^0, \dots, \xi_{s11}^0)$; $f = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y})$, R_{ix}, R_{iy}, x_{Ri} – координати вектора R_i у системі відліку OXY та абсциса точки його прикладення, $i = 1, 2$. Компоненти матриць A, B, C, S та вектора g можна одержати із розгорнутого запису співвідношень (1), (2) [4, 5]. Тут крапка над величиною – диференціювання за часом t .

Хода людини в усталеному режимі є періодичним процесом з періодом, рівним тривалості подвійного кроку, і характеризується стійкою послідовністю ритмічних фаз руху стоп [14, 21]. Тому ходу людини моделюємо на проміжку подвійного кроку $[0, T]$, на якому враховуємо основні фази руху стоп, $T = T_1 + T_2$, де T_i – тривалість кроку i -ої ноги, $i = 1, 2$. На проміжку $[0, T]$ визначимо послідовність фаз руху стоп, зокрема, для стопи першої ноги: $t \in [0, \tau_{h1})$ – переكات через п'ятку, $t \in [\tau_{h1}, \tau_{m1})$ – опора на всю стопу, $t \in [\tau_{m1}, T_1)$ – фаланговий переكات, $t \in (T_1, \tau_{s1})$ – переكات через носок, $t \in [\tau_{s1}, T)$ – перенесення стопи над опорною поверхнею; для стопи другої ноги: $t \in (0, \tau_{s2})$ – переكات через носок, $t \in [\tau_{s2}, T_1)$ – перенесення стопи над поверхнею, $t \in [T_1, \tau_{h2})$ – переكات через п'ятку, $t \in [\tau_{h2}, \tau_{m2})$ – опора на всю стопу, $t \in [\tau_{m2}, T]$ – фаланговий переكات.

На вибраній послідовності фаз повинні виконуватися ритмічні умови

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < T_1 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T, \quad (3)$$

а також кінематичні умови контактування точок стопи H_i, M_i, S_i з опорною поверхнею:

$$\begin{aligned} x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, y_{hi}(t) \equiv 0, y_{si} > y_{mi} > 0, t \in [\tau_i, \tau_{hi}), \\ x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, y_{hi}(t) \equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, t \in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\ x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^0, y_{hi} > 0, y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}), \\ x_{si}(t) &\equiv x_{si}^0, y_{hi} > y_{mi} > 0, y_{si}(t) \equiv 0, t \in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ y_{hi} &> 0, y_{mi} > 0, y_{si} > 0, t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $(x_{hi}, y_{hi}), (x_{mi}, y_{mi}), (x_{si}, y_{si})$ – координати точок H_i, M_i, S_i у системі OXY , $x_{mi}^0 = x_{hi}^0 + l_1$, $x_{si}^0 = x_{mi}^0 + l_2$, $x_{h1}^0 = 0$, $x_{h2}^0 = x_{h1}^0 + L_2$, $l_1 = |H_1 M_1| = |H_2 M_2|$, $l_2 = |M_1 S_1| = |M_2 S_2|$, L_2 – довжина кроку другої ноги, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T_1$, $\tau_3 = T$.

Із антропоморфності переміщення системи випливають обмеження динамічного характеру:

$$\begin{aligned} R_{iy} > 0, \quad |R_{ix}| \leq \mu R_{iy}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ R_{iy}(t) \equiv R_{ix}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad x_{hi}^0 \leq x_{Ri} \leq x_{si}^0, \quad t \in [\tau_i, \tau_{mi}), \\ x_{mi}^0 \leq x_{Ri} \leq x_{si}^0, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

де μ – коефіцієнт тертя між стопою та опорною поверхнею.

Задамо умови періодичності руху системи, а також умови взаємного розміщення стоп у початковий $t = 0$ і кінцевий $t = T$ моменти часу:

$$\begin{aligned} \xi(T) = \xi(0) + L, \quad \xi(T) = \xi(0), \\ x_{m2}(0) = x_{h1}^0 + l_1 - L_1, \quad y_{m2}(0) = 0, \quad x_{h1}(T) = x_{h1}^0 + L, \quad y_{h1}(T) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $L = (L, 0, \dots, 0)$ – вектор розмірності 11, $L = L_1 + L_2$ – довжина подвійного кроку, L_1 – довжина кроку першої ноги.

