

ЗАДАЧА СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПРОСТОРУ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

З використанням гармонічного потенціалу простого шару розв'язано задачі стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного тіла, складеного з двох ідеально контактуючих півпросторів, в одному з яких міститься паралельне або перпендикулярне до межі поділу теплоактивне дискове включення (на якому задані температура або тепловий потік). Задачі зведено до інтегральних рівнянь із сингулярними та регулярними ядрами. За певної віддалі центра кругового включення від межі поділу матеріалів регулярні ядра замінено виродженими і одержано точні розв'язки рівнянь, праві частини яких є поліномами другого степеня.

Сучасні елементи конструкцій та інженерних споруд, виготовлені шляхом з'єднання двох або більше різнорідних матеріалів, працюють в умовах не тільки силового навантаження, але часто і нерівномірного нагрівання, коли виникають градієнти температури та неоднакове теплове розширення окремих матеріалів.

Внаслідок цього у цих матеріалах виникають температурні напруження, зумовлені тонкими теплоактивними включеннями, на яких задана температура або теплові потоки, а також в їх околі локально зростають температурні градієнти і напруження. Тому важливо дослідити напружений стан тіла з теплоактивними тріщинами [2, 6] або тепловиділювальними включеннями [1, 4, 5], де проміжним етапом є визначення температурного поля.

Нижче розв'язано задачі стаціонарної теплопровідності для складеного тіла з теплоактивним дисковим включенням, паралельним або перпендикулярним до межі поділу півпросторів.

Точкове джерело тепла у складеному тілі. Розглянемо кусково-однорідний простір, складений з двох півпросторів з різними тепловими властивостями, в нижньому з яких розташоване точкове джерело тепла одиничної потужності. Введемо циліндричну систему координат, початок якої знаходиться на віддалі h від площини поділу, а вісь Ox_3 перпендикулярна до неї (рис. 1). На межі поділу $x_3 = h$ виконуються умови ідеального теплового контакту

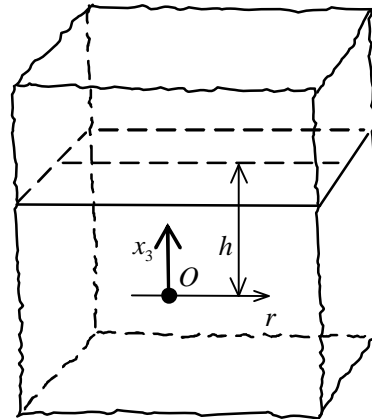


Рис. 1.

$$T_1(r, x_3) = T_2(r, x_3), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, x_3)}{\partial x_3} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, x_3)}{\partial x_3} \quad \text{при } x_3 = h, \quad (1)$$

де $T_1(r, x_3)$, $T_2(r, x_3)$ і λ_1 , λ_2 – температурні поля і коефіцієнти теплопровідності нижнього і верхнього півпросторів.

Розподіл температури у кожному з півпросторів задамо у вигляді

$$T_1(r, x_3) = \frac{1}{4\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1(r, x_3)} + \frac{\kappa_1}{R_2(r, x_3)} \right), \quad T_2(r, x_3) = \frac{1}{4\pi\lambda_1} \frac{\kappa_2}{R_1(r, x_3)}, \quad (2)$$

$$R_1(r, x_3) = \sqrt{r^2 + x_3^2}, \quad R_2(r, x_3) = \sqrt{r^2 + (x_3 - 2h)^2},$$

де κ_1 і κ_2 знаходимо з граничних умов (1):

$$1 + \kappa_1 = \kappa_2, \quad 1 - \kappa_1 = \lambda^* \kappa_2.$$

Звідси

$$\kappa_1 = \frac{1 - \lambda^*}{1 + \lambda^*}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{1 + \lambda^*}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (3)$$

Вирази (2) збігаються з наведеними раніше [7, 9].