Задачі параметричної оптимізації ходи людини. Позначимо через $\eta_{Ni} = \alpha_i - \psi$, $\eta_{Ki} = \alpha_i - \beta_i$, $\eta_{Ai} = \gamma_i - \beta_i - \bar{\gamma}_i$ міжланкові кути в шарнірах системи N , K_i , A_i , де $\bar{\gamma}_i = 90^\circ - \phi_{Mi}$, $\phi_{Mi} = \angle A_i M_i H_i$, $i = 1, 2$. Кут η_{Ni} описує відхилення стегна NK_i відносно корпусу NG , кут η_{Ki} – відхилення гомілки $K_i A_i$ відносно стегна NK_i (додатний напрям відраховуємо за ходом годинникової стрілки), кут η_{Ai} – відхилення нормалі до основи стопи $H_i M_i$ відносно гомілки $A_i K_i$. Нехай задані двосторонні обмеження на кути

$$\begin{aligned} \eta_{Ni}^{(0)}(t) \leq \eta_{Ni}(t) \leq \eta_{Ni}^{(1)}(t), \quad \eta_{Ki}^{(0)}(t) \leq \eta_{Ki}(t) \leq \eta_{Ki}^{(1)}(t), \\ \eta_{Ai}^{(0)}(t) \leq \eta_{Ai}(t) \leq \eta_{Ai}^{(1)}(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (7)$$

та реакції опорної поверхні

$$R_{ix}^{(0)}(t) \leq R_{ix}(t) \leq R_{ix}^{(1)}(t), \quad R_{iy}^{(0)}(t) \leq R_{iy}(t) \leq R_{iy}^{(1)}(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Тут $\eta_{Ni, Ki, Ai}^{(0,1)}$, $R_{ix, iy}^{(0,1)}$ задані на проміжку $[0, T]$ функції, які визначають області допустимих значень міжланкових кутів та опорних реакцій, $R_{iy}^{(0)} \geq 0$, $i = 1, 2$. Ці функції побудовані в праці [21] усередненням (для групи пацієнтів) результатів експериментальних досліджень ходи людини. Також їх можна побудувати за методикою, запропонованою в [12] та апробованою в [5] для ходи людини на протезі гомілки. Коротко суть методики полягає ось у чому. За допомогою програмно-апаратного комплексу експериментальних біомеханічних досліджень ходи людини [3, 10] отримуємо значення міжланкових кутів та опорних реакцій на послідовності N кроків ($N \geq 10$). Можливі збурення в експериментальних даних видаляємо за допомогою медіанної цифрової фільтрації. Далі результати усереднюємо на проміжок подвійного кроку, після чого обчислюємо середньоквадратичне відхилення від усередненого значення, за допомогою яких будуюмо обмежувальні функції.

Щоб вивчити вплив обмежень (7), (8) на кінематичні, динамічні та енергетичні характеристики ходи людини, розглянемо низку задач математичного моделювання ходи. Нехай задані довжини L_i та тривалості T_i одинарних кроків, $i = 1, 2$. Введемо вектор керувань механічної системи $u = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2)$. Для оцінки якості переміщення системи використаємо функціонал

$$E = \frac{1}{L} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^2 (|q_i \dot{\mathbf{N}}_{Ni}| + |u_i \dot{\mathbf{K}}_{Ki}| + |p_i \dot{\mathbf{A}}_{Ai}| + |w_i \dot{\mathbf{M}}_{Mi}|) \right] dt, \quad (9)$$

який характеризує питомі (на одиницю довжини) механічні енерговитрати системи на проміжку подвійного кроку [4–8]. Залежно від урахування набору обмежень (7) та/або (8) сформулюємо такі задачі.

Задача 1. Для заданих обмежень на міжланкові кути (7) та реакції (8) знайти такий рух системи $\xi^*(t)$ та відповідне керування $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, які з урахуванням рівнянь (1), (2) та умов (3)–(6) мінімізують функціонал (9).

Задача 2. Для заданих обмежень на міжланкові кути (7) знайти такий рух системи $\xi^*(t)$ та керування $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, які з урахуванням рівнянь (1), (2) та умов (3)–(6) мінімізують функціонал (9).

Задача 3. Для заданих обмежень на опорні реакції (8) знайти такий рух системи $\xi^*(t)$ та керування $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, які з урахуванням рівнянь (1), (2) та умов (3)–(6) мінімізують функціонал (9).

Задача 4. Знайти такий рух системи $\xi^*(t)$ та керування $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, які з урахуванням рівнянь (1), (2) та обмежень (3)–(6) мінімізують функціонал (9).