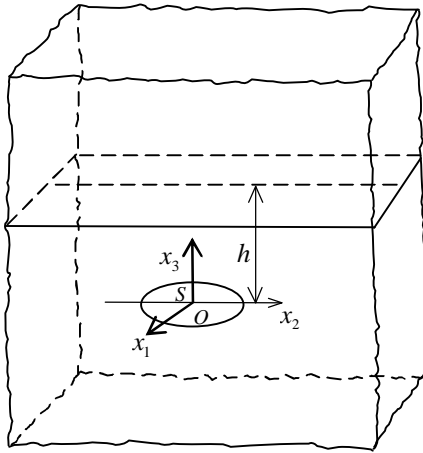


Рис. 2.

Паралельне до межі поділу тіла включення. Нехай у нижньому півпросторі розташоване паралельно до межі поділу тонке дискове теплоактивне включення радіуса a , на якому задані температура або тепловий потік. Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S , який є серединною площиною включення, спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до цієї площини (рис. 2). Стаціонарні температурні поля у нижньому $T_1(x^*)$ і верхньому $T_2(x^*)$ півпросторах, зумовлені тепловиділенням джерел тепла потужності $W(x_1, x_2)$, з використанням виразів (2) подамо у вигляді

$$T_1(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda_1} \iint_S W(\xi) \left[\frac{1}{R_1(x^*, \xi)} + \frac{\kappa_1}{R_2(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (4)$$

$$T_2(x^*) = \frac{\kappa_2}{4\pi\lambda_1} \iint_S \frac{W(\xi)}{R_1(x^*, \xi)} d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (5)$$

$$R_1(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad R_2(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + (x_3 - 2h)^2}, \quad (6)$$

$$\omega_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3),$$

де h – віддаль центра включення від межі поділу півпросторів.

Спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow \infty$ ($\lambda^* = \infty$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 0$), за формулою (4) з використанням співвідношень (6) дістанемо значення температури для півпростору з теплоактивним дисковим включенням, паралельним до його межі, яка підтримується за нульової температури [5], а спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow 0$ ($\lambda^* = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$), за цією ж формулою одержимо температуру у такому ж півпросторі з теплоізолюваною межею [5].

Задаючи різні вирази для функції $W(\xi)$, із подань (4) і (5) знаходимо значення температури в довільній точці складеного тіла. Введемо безрозмірні величини

$$y_i = \frac{x_i}{a}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

і запишемо розподіл температури в площині області S нижнього півпростору:

$$T_1(y) = \frac{a}{4\pi\lambda_1} \iint_S w(\eta) \left[\frac{1}{R_1(y, \eta)} + \frac{\kappa_1}{R_2(y, \eta)} \right] d_\eta S, \quad y = (y_1, y_2). \quad (8)$$

Якщо в області тепловиділення S відома температура $T_1(y)$, то інтегральне рівняння (8) служить для визначення потужності відповідних джерел тепла. Його можна розв'язати, використовуючи аналітично-числовий метод. Для цього регуляризуємо його, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом і кутом та задовольняємо рівняння у колокаційних точках у середині введених елементів, застосовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь [8].

Якщо центр включення знаходиться на віддалі $h > a$ від межі поділу, то в рівнянні (8) замінимо регулярне ядро $R_2^{-1}(y, \eta)$, яке враховує взаємодію включення з межею тіла, виродженим

$$R_2^{-1}(y, \eta) = \left[\omega_1^2(y, \eta) + \frac{4}{\varepsilon^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \frac{0.3\varepsilon^2 \omega_1^2(y, \eta)}{4} \right]. \quad (9)$$

При $\varepsilon = a/h = 1$ максимальна похибка розкладу (9) не перевищує 3% і швидко зменшується зі збільшенням віддалі h .

За довільного значення $T_1(y)$ інтегральне рівняння (8) має необмежений на контурі $L(y)$ області S розв'язок [3], який можна записати у вигляді

$$w(\eta) = \frac{\psi(\eta)}{\sqrt{L(\eta)}}, \quad L(\eta) = 1 - \eta_1^2 - \eta_2^2, \quad k = 1, 2, \quad (10)$$

де $\psi(\eta)$ – обмежена функція. За певного значення функції $T_1(y)$ розв'язок може бути і обмеженим [4].