Виділимо деякі особливості наведених задач. Розглядувана система, залежно від ритмічних фаз руху, має змінну кількість ступенів вільності. Окрім цього, під час опори на дві ступні одночасно ($t \in \Lambda = [0, \tau_{s2}] \cup [\tau_1, \tau_{s1}]$) система є статично невизначеною. Все це, а також обмеження (3)–(8) та недиференційовність (за Фреше) функціоналу (9) суттєво ускладнюють розв'язання таких задач.

Ефективним підходом у дослідженні сформульованих задач є використання методики параметричної оптимізації у просторі узагальнених координат механічної системи. Згідно з кількістю ступенів вільності системи на введених ритмічних фазах руху частину узагальнених координат апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вузлах [5]. Частину цих параметрів визначаємо із умов (4), (6), решту приймаємо за параметри оптимізації. Статичну невизначеність системи на двоопорних фазах руху вирішуємо за допомогою апроксимації (кубічними Ермітовими многочленами) функцій $x_{R1}(t)$, $x_{R2}(t)$, $t \in \Lambda$, $R_{ix}(t)$, $t \in [\tau_{3-i}, \tau_{si}]$, $i = 1, 2$, за їх граничними значеннями на суміжних одноопорних фазах та значеннями перших похідних у граничних точках (останні також додаємо до параметрів оптимізації). Після параметризації узагальнених координат системи із рівнянь руху (1), (2), згідно з методикою обернених задач динаміки [9], отримуємо залежність динамічних характеристик від параметрів оптимізації. Умови (5), (7), (8) задовольняємо за допомогою процедури штрафних функцій, попередньо зобразивши обмеження виду $g^{(0)}(t) \leq g(t) \leq g^{(1)}(t)$ в інтегральній формі:

$$V = \int_0^T [(g - g^{(1)})_+ + (g^{(0)} - g)_+] dt, \quad (10)$$

де $(v)_+ = v$ при $v \geq 0$ і $(v)_+ = 0$ при $v < 0$. У результаті сформульовані вище задачі оптимального керування зводимо до задач параметричної оптимізації виду

$$\Phi = E(z) + \langle \lambda, V(z) \rangle \rightarrow \min_z, \quad (11)$$

де z – вектор параметрів оптимізації, λ – вектор заданих сталих величин (штрафних коефіцієнтів), функцію $E(z)$ отримуємо із функціоналу енерго-

вират (9), вектор-функцію $V(z)$ – із умов (5), (7), (8) з урахуванням їх інтегрального зображення (10). Окрім цього, компоненти вектора V містять модулі величин розриву других похідних $\mathcal{K}(t)$, $\mathcal{K}_1(t)$, $\mathcal{K}_2(t)$ у моменти часу $t=0, T_1, T$, а також штраф за порушення монотонності функцій $x_{Ri}(t)$.

Числовий аналіз задач моделювання ходи людини. Опишемо окремі результати числового розв'язання сформульованих вище задач. Введемо низку позначень лінійних та масоінерційних характеристик моделі: m, r, J – маса корпусу NG , віддаль від його центра маси до точки N та його момент інерції відносно N ; $a_i = |NK_i|$, m_{ai}, r_{ai}, J_{ai} – довжина та маса стегна NK_i , віддаль від його центра маси до точки N та його момент інерції відносно N ; $b_i = |K_iA_i|$, m_{bi}, r_{bi}, J_{bi} – довжина та маса гомілки NK_i , віддаль від її центра маси до точки K_i та її момент інерції відносно K_i ; m_{fi} – зосереджена у точці A_i сумарна маса стопи i -ої ноги, $i = 1, 2$.

Моделювали ходу людини з такими параметрами: $m = 46.7$ кг, $r = 0.39$ м, $J = 7.1$ Нм², $a_1 = a_2 = 0.47$ м, $m_{a1} = m_{a2} = 8.5$ кг, $r_{a1} = r_{a2} = 0.26$ м, $J_{a1} = J_{a2} = 0.26$ Нм², $b_1 = b_2 = 0.53$ м, $m_{b1} = m_{b2} = 3.5$ кг, $r_{b1} = r_{b2} = 0.21$ м, $J_{b1} = J_{b2} = 0.22$ Нм², $m_{f1} = m_{f2} = 1.2$ кг, $l_1 = 0.19$ м, $l_2 = 0.1$ м, $A_1M_1 = A_2M_2 = 0.17$ м, $\varphi_{M1} = \varphi_{M2} = 38^\circ$. Обчислювали, припускаючи, що хода є симетрична, тобто рух однієї ноги повторює рух іншої із запізненням у часі $T_1 = T_2 = T/2$ [4]. Тривалість подвійного кроку $T = 1.14$ с, довжини одинарних кроків $L_1 = L_2 = 0.755$ м, коефіцієнт тертя $\mu = 0.9$. Межі $\eta_{Ni, Ki, Ai}^{(0,1)}$, $R_{ix, iy}^{(0,1)}$ областей допустимих значень міжланкових кутів та опорних реакцій задавали за усередненими даними експериментальних досліджень ходи людини [21].