Якщо у рівнянні (8) функція $T_1(y)$ є поліном степеня n , то і функція $\psi(\eta)$ також є поліном такого ж степеня, і тоді можна одержати точний розв'язок цього рівняння. Наведемо його розв'язок, коли $T_1(y)$ і $\psi(\eta)$ описують поліноми другого степеня:

$$T_1(y) = \sum_{i,j=0}^2 t_{ij} y_1^i y_2^j, \quad \psi(\eta) = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \quad i + j \leq 2. \quad (11)$$

Подання (11) підставимо у рівняння (8) і обчислимо інтеграли

$$I_{ij}(y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)} R_1(y, \eta)} d_\eta S; \quad (12)$$

$$I_{00}(y) = 1, \quad I_{10}(y) = y_1 / 2, \quad I_{01}(y) = y_2 / 2, \quad I_{11}(y) = 3y_1 y_2 / 8,$$

$$I_{20}(y) = (4 + 5y_1^2 - y_2^2) / 16, \quad I_{02}(y) = (4 + 5y_2^2 - y_1^2) / 16.$$

Знайдемо також інтеграли, які утворюються після підставлення співвідношення (9) у рівняння (8):

$$K_{ij} = \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)}} d_\eta S; \quad (13)$$

$$K_{00} = 2\pi, \quad K_{20} = K_{02} = 2\pi / 3, \quad K_{22} = 2\pi / 15, \quad K_{40} = K_{04} = 2\pi / 5.$$

Підставимо вирази (10) і (11) з використанням (12) і (13) у рівняння (8) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 . Тоді одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_{ij} :

$$c_1 b_{00} + c_2 b_{20} + c_2 b_{02} = 4\lambda_1 t_{00},$$

$$3\pi b_{11} = 32\lambda_1 t_{11},$$

$$\begin{aligned}
c_3 b_{10} &= 80\lambda_1 t_{10}, \\
c_3 b_{01} &= 80\lambda_1 t_{01}, \\
-3\kappa_1 \varepsilon^3 b_{00} + 40c_4 b_{20} - 40c_5 b_{02} &= 160\lambda_1 t_{20}, \\
-3\kappa_1 \varepsilon^3 b_{00} - 40c_5 b_{20} + 40c_4 b_{02} &= 160\lambda_1 t_{02}; \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \pi + \kappa_1 \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{20}\right), \quad c_2 = \frac{\pi}{4} + \kappa_1 \varepsilon \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon^2}{50}\right), \quad c_3 = 10\pi + \kappa_1 \varepsilon^3, \\
c_4 &= \frac{5}{16} \pi - \kappa_1 \frac{\varepsilon^3}{40}, \quad c_5 = \frac{\pi}{16} + \kappa_1 \frac{\varepsilon^3}{40}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Розв'язавши систему (14), знайдемо коефіцієнти b_{ij} :

$$\begin{aligned}
b_{00} &= \frac{80\lambda_1 [c_6 t_{00} - c_2 (t_{20} + t_{02})]}{3\kappa_1 \varepsilon^3 c_2 + 20c_1 c_6}, \quad b_{10} = \frac{80\lambda_1}{c_3} t_{10}, \quad b_{01} = \frac{80\lambda_1}{c_3} t_{01}, \\
b_{11} &= \frac{32\lambda_1}{3\pi} t_{11}, \quad b_{20} = \frac{c_7}{c_6} + c_0, \quad b_{02} = \frac{c_7}{c_6} - c_0; \tag{16}
\end{aligned}$$

$$c_6 = c_4 - c_5, \quad c_7 = 2\lambda_1 (t_{20} + t_{02}) + \kappa_1 \frac{3\varepsilon^3 b_{00}}{40}, \quad c_0 = \frac{16\lambda_1}{3\pi} (t_{20} - t_{02}). \tag{17}$$

У поданнях (16) c_1 , c_2 і c_3 задають співвідношення (15).

Температуру у складеному тілі $T_1(x^*)$ і $T_2(x^*)$ можна знайти з виразів (4) і (5), використавши значення коефіцієнтів b_{ij} (16).

Розв'язок (16) системи рівнянь (14) при $\kappa_1 = -1$ ($\lambda_2 \rightarrow \infty$) збігається з розв'язком для знаходження температури у півпросторі з теплоактивним дисковим включенням, паралельним до його межі, яка підтримується за нульової температури [5], а при $\kappa_1 = 1$ ($\lambda_2 \rightarrow 0$) – з розв'язком для знаходження температури у такому ж півпросторі з теплоізолюваною межею [5].

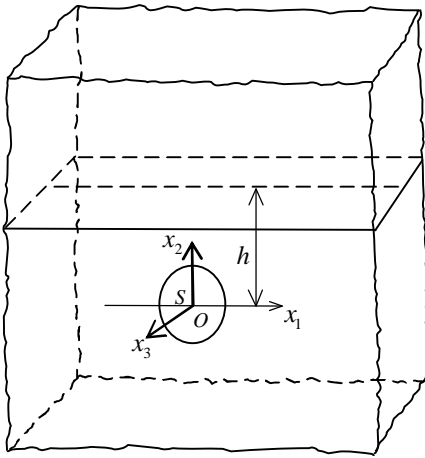


Рис. 3.

Перпендикулярне до межі поділу тіла включення. Нехай у нижньому півпросторі міститься перпендикулярне до межі поділу теплоактивне дискове включення радіуса a . Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S , спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до області S , а вісь Ox_2 – перпендикулярно до межі поділу тіл (рис. 3). Температурне поле у півпросторах, як і раніше, подамо виразами (4) і (5), де

$$R_2(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_2^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad \omega_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h)^2. \tag{18}$$

Спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow \infty$ ($\lambda^* = \infty$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 0$), за формулою (4) з використанням співвідношення (18) дістанемо температуру для півпростору з теплоактивним дисковим включенням, перпендикулярним до його межі, яка підтримується за нульової температури [5], а спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow 0$ ($\lambda^* = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$), за цією ж формулою одержимо температуру у такому ж півпросторі з теплоізолюваною межею [5].

Розподіл температури у нижньому півпросторі в площині області S через безрозмірні величини (7) подамо виразом (8). Замінімо регулярне ядро $R_2^{-1}(y, \eta)$ виродженим

$$R_2^{-1}(y, \eta) \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + 0.3\varepsilon(y_2 + \eta_2) - 0.075\varepsilon^2 \left((y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2 \right) \right]. \quad (19)$$

Якщо підставити співвідношення (10), (11) та (19) у рівняння (8), використати інтеграли (12), (13) і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 , то одержимо систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} c_1 b_{00} + 0.1\kappa_1 \varepsilon^2 b_{01} + c_2 b_{20} + c_2 b_{02} &= 4\lambda_1 t_{00}, \\ 3\pi b_{11} &= 32\lambda_1 t_{11}, \\ c_3 b_{10} &= 80\lambda_1 t_{10}, \\ 6\kappa_1 \varepsilon^2 b_{00} + c_8 b_{01} + 2\kappa_1 \varepsilon^2 b_{20} + 2\kappa_1 \varepsilon^2 b_{02} &= 80\lambda_1 t_{01}, \\ -3\kappa_1 \varepsilon^3 b_{00} + 40c_4 b_{20} - 40c_5 b_{02} &= 160\lambda_1 t_{20}, \\ -3\kappa_1 \varepsilon^3 b_{00} - 40c_5 b_{20} + 40c_4 b_{02} &= 160\lambda_1 t_{02}, \end{aligned} \quad (20)$$

де c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 визначають за формулами (15), а $c_8 = 10\pi - \kappa_1 \varepsilon^3$.