Параметри числової схеми алгоритму набували значень, аналогічних до наведених у статті [5]. У результаті загальна кількість параметрів оптимізації становила 83. Виконували одну ітерацію методу зовнішніх штрафних функцій, при цьому штрафні коефіцієнти для обмежень (7), (8) набували значень: $\lambda_{Ni} = \lambda_{Ki} = 200$, $\lambda_{Ai} = 300$, $\lambda_{Rix} = \lambda_{Riy} = 200$. Мінімізували зведену цільову функцію $\Phi(z)$ за допомогою гібридного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням [13], згідно з яким розмір популяції задавали у 300 особин, максимальну кількість генерацій – 500, ймовірність схрещування хромосом – 0.95, ймовірність схрещування мутації – 0.85. Обчислення виконували на комп'ютері з процесором Intel Pentium dual-core 1.73 GHz.

У табл. 1 наведено результати розв'язання задач 1–4. Тут $\delta_{Ni}, \delta_{Ki}, \delta_{Ai}, \delta_{ix}, \delta_{iy}$ виражають відносний вихід субоптимальних величин η_{Ni}^* , η_{Ki}^* , η_{Ai}^* , R_{ix}^* , R_{iy}^* за межі областей їх допустимих значень і характеризують точність виконання обмежень (7), (8) [5]. Якщо обмеження у задачі не враховували, відповідну похибку брали у дужки. Параметр Δ_i описує тривалість розв'язання задачі параметричної оптимізації.

Як свідчать числові дані табл. 1 (ліва частина), для кожної із досліджуваних задач обмеження (7), (8) виконуються з достатньою точністю, зокрема, максимальна відносна похибка відхилення характеристик від їх допустимих областей рівна: для кутів 0.5 %, для реакцій 1.4 %. Побудовані субоптимальні режими ходи мають стійкий розподіл часових параметрів фаз руху стоп. Також відзначимо, що обмеження на міжланкові кути (7) та опорні

реакції (8) суттєво впливають на енерговитрати (9). Зокрема, у задачі моделювання ходи без урахування обмежень (7), (8) (задача 4) енерговитрати є менші на 24% проти задачі з цими обмеженнями (задача 1). При цьому істотним (на 30%) є також зменшення тривалості розв'язання задачі 4 (проти задачі 1).

Таблиця 1.

Алгоритм	Генетичний				Розенброка			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Φ^*	160.3	126.8	171.6	116.8	164.9	180.1	347.4	151.6
E , Дж/м	146.3	117.3	153.5	110.9	128.1	162.8	169.0	145.2
τ_{h1}^* , %	8	7	8	7	7	5	6	5
τ_{h2}^* , %	58	57	58	57	57	55	56	55
τ_{m1}^* , %	33	29	38	37	32	32	32	32
τ_{m2}^* , %	83	79	88	87	82	82	82	82
τ_{s1}^* , %	60	58	60	58	58	57	60	59
τ_{s2}^* , %	10	8	10	8	8	7	10	9
δ_{Ni} , %	0.1	0	(16.4)	(1.9)	0	0	(37)	(74)
δ_{Ki} , %	0.3	0.5	(34.6)	(27.5)	0.7	2.8	(16)	(42)
δ_{Ai} , %	0.1	0.2	(19.6)	(14)	0.3	0.2	(8)	(4.5)
δ_{ix} , %	0.6	(27.6)	1.3	(29.7)	3.9	(65.5)	30.5	(52)
δ_{iy} , %	0.8	(24.1)	1.4	(28.3)	3.9	(33.9)	3.8	(33)
Δ_t , хв:с	70:44	79:06	54:32	49:07	3:37	2:23	1:18	2:14

Важливою наочною характеристикою ходи людини є рух її корпусу. Отримані у результаті розв'язання задач 1–4 режими ходи характеризуються незначними коливаннями корпусу. У табл. 2 наведені екстремальні показники руху корпусу. Згідно з цими даними точка корпусу N здійснює вертикальні коливання з амплітудою, що не перевищує 3.3 см, кутові коливання корпусу (у сагітальній площині) мають амплітуду не більшу за 3.11° . Рух полюса N у горизонтальному напрямі є безреверсним ($\dot{\varphi} \geq 0$), а його максимальна швидкість не перевищує 1.488 м/с.

Таблиця 2.

Задача	1		2		3		4	
	min	max	min	max	$\mu\nu$	$\mu\alpha\xi$	$\mu\nu$	$\mu\alpha\xi$
y^* , м	1.070	1.101	1.073	1.102	1.061	1.094	1.069	1.096
\dot{y}^* , м/с	-0.193	0.155	-0.142	0.185	-0.161	0.194	-0.144	0.178
$\dot{\varphi}^*$, м/с	1.205	1.450	1.218	1.443	1.218	1.408	1.183	1.488
ψ^* , град	0.24	2.28	-2.62	0.31	-4.79	-2.29	-4.38	-1.27
$\dot{\varphi}^*$, град/с	-10.8	10.4	-14.7	17.6	-11.0	15.7	-18.0	17.0

Кінематичні та динамічні характеристики побудованих субоптимальних процесів зображено на рис. 2–10. Тут час t виражено у відсотках щодо тривалості подвійного кроку, кути – в градусах, динамічні характеристики

віднесено до сумарної маси системи та виражено: моменти – в Нм/кг, реакції – в Н/кг. На рисунках графіки (а) відповідають задачі 1 (жирні суцільні лінії) та задачі 4 (жирні штрихові лінії), а графіки (б) – задачі 2 (жирні суцільні лінії) та задачі 3 (жирні штрихові лінії). Тонкими лініями на рис. 2–9 показані межі областей допустимих значень відповідних характеристик, побудовані за результатами праці [21]. Зауважимо, що на рис. 2–6 допустимі області виражають накладені на ходу людини обмеження (7), (8), на рис. 7–9 ці області наведені для порівняння отриманих субоптимальних моментів сил з усередненими їх значеннями. Порівняльний аналіз графіків свідчить, що у задачі 4, де двосторонні обмеження (7), (8) не враховували, побудовані субоптимальні кінематичні та динамічні характеристики добре узгоджуються (у межах прийнятної похибки) із усередненими даними експериментальних біомеханічних досліджень.

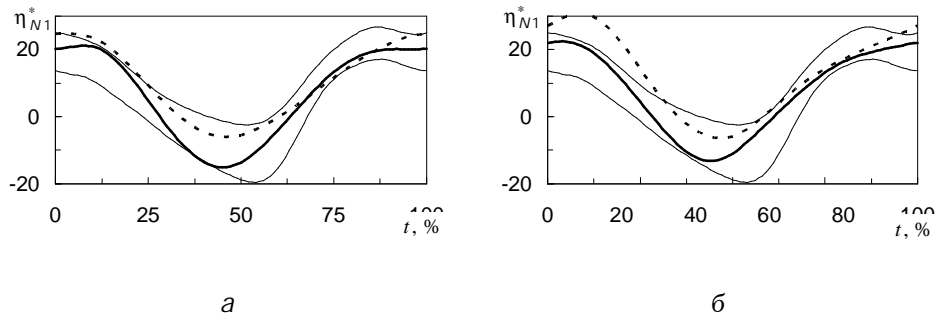


Рис. 2.

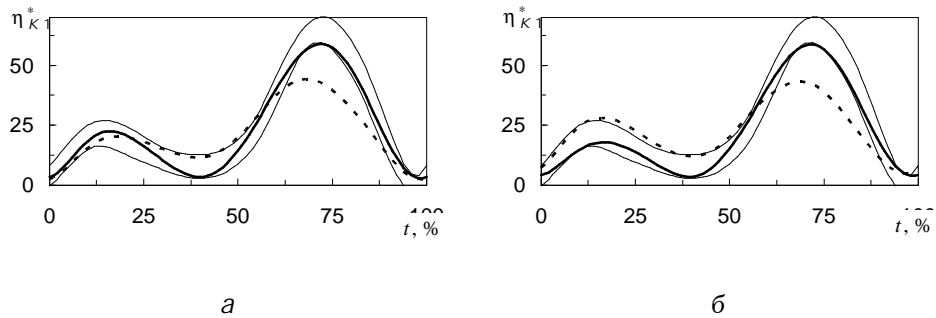


Рис. 3.

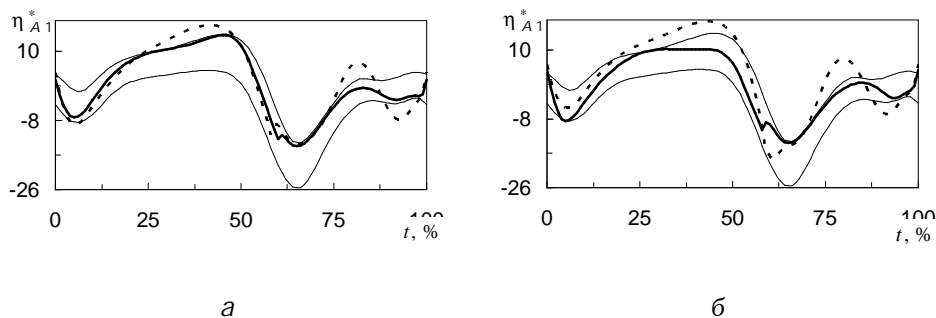


Рис. 4.

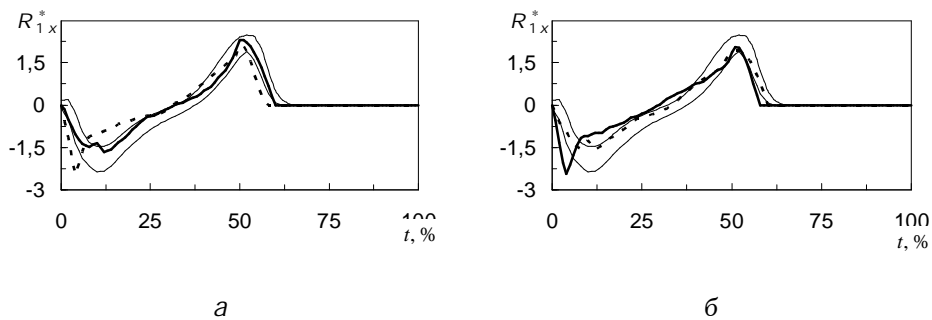


Рис. 5.

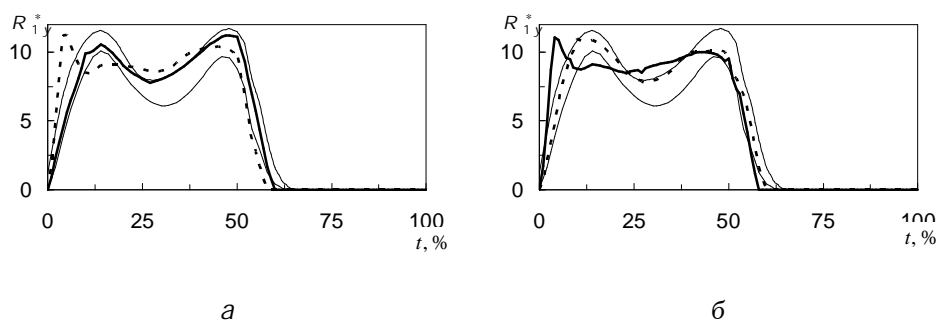


Рис. 6.

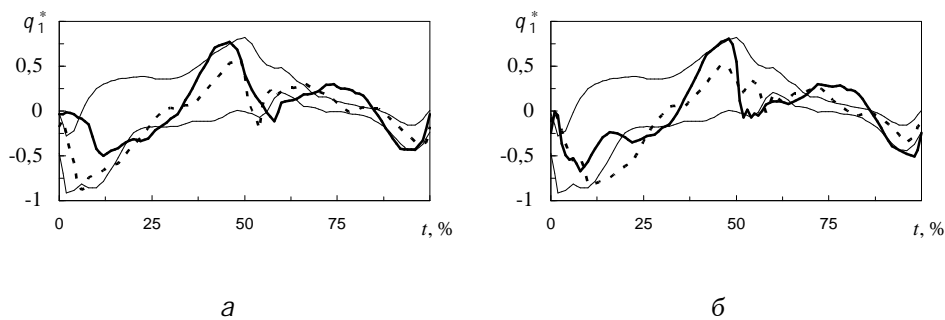


Рис. 7.

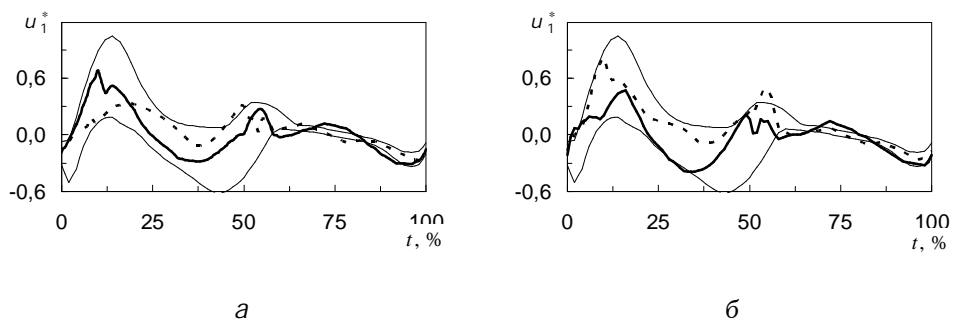


Рис. 8.

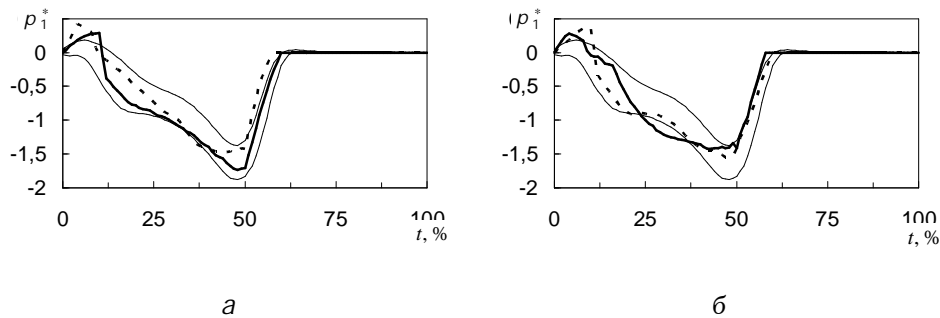


Рис. 9.

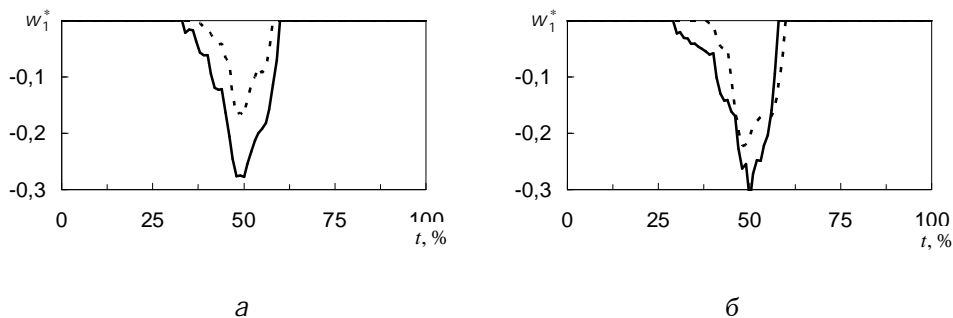


Рис. 10.

Паралельно з генетичним алгоритмом для мінімізації цільової функції $\Phi(z)$ використовували алгоритм Розенброка [1]. У табл. 1 (права частина) подано окремі результати розв'язання задач 1–4 за допомогою алгоритму Розенброка. Виявлено, що він не забезпечує потрібної точності виконання обмежень (7), (8). Зокрема, для задачі 3 відносна похибка відхилення реакції R_{ix}^* від допустимої області становить 30.5%. Істотно погіршились (порівняно з генетичним алгоритмом) також похибки решти задач, хоча тривалість розв'язання задач 1–4 суттєво скоротилась. Порівняльний аналіз свідчить, що гібридний генетичний алгоритм у досліджуваних задачах моделювання ходи людини ефективніший, ніж Розенброка.

Висновки. За енергетично-оптимізаційним параметричним підходом до математичного моделювання ходи людини розвинуто методику обчислення кінематичних, динамічних та енергетичних характеристик ходи з урахуванням двосторонніх обмежень на міжланкові кути (в основних суглобах нижніх кінцівок) та реакції опорної поверхні. Важливою частиною цієї методики є використання гібридного генетичного алгоритму (з дійсним кодуванням) для розв'язання отриманих задач параметричної оптимізації. Досліджено вплив двосторонніх обмежень на субоптимальні характеристики руху моделі. За допомогою числових розрахунків показано, що задачу моделювання ходи людини можна формулювати без урахування двосторонніх обмежень на міжланкові кути та опорні реакції, що суттєво скорочує час побудови розв'язку. Отримані так субоптимальні характеристики ходи добре узгоджуються із усередненими даними експериментальних біомеханічних досліджень. Також встановлено, що гібридний генетичний алгоритм для мінімізації зведеної цільової функції у задачах математичного моделювання ходи людини ефективніший за алгоритм Розенброка.

1. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
2. Белецкий В. В. Двухногая ходьба: Модельные задачи динамики и управления. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
3. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Красюк Г. В. и др. Автоматизированный сбор, обработка и анализ биомеханических данных ходьбы человека // Вестн. Харьк. гос. политехн. ун-та: Системный анализ, управление и информационные технологии. – 1999. – Вып. 73. – С.7–13.
4. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 88–93.
5. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.
6. Бербюк В. Е., Красюк Г. В., Ниценко Н. И. Математичне моделювання динаміки ходи людини у сагітальній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 40, № 4. – С. 127–138.
7. Бербюк В. Е., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керованих процесів біодинамічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 153–161.
8. Бербюк В. Е., Ниценко Н. И. Энергетически-оптимальное управление движением человека в фазе опоры на протезированную ногу // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 75–86.
9. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 719 с.
10. Завьялов А. В., Качер В. С., Гадяцкий А. В. и др. Инструментальные средства определения динамических характеристик ходьбы человека // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. – 2005. – № 6/2 (18). – С. 119–121.
11. Зацюрский В. М., Аруин А. С., Селуянов В. Н. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.
12. Литвин Б. А. Застосування нелінійної цифрової фільтрації в автоматизованій обробці експериментальних біомеханічних даних ходи людини // Відбір і обробка інформації. – 2005. – Вип. 22 (98). – С. 52–55.
13. Литвин Б. А. Про одну модифікацію гібридного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням у задачах оптимізації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2009. – Вип. 15. – С. 313–324.
14. Скворцов Д. В. Клинический анализ движений. Анализ походки. – Иваново: Стимул, 1996. – 344 с.
15. Чигарев А. В., Борисов А. В. Моделирование управляемого движения двухногого антропоморфного механизма // Росс. журн. биомеханики. – 2010. – 15, № 1 (51). – С. 74–88.
16. Чигарев А. В., Михасев Г. И., Борисов А. В. Биомеханика. – Минск: Изд. Гревцова, – 2010. – 284 с.
17. Ackermann Marko, Bogert van den Antonie J. Optimality principles for model-based prediction of human gait // J. of Biomechanics. – 2010. – 43, № 6. – P. 1055–1060.
18. Endo K., Herr H. Human Walking Model Predicts Joint Mechanics, Electromyography and Mechanical Economy // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems. – 2009. – P. 4663–4668.
19. Ren L. Howard D. Kenney L. Computational Models to Synthesize Human Walking // J. of Bionic Eng. – 2006. – 3, № 3. – P. 127–138.
20. Shandiz M. A., Farahmand F., Zohour H. Dynamic Simulation of the Biped Normal and Amputee Human Gait // 12th Int. Conf. on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines (CLAWAR 2009). – 2009. – P. 1113–1120.
21. Winter D. A. The biomechanics and motor control of human gait. – Waterloo: Univ. of Waterloo Press, Canada, 1991. – 140 p.

**ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ХОДЬБЫ ЧЕЛОВЕКА
С УЧЕТОМ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

Исследован ряд задач математического моделирования ходьбы человека с учетом двухсторонних ограничений на межзвенные углы в основных суставах ног и реакции опорной поверхности. На основании энергетически-оптимизационного подхода задачи моделирования ходьбы сформулированы в виде задач оптимального управления для нелинейной механической системы со сложными фазовыми ограничениями и целевым функционалом энергозатрат. Построено приближенное решение задач оптимального управления, базирующееся на методах параметризации обобщенных координат системы кубическими сглаживающими сплайнами, процедуре обратных задач динамики, алгоритмах штрафных функций и генетических алгоритмах параметрической оптимизации. Проанализировано влияние кинематических и динамических ограничений на характеристики субоптимального управляемого процесса системы.

**THE PROBLEMS OF HUMAN GAIT MATHEMATICAL MODELING SUBJECT TO BIOMECHANICAL
EXPERIMENTAL DATA**

The set of human gait mathematical modeling problems which takes into account double limiting on interlink angles in primary legs joints and ground reaction forces are investigated. Under optimization approach the human gait modeling problems are formulated in the form of optimal control problems for nonlinear mechanical system with complex phase's restrictions and energetic objective functional. The approximate solution of the optimal control problems based on the parameterization procedure of system generalized coordinates by cubic smoothing splines, the inverse dynamic problems procedure, penalty functions algorithms and genetic algorithms of parametric optimization is built. The influence of kinematic and dynamic restrictions on characteristics of constructed system suboptimal control process is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.03.12