Після розв'язання системи (20) знаходимо коефіцієнти b_{ij} :

$$\begin{aligned} b_{00} &= -\frac{80\lambda_1 [c_9 (t_{20} + t_{02}) + 5c_6 c_{10}]}{20c_6 c_{11} + 3\kappa_1 \varepsilon^3 c_9}, \\ b_{01} &= \frac{40 [20c_6 c_{12} + 20\kappa_1 \varepsilon^2 c_{13} (t_{20} + t_{02}) + 3\kappa_1 \varepsilon^3 c_{14}]}{20c_6 c_{11} + 3\kappa_1 \varepsilon^3 c_9}, \\ b_{10} &= \frac{80\lambda_1}{c_3} t_{10}, \quad b_{11} = \frac{32\lambda_1}{3\pi} t_{11}, \quad b_{20} = \frac{c_7}{c_6} + c_0, \quad b_{02} = \frac{c_7}{c_6} - c_0; \quad (21) \\ c_9 &= \kappa_1^2 \varepsilon^4 - 5c_2 c_8, \quad c_{10} = c_8 t_{00} - 2\kappa_1 \varepsilon^2, \quad c_{11} = 3\kappa_1^2 \varepsilon^4 - 5c_1 c_8, \\ c_{12} &= 3\kappa_1 \varepsilon^2 t_{00} - 10t_{01} c_1, \quad c_{13} = c_1 - 3c_2, \quad c_{14} = \kappa_1 \varepsilon^2 t_{00} - 10t_{01} c_2. \end{aligned}$$

У виразах (21) c_3, c_0, c_6 і c_7 задають співвідношення (15), (17).

Температуру у складеному тілі $T_1(x^*)$ і $T_2(x^*)$ можна знайти з виразів (4), (5), використавши значення коефіцієнтів b_{ij} (21).

Система алгебричних рівнянь (20) і її розв'язок (21) для знаходження температури у складеному тілі при $\kappa_1 = -1$ ($\lambda_2 \rightarrow \infty$) збігаються з такою ж системою і розв'язком для знаходження температури у півпросторі з теплоактивним дисковим включенням, перпендикулярним до його межі, яка підтримується за нульової температури [5], а при $\kappa_1 = 1$ ($\lambda_2 \rightarrow 0$) – з такою ж системою і розв'язком для знаходження температури у такому ж півпросторі з теплоізолюваною межею [5].

Температура на осі симетрії паралельного до межі поділу тіла включення. Нехай потужність теплових джерел на паралельному до межі поділу тіла теплоактивному включенні є стала: $w(\xi) = w_0$. Знайдемо на осі Ox_3 (рис. 2) температуру у нижньому і верхньому півпросторах. За формулами (4) і (5) при $x_1 = x_2 = 0$ у безрозмірних координатах (7) маємо:

$$T_1(y_3) = \frac{w_0 a}{4\pi\lambda_1} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + y_3^2}} + \frac{\kappa_1 \rho}{\sqrt{\rho^2 + \left(y_3 - \frac{2}{\varepsilon}\right)^2}} \right) d\rho d\varphi,$$

$$T_2(y_3) = \frac{w_0 a \kappa_2}{4\pi\lambda_1} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + y_3^2}} d\rho d\varphi,$$

де $\rho = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$. Після обчислення інтегралів одержимо:

$$T_1(y_3) = \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \left[\sqrt{1 + y_3^2} - |y_3| + \kappa_1 \left(\sqrt{1 + \left(y_3 - \frac{2}{\varepsilon}\right)^2} - \left|y_3 - \frac{2}{\varepsilon}\right| \right) \right], \quad (22)$$

$$T_2(y_3) = \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1} \left(\sqrt{1 + y_3^2} - |y_3| \right). \quad (23)$$

При $y_3 = h/a = 1/\varepsilon$, спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow \infty$ ($\lambda^* = \infty$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 0$), за формулами (22) і (23) дістанемо температуру на межі поділу тіла $T_1(\varepsilon) = T_2(\varepsilon) = 0$, що відповідає півпростору з нульовою температурою на межі. Спрямувавши $\lambda_2 \rightarrow 0$ ($\lambda^* = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$), за цими ж співвідношеннями одержимо при $y_3 = 1/\varepsilon$ температуру на межі поділу тіла $T_1(\varepsilon) = T_2(\varepsilon) = \frac{w_0 a}{\lambda_1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$, тобто у півпросторі з теплоізолюваною межею.

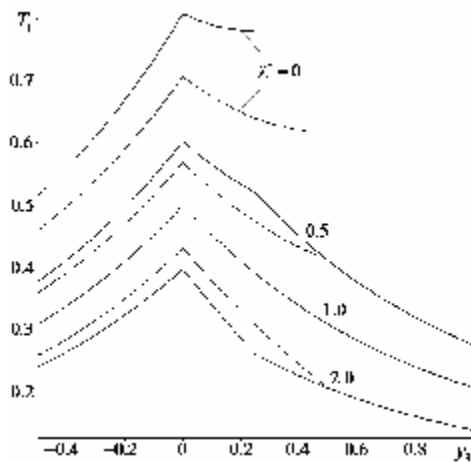


Рис. 4.

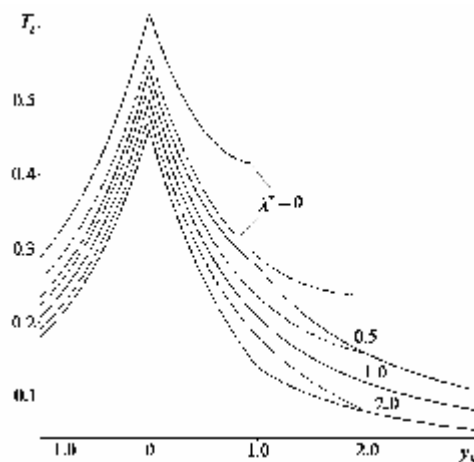


Рис. 5.

Розподіл температури $\bar{T}_i(y_3) = T_i \lambda_1 / w_0 a$ ($i = 1, 2$) вздовж осі y_3 , обчислений за формулами (22) і (23) для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності нижнього і верхнього півпросторів $\lambda^* = \lambda_2 / \lambda_1$ і віддалі включення до межі їх поділу h/a , зображено на рис. 4 ($h/a = 0.25$ – суцільні криві, $h/a = 0.5$ – штрихові) і рис. 5 ($h/a = 1.0$ – суцільні криві, $h/a = 2.0$ – штрихові). Як бачимо, для всіх λ^* максимум температури $\bar{T}_1(y_3)$ знаходиться на включенні ($y_3 = 0$), зі збільшенням λ^* температура в тілі знижується, а для $\lambda^* = 1$ (однорідне тіло) криві на рис. 4 і 5 однакові.

Температуру в центрі включення визначимо за точною формулою (22)

$$T_1^T(0) = \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \left[1 + \kappa_1 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon^2}} - \frac{2}{\varepsilon} \right) \right] \quad (24)$$

і наближеною з урахуванням виразу (9) для регулярного ядра:

$$T_1^H(0) = \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \left[1 + \frac{\kappa_1 \varepsilon}{4} \left(1 - \frac{0.3\varepsilon^2}{8} \right) \right]. \quad (25)$$

У таблиці наведено точне $T_1^T = T_1^T(0)\lambda_1/w_0 a$ (формула (24)) і наближене $T_1^H = T_1^H(0)\lambda_1/w_0 a$ (формула (25)) значення температури в центрі паралельного до межі поділу тіла включення залежно від його віддалі до цієї межі h/a і за різних значень $\lambda^* = \lambda_2/\lambda_1$.

λ^*	T_1	h/a								
		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0	5.0
0	T_1^T	0.95	0.91	0.83	0.78	0.74	0.71	0.64	0.62	0.52
	T_1^H	—	—	—	0.74	0.74	0.71	0.64	0.62	0.52
0.5	T_1^T	0.65	0.64	0.61	0.59	0.58	0.57	0.55	0.54	0.51
	T_1^H	—	—	—	0.58	0.58	0.57	0.55	0.54	0.51
2.0	T_1^T	0.35	0.36	0.39	0.44	0.42	0.43	0.45	0.46	0.49
	T_1^H	—	—	—	0.45	0.42	0.43	0.45	0.46	0.49
5.0	T_1^T	0.20	0.23	0.27	0.31	0.34	0.36	0.40	0.42	0.48
	T_1^H	—	—	—	0.34	0.34	0.36	0.40	0.42	0.48
10.0	T_1^T	0.13	0.16	0.22	0.27	0.30	0.33	0.38	0.40	0.48
	T_1^H	—	—	—	0.30	0.30	0.33	0.38	0.40	0.48

Із таблиці видно, що при $h/a \geq 0.3$ для всіх значень λ^* формула (25) дає практично точні результати, а при $h/a > 5$ межа поділу тіла не впливає на розподіл температури у включенні. З наближенням включення до теплоізолюваної межі ($\lambda^* = 0$) температура на ньому подвоюється ($h/a = 0.05$) порівняно з безмежним тілом ($h/a = 5.0$).

Висновки. Розглянуто безмежне тіло, складене з двох ідеально контактуючих півпросторів, в одному з яких розташоване паралельно або перпендикулярно до межі поділу тонке дискове теплоактивне включення, на якому задані температура або тепловий потік. З використанням гармонічного потенціалу простого шару задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язано аналітично шляхом заміни регулярних ядер виродженими. Показано, що у граничних випадках ($\lambda_2 \rightarrow 0$ або $\lambda_2 \rightarrow \infty$) вирази для температури збігаються з наведеними у праці [5] виразами для півпростору з теплоізолюваною межею або нульовою температурою на ній. Досліджено розподіл температури на осі симетрії паралельного до межі поділу тіла включення. Якщо коефіцієнт теплопровідності верхнього півпростору більший, ніж нижнього, то температура в складеному тілі нижча, ніж в однорідному, і навпаки.

1. Власов Н. М., Федик И. И. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – М.: ЦНИИАтоминформ, 2001. – 208 с.
2. Кім Г. С., Сушко О. П. Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 46–54.
3. Кім Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с.
4. Кім Г. С. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 120–128.
5. Кім Г. С., Сушко О. П. Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
6. Кім Г. С., Сушко О. П. Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 2. – С. 45–52.
7. Процюк Б. В. Функції Гріна тривимірних статичних задач термопружності для кусково-однорідного простору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 36–47.
8. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. думка, 1993. – 253 с.
9. Mossakowski J. Thermal stresses in an elastic space with discontinuous physical properties // Arch. Mech. Stosow. – 1958. – № 10. – P. 243–258.

ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

С использованием гармонического потенциала простого слоя решены задачи стационарной теплопроводности для кусочно-однородного тела, составленного из двух идеально контактирующих полупространств, в одном из которых содержится параллельное или перпендикулярное к границе раздела теплоактивное дисковое включение (на котором заданы температура или тепловой поток). Задачи сведены к интегральным уравнениям с сингулярными и регулярными ядрами. При определенном расстоянии центра кругового включения от границы раздела материалов регулярные ядра заменены вырожденными и получены точные решения уравнений, правые части которых полиномы второй степени.

STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR PIECEWISE UNIFORM SPACE WITH HEAT EMISSION IN CIRCULAR DOMAIN

Using the harmonic simple layer potential, stationary heat conduction problems for a piecewise-homogenous body formed by two ideally contacting half-spaces with thermally active disk inclusion parallel or perpendicular to its boundary in one of them (on which temperature or heat flow is prescribed) are solved. The problems are reduced to integral equations with singular and regular kernels. At certain distance of the circular inclusion center from the materials boundary the regular kernels are replaced by the degenerated ones and then the exact solutions of equations, the right-hand parts of which are polynomials of the second degree, are obtained.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів