УДК 517.956

І. Д. Пукальський

НЕЛОКАЛЬНА ПАРАБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено коректну розв'язність параболічної задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку. Одержаний результат використано для дослідження задач оптимального керування із внутрішнім і фінальним керуванням. Критерій якості задано як суму об'ємного та поверхневого інтегралів.

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються задачами з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними, виникає під час моделювання багатьох фізичних явищ. Вивченню задач оптимального керування з різними критеріями якості присвячені праці [3–5, 7, 8, 15–19].

Дослідження крайових задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними стимулювали різні обставини, зокрема, розв'язання обернених задач для рівнянь теплопровідності [2], задач із теорії фізики плазми [1]. Нелокальні крайові задачі розв'язували у працях [1, 2, 9–12].

У цій статті вивчено параболічну задачу з інтегральною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку. У просторах гельдерових функцій зі степеневою вагою встановлено коректну розв'язність сформульованої задачі. Одержаний результат використано для дослідження задач оптимального керування. Критерій якості вибрано як суму об'ємного і поверхневого інтегралів.

Формулювання задачі та основні обмеження. Нехай Ω – деяка обмежена область простору $\mathbf{R}^n$, $\dim \Omega \le n-1$, t_0, T – фіксовані додатні числа, $t_0 < T$. Розглянемо в області $\Pi = (0,T] \times \mathbf{R}^n$ задачу знаходження функцій (u,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{F}_1(t,x;u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x))\,dx + \\ + \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{F}_2(x;u(T,x;p(T,x),q(x)),q(x))\,dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V = \{p \in C^{\alpha}(\Pi) \mid p_1(t,x) \le p(t,x) \le \le p_2(t,x); q \in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n) \mid q_1(x) \le q(x) \le q_2(x)\}$, із яких функція $u(t,x;p(t,x),q(x))$ задовольняє при $(t,x) \in \Pi^{(0)} = \Pi \setminus \Pi_{(0)}$, $\Pi_{(0)} = \{((t,x) \in \Pi \mid x \in \mathbf{R}^n, t = t^{(0)}) \times \times \mathbf{U}\,((t,x) \in \Pi \mid x \in \Omega, t \in [0,T))\}$, рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{ij=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u = \\ = f(t,x,p(t,x)) \tag{2}$$

і нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0,x;p(0,x),q(x)) + \int_0^T a(\tau,x)u(\tau,x;p(\tau,x),q(x))\,d\tau = \varphi(x;q(x)). \tag{3}$$

Нехай D – довільна замкнена область простору $\mathbf{R}^n$ з межею ∂D, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\dim \bar{D} = n$; $\bar{\Omega} \subset D$; $\bar{Q} = [0,T) \times \bar{D}$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, – точки із $\bar{Q}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots x_i^{(1)}, \ldots, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$. Позначимо через $\rho(x)$ відстань від $x \in D \setminus \bar{\Omega}$ до $\bar{\Omega}$; $s_1(a^{(1)}; t) = |t - t_0|^{a^{(1)}}$ при $|t - t_0| \le 1$, $t \in [0, T)$; $s_1(a^{(1)}; t) = 1$ при $|t - t_0| \ge 1$; $s_2(a^{(2)}; x) = \rho^{a^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \le 1$, $x \in \bar{D} \setminus \bar{\Omega}$; $s_2(a^{(2)}; x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$; $s(a; P) = s_1(a^{(1)}; t) s_2(a^{(2)}; x)$, $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$, $P(t,x) \in Q \cap \Pi^{(0)}$. Покладемо $(k, \mu_k^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_{k_i}^{(\nu)}$, $s((k, \gamma - \beta); P) = s_1((k, \gamma^{(1)} - \beta^{(1)}); t) s_2((k, \gamma^{(2)} - \beta^{(2)}); x)$, $(k, \gamma^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{n} k_i (\gamma^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})$, $\gamma^{(\nu)}$ – $\mathrm{const} \ge 0$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\mu_{k_i}^{(\nu)} \ge 0$.

Нехай ℓ – деяке дійсне число. Означимо функціональні простори, в яких вивчатимемо задачу (1)–(3):

- $C^{\ell}(\gamma; \beta; a; \Pi)$ – множина функцій u: $(t,x) \in \bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q \cap \Pi^{(0)}$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2j + |k| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u; \gamma; \beta; a; \Pi\|_{\ell} = \|u; \gamma; \beta; a; \Pi\|_{[\ell]} + \langle u; \gamma; \beta; a; \Pi \rangle_{\ell},$$

де, наприклад,

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_0 = \sup_{\bar{Q}} |u| \equiv \|u; \Pi\|_0,$$

$$\langle u; \gamma; \beta; a; \Pi \rangle_{\ell} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\sup_{(P_1, H_i) \subset \bar{Q}} \sum_{2j + |k| = [\ell]} s((2j + a)\gamma + k(\gamma - \beta) + \\ + \{\ell\}(\gamma - \beta_i); \tilde{P}_1) \big| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \big|^{-\{\ell\}} \big| \partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(H_i) \big| \Big] + \\ + \sup_{(P_2, H_i) \subset \bar{Q}} \sum_{2j + |k| = [\ell]} \big| t^{(1)} - t^{(2)} \big|^{-\{\ell/2\}} \times \\ \times \big| \partial_t^j \partial_x^k u(H_i) - \partial_t^j \partial_x^k u(P_2) \big| s((2j + a + \{\ell\})\gamma + (k, \gamma - \beta); \tilde{P}_2);$$

тут позначено $s(a; \tilde{P}_\nu) = \min\{s(a; P_\nu), s(a; H_i)\}$;

- $C^{\ell}(\mu_j; \Pi)$ – множина функцій $v_j: (t,x) \in \bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\bar{Q} \cap \Pi^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k v_j$, $|k| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$|||v_j; \mu_j; \Pi|||_{\ell} = |||v_j; \mu_j; \Pi|||_{[\ell]} + \langle\langle v_j; \mu_j \rangle\rangle_{\ell},$$

де, наприклад,

$$|||v_j; \mu_j; \Pi|||_{[\ell]} = \sum_{|k| \le [\ell]} \sup_{P \in \bar{Q}} \big(s((k, \mu_j) + \delta_k \mu_0 + |k|; P) \big| \partial_x^k v_j(P) \big| \big),$$

$\mu_0^{(\nu)}$ – $\mathrm{const} \ge 0$, $\delta_k = 1$ при $|k| = 0$; $\delta_k = 0$ при $k \ne 0$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними такі умови:

1°. Коефіцієнти $A_i \in C^{\alpha}(\mu_i;\Pi)$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $A_0 \le K < \infty$, K – const, $A_{ij} \in C^{\alpha}(\beta_i+\beta_j;\Pi)$ і для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i+\beta_j;P)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2, \tag{4}$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі.

2°. Функції $p_\nu \in C^{\alpha}(\Pi)$, $q_\nu \in C^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$, $\nu \in \{1,2\}$, $a(\tau,x) \in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$, $\int_0^T |a(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}\,d\tau \le \lambda_0 < 1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < -A_0(t,x)$, $f(t,x;p(t,x)) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;\Pi)$, $\varphi(x;q(x)) \in C^{2+\alpha}(\bar\gamma;\bar\beta;0;\mathbf{R}^n)$, $\bar\gamma = (0,\gamma^{(2)})$, $\bar\beta=(0,\beta^{(2)})$.

3°. Функції $F_1(t,x;u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x))$, $f(t,x;p(t,x))$, $\varphi(x;q(x))$, $F_2(x;u(T,x;p(T,x),q(x)),q(x))$ як функції змінних (t,x) та x належать відповідно до просторів $C^{\alpha}(\Pi)$, $C^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$ і мають гельдерові похідні другого порядку за (u,p,q), неперервні як функції змінних (t,x) та x.

Правильною є

Теорема 1. *Нехай виконані умови 1°, 2°. Тоді для довільних* $(p,q)\in V$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *з простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le c\left(\|\varphi;\bar\gamma;\bar\beta;0;\mathbf{R}^n\|_{2+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_{\alpha}\right). \tag{5}$$

Для дослідження задачі (2), (3) встановимо спочатку коректну розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами.

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $\Pi_m = \Pi \cap \{(t,x)\in\Pi \mid s_1(1;t) \ge m_1^{-1}, s_2(1;x) \ge m_2^{-1}, m=(m_1,m_2), m_1 \ge 1, m_2 \ge 1\}$ – послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $\Pi^{(0)}$. Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right]u_m = f_m(t,x), \tag{6}$$

які задовольняють нелокальну умову

$$u_m(0,x) + \int_0^T a(\tau,x)u_m(\tau,x)\,d\tau = \varphi_m(x). \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, φ_m при $(t,x)\in\Pi_m$ збігаються з A_{ij}, A_i, A_0 і f, φ відповідно, а при $(t,x)\in\Pi\setminus\Pi_m$ є продовженнями зі збереженням норми і гладкості [13, с. 82].

Встановимо оцінку розв'язків допоміжних задач Коші. Розглянемо задачу Коші

$$(L_1-\lambda)v_m = f_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{8}$$

$$v_m(0,x) = \varphi_m(x), \tag{9}$$

де λ задовольняє умову *2*° і $v_m(t,x) = u_m(t,x)e^{\lambda t}$.

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай* v_m *– класичний розв'язок задачі* (8), (9) *в області* Π *і виконані умови 1°, 2°. Тоді для* v_m *правильною є нерівність*

$$|v_m| \le \max\{\|\varphi_m, \mathbf{R}^n\|_0, \|f_m e^{\lambda t}(-\lambda - a_0)^{-1}, \Pi\|_0\}.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо область $Q = \{(t,x) \in \Pi \mid |x| \le R_0,\ 0 \le t \le \le T,\ R_0$ – довільне число.$\}$. Можливі такі випадки: (*i*) v_m недодатне в $\bar{Q}$; (*ii*) найбільше додатне значення досягається при $t = 0$, або при $|x| = R_0$, або в точці $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q$.

У випадку (*i*) маємо $\sup\limits_{\bar{Q}} v_m(t,x) \le 0$. У випадку (*ii*) $\sup\limits_{\bar{Q}} v_m(t,x) = = \sup\limits_{|x| \le R_0} v_m(0,x) = v_m(0,x^{(0)})$. Тоді згідно з умовою (9) $v_m(0,x^{(0)}) = \varphi_m(x^{(0)})$.

Отже,

$$v_m(0,x^{(0)}) = \max\{\max_{|x| \le R_0} \varphi_m(x), \max_{|x| = R_0} v_m(t,x)\}. \tag{10}$$

Нехай $\max v_m(t,x) = v_m(P_1)$, $P_1 \in Q$. У точці P_1 задовольняється рівняння (8) і виконуються співвідношення

$$\partial_t v_m(P_1) \ge 0, \quad \partial_{x_i} v_m(P_1) = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P_1) \le 0. \tag{11}$$

Остання нерівність правильна, оскільки в точці максимуму недодатні другі похідні $\partial_{y_i}\partial_{y_j} v_m$ за будь-яким напрямком

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} s(\beta_i; P_1)(x_i - x_i^{(1)}), \qquad \det\|\alpha_{ki}\| \ne 0,$$

а для лівої частини третього зі співвідношень (11) маємо:

$$\sum_{\mathbf{l},k=1}^{n} a_{\mathbf{l}k}(P_1)\partial_{x_\mathbf{l}}\partial_{x_k} v_m(P_1) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{\mathbf{l},k=1}^{n} s(\beta_\mathbf{l} + \beta_k; P_1) a_{\mathbf{l}k}(P_1)\alpha_{\mathbf{l}i}\alpha_{kj}\right)\partial_{y_i}\partial_{y_j} v_m(P_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial_{y_i}\partial_{y_i} v_m < 0,$$

де λ_1, $\mathbf{K}$, λ_n – характеристичні числа квадратичної форми, додатні згідно з обмеженням *1*°.

З урахуванням (11) і рівняння (8) у точці P_1 правильна нерівність

$$v_m(P_1) \le f_m(P_1)e^{\lambda t}(-a_0(P_1) - \lambda)^{-1}.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого значення функції v_m, маємо:

$$v_m \ge \min\{0, \min_{|x| \le R_0} \varphi_m, \min_{\bar{Q}}(f_n e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1}), \min_{|x| = R_0} v_m\}.$$

Отже,

$$|v_m| \le \max\{\max_{|x| \le R_0} |\varphi_m|, \max_{\bar{Q}} \left| f_m e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1} \right|, \max_{|x| = R_0} |v_m|\}. \tag{12}$$

Нехай розв'язок $v_m(t,x)$ є неперервним в області $Q_1 = \{(t,x) \in \Pi \mid |x| < < \infty, 0 \le t \le T\}$ і його модуль не перевищує деякого числа M_0. Розглянемо в області Q, $Q_1 \subset Q$, функцію

$$W(t,x) = v_m(t,x) - M_1 + \frac{M_0}{R_0^2}[s(2\gamma; P)|x|^2 + C_3 t],$$

де

$$M_1 = \left\|\varphi_m ; \mathbf{R}^n\right\|_0 + \left\| f_m e^{\lambda t}(-\lambda - a_0)^{-1}; \Pi\right\|_0 .$$

Знайдемо значення:

$$(L_1 - \lambda)W = f_m(t,x)e^{\lambda t} + (a_0(t,x)+\lambda)M_1 - \frac{M_0}{R_0^2}\big[(L_1-\lambda)(s(2\gamma;P)|x|^2) +$$

$$+ C_3 - (a_0(t,x)+\lambda)C_3 t\big].$$

Виберемо число C_3 так, щоб вираз, який стоїть біля $\dfrac{M_0}{R_0^2}$, був невід'ємним. Тоді $(L_1-\lambda)W \le 0$. Крім того, на бічній межі і нижній основі циліндра Q функція $W(t,x) \le 0$.

Враховуючи нерівність (12), знаходимо, що $W(t,x) \le 0$, $(t,x) \in Q$.

Візьмемо довільну точку $(t^{(3)}, x^{(3)})$ в області $0 \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}^n$. Тоді $W(t^{(3)}, x^{(3)}) \le 0$ при $\left|x^{(3)}\right| \le R_0$. Переходячи до границі при $R_0 \to \infty$, одержимо оцінку

$$v_m(t^{(3)}, x^{(3)}) \le M_1 .$$

Для оцінки v_m знизу виберемо функцію

$$W_1(t,x) = v_m(t,x) + M_1 + \frac{M_0}{R_0^2}\big[s(2\gamma;P)|x|^2 + C_3 t\big].$$

Оскільки $(L_1-\lambda)W_1 \ge 0$ і на нижній основі та бічній межі Q $W_1(t,x) \ge 0$, тому $W_1(t,x) \ge 0$ при $(t,x) \in \bar{Q}$. Спрямовуючи $R_0 \to \infty$, одержуємо $v_m(t,x) \ge -M_1$.

Отже,

$$|v_m(t,x)| \le M_1 .$$

Позначимо через $Z_m(t,x,\tau,\xi)$ фундаментальний розв'язок задачі Коші із [14]:

$$(L_1-\lambda)v_m = 0, \qquad v_m(0,x) = 1. \tag{13}$$

Враховуючи теорему 2, маємо

Зауваження. Розв'язок задачі Коші (13) задовольняє нерівність

$$0 \le \int_{\mathbf{R}^n} Z_m(t,x,0,\xi)\, d\xi \le 1,$$

де

$$Z_m(t,x,\tau,\xi) \ge 0 .$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 1°, 2°, то існує єдиний розв'язок задачі* (6), (7), *для якого справджується оцінка*

$$|u_m| \le c\left(\left\|\varphi_m ; \mathbf{R}^n\right\|_0 + \| f_m ; \Pi\|_0\right). \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. В задачі (6), (7) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda}$, де λ задовольняє умову *2°*, одержимо задачу знаходження розв'язків рівняння (8), які задовольняють нелокальну умову

$$v_m(0,x) + \int_0^T a(\tau,x) v_m(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \varphi_m(x). \tag{15}$$

Розв'язок задачі (8), (15) шукаємо у вигляді

$$v_m(t,x) = \omega_m(t,x) + \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(t,x,0,\xi) v_m(0,\xi)\, d\xi\,, \tag{16}$$

де $\omega_m(t,x)$ – розв'язок задачі Коші (8), (9).

Задовольняючи нелокальну умову (15), маємо:

$$v_m(0,x) + \int\limits_0^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,\xi) v_m(0,\xi)\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^T a(\tau,x)\omega_m(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \equiv F_1(x)\,. \tag{17}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (17) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_m^{(k)}(0,x) + \int\limits_0^T A(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,\xi) v_m^{(k-1)}(0,\xi)\, d\xi = F_1(x)\,,$$

$$v_m^{(0)}(0,x) = F_1(x), \qquad k \in \{1, 2, \mathbf{K}\}\,.$$

Оскільки $Z_m(t,x,\tau,\xi) \geq 0$ і $\int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(t,x,0,\xi)\, d\xi \leq 1$, то

$$\int\limits_0^T |a(\tau,x)|\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,\xi)\, d\xi \leq \lambda_0 < 1\,.$$

Оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$\left| v_m^{(k)}(0,x) - v_m^{(k-1)}(0,x) \right| \leq \lambda_0^k \left\| F_1; \mathbf{R}^n \right\|_0\,.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння зображається функціональним рядом

$$v_m(0,x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (v_m^{(k)}(0,x) - v_m^{(k-1)}(0,x))$$

і для нього справджується оцінка

$$|\, v_m(0,x)| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} \left\| F_1; \mathbf{R}^n \right\|_0\,. \tag{18}$$

Запишемо рівняння (17) у вигляді

$$v_m(0,x) = F_1(x) - \int\limits_0^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,\xi) v_m(0,\xi)\, d\xi\,. \tag{19}$$

Використовуючи властивості фундаментального розв'язку $Z_m(t,x,\tau,\xi)$, умови, накладені на коефіцієнти $a(\tau,x) \in C^{2+\alpha}(\Pi)$, функції $f_m \in C^{\alpha}(\Pi)$, $\varphi_m \in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$ і рівність (19), для кожного фіксованого (m_1, m_2) одержуємо, що $v_m(0,x) \in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$. Враховуючи зображення (16), маємо: $v_m(t,x) \in$ $\in C^{2+\alpha}(\Pi)$.

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (17) у вигляді

$$v_m(0,x) = F_1(x) + \int\limits_{\mathbf{R}^n} G_m(x,y) F_1(y)\, dy\,, \tag{20}$$

де $G_m(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$G_m(x,\xi) = \int\limits_0^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau} Z_m(\tau,x,0,\xi)\, d\tau + \int\limits_0^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,y) G_m(y,\xi)\, dy\,,$$

звідки випливає оцінка

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}^n} G_m(x,\xi)\, d\xi \right| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Підставивши в рівності (20) замість $F_1(y)$ значення

$$F_1(x) = \int\limits_0^T a(\tau,y) e^{-\lambda\tau} \Big[\int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(\tau,x,\beta,\xi) f_m(\beta,\xi) e^{\lambda\beta} d\xi \Big] d\tau$$

і змінивши порядок інтегрування, отримаємо:

$$v_m(0,x) = \int\limits_0^T d\beta \int\limits_{\mathbf{R}^n} E_m(T,x,\beta,\xi) f_m(\beta,\xi) e^{-\lambda\beta}\, d\xi + \int\limits_{\mathbf{R}^n} E_m(T,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi, \qquad (21)$$

де

$$E_m(T,x,\beta,\xi) = -\int\limits_\beta^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau} Z_m(\tau,x,0,\xi)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_\beta^T a(\tau,x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} G_m(x,y) Z_m(\tau,y,0,\xi)\, dy.$$

Підставивши (21) у поверхневий інтеграл рівності (16) і помінявши порядок інтегрування, одержимо зображення

$$v_m(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^n} \Gamma_m(T,t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}^n} [Z_m(t,x,0,\xi) + \Gamma_m(T,t,x,0,\xi)]\varphi_m(\xi)\, d\xi, \qquad (22)$$

де

$$\Gamma_m(T,t,x,\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} Z_m(t,x,0,y) E_m(T,y,\tau,\xi)\, dy.$$

Знайдемо оцінки похідних розв'язку $v_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(\Pi)$ норму $\|v_m;\gamma;\beta;a;\Pi\|_{2+\alpha}$, еквівалентну для кожного фіксованого (m_1,m_2) гельдеровій нормі, яку визначаємо, як і норму $\|u;\gamma;\beta;a;\Pi\|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(a^{(1)},t)$, $d_2(a^{(2)},x)$, де $d_1(a^{(1)},t) = \max\{s_1(a^{(1)};t), m_1^{-a^{(1)}}\}$ при $a^{(1)} \ge 0$ і $d_1(a^{(1)},t) = \min\{s_1(a^{(1)};t) m_1^{-a^{(1)}}\}$ при $a^{(1)} < 0$; $d_2(a^{(2)},x) = \max\{s_2(a^{(2)};x), m_2^{-a^{(2)}}\}$ при $a^{(2)} \ge 0$ і $d_2(a^{(2)},x) = \min\{s_2(a^{(2)};x), m_2^{-a^{(2)}}\}$ при $a^{(2)} < 0$, $d(a;P) = d_1(a^{(1)};t) d_2(a^{(2)};x)$.

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* 1°, 2°. *Тоді для розв'язку задачі* (8), (15) *справджується оцінка*

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_m;\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n\|_{2+\alpha} + \|v_m;\Pi\|_0). \qquad (23)$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [11], маємо:

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\langle v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi\|_0,$$

де ε – довільне фіксоване число із $(0,1)$.

Тому досить оцінити півнорму $\langle v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{2+\alpha}$. Із означення норми випливає існування в Π точок P_1, B_k, P_2, для яких справджується одна з нерівностей

$$\mu\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha}\le E_k,\qquad k\in\{1,2,3,4\},\tag{24}$$

$$E_1=\sum_{i,j,l=1}^{n}d(2\gamma-\beta_i-\beta_l+\alpha(\gamma-\beta_j);\tilde P_1)\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$
$$\times\left|\partial_{x_i}\partial_{x_l}v_m(P_1)-\partial_{x_i}\partial_{x_l}v_m(B_j)\right|,$$

$$E_2=\sum_{i,j,l=1}^{n}d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha\gamma;\tilde P_2)\left|t_1-t_2\right|^{-\alpha/2}\times$$
$$\times\left|\partial_{x_i}\partial_{x_l}v_m(B_j)-\partial_{x_i}\partial_{x_l}v_m(P_2)\right|,$$

$$E_3=\sum_{j=1}^{n}d(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_j);\tilde P_1)\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t v_m(P_1)-\partial_t v_m(B_j)\right|,$$

$$E_4=\sum_{j=1}^{n}d(2\gamma+\alpha\gamma;\tilde P_2)\left|t_1-t_2\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t v_m(B_j)-\partial_t v_m(P_2)\right|,$$

$$\mu\in\left(\frac{1+\lambda_0}{2},1\right),\qquad d(a;\tilde P_\nu)=\min\{d(a;P_\nu),d(a;B_j)\},\qquad \nu\in\{1,2\}.$$

Розглянемо два випадки: $\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right|\le n^{-1}d(\gamma-\beta_j;\tilde P_\nu)\frac{\rho}{4}\equiv T_2$ і $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le$ $\le d(2\gamma;\tilde P_\nu)\frac{\rho^2}{16}\equiv T_1$, де ρ – довільна стала із $(0,1)$. Вважаємо, що $\tilde P_\nu=P_1$. Запишемо задачу (8), (15) у вигляді

$$(L_2v_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]v_m=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(P)-a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(P)\partial_{x_i}v_m+(a_0(P)-\lambda)v_m+f_m(P)e^{\lambda t}\equiv F_2(P),\tag{25}$$

$$v_m(0,x)=\varphi_m(x)-\int_0^T a(\tau,x)v_m(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\,d\tau\equiv\psi_m(x).\tag{26}$$

Нехай V_r – куб з центром у точці P_1, $V_r=\{(t,x)\in\Pi,0\le\left|t-t^{(1)}\right|\le r^2T_1$, $\left|x_i-x_i^{(1)}\right|\le rT_2, i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$. Виконавши в задачі (25), (26) заміну $v_m(t,x)=\omega_m(t,z)$, $z_i=d(\beta_i;P_1)x_i$, одержимо:

$$(L_3\omega_m)(t,x)=\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]\omega_m\equiv F_2(t,Z),$$

$$\omega_m(0,x)=\psi_m(Z),$$

де $Z_i=d^{-1}(\beta_i;P_1)z_i$.

Позначимо $Z_i^{(1)}=d(\beta_i;P_1)x_i^{(1)}$ і

$$H_r=\{(t,x):\left|t-t^{(1)}\right|\le r^2T_1,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le rn^{-1}d(\gamma;P_1)\frac{\rho}{4}, i\in\{1,2,\ldots,n\}\}.$$

Виберемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,z)=\begin{cases}1, & (t,z)\in H_{1/4}, \quad 0\le \eta(t,z)\le 1,\\ 0, & (t,z)\not\subset H_{3/4}, \quad \left|\partial_t^k\partial_z^j\eta\right|\le c_{kj}d^{-1}((2k+|j|)\gamma;P_1).\end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z)=\omega_m(t,z)\eta(t,z)$ задовольняє задачу Коші

$$L_3W_m=\omega_m\partial_t\eta-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1)[\partial_{z_i}\omega_m\partial_{z_j}\eta+\partial_{z_j}\omega_m\partial_{z_i}\eta]+$$

$$+F_2(t,Z)\eta(t,z)\equiv F_3(t,z),$$

$$W_m(0,z)=\psi_m(Z)\eta(0,z)=\psi_m^{(1)}(t,z). \tag{27}$$

На підставі теореми 5.1 із праці [6, с. 364] для розв'язку задачі (27) і довільних точок M_1 і $M_2\in H_{1/4}$ отримуємо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^k\partial_z^j\omega_m(M_1)-\partial_t^k\partial_z^j\omega_m(M_2)\right|\le$$

$$\le c(\left|F_3\right|_{C^\alpha(H_{3/4})}+\left|\psi_m^{(1)}\right|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}\,\mathbf{I}\,(t=0))}), \tag{28}$$

де $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, знаходимо:

$$\left|F_3\right|_{C^\alpha(H_{3/4})}\le cd(-(2+\alpha)\gamma;P_1)(\left\|F_2;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}\right\|_\alpha+\left\|\omega_m;\gamma;0;0;H_{3/4}\right\|_2+\left\|\omega_m;H_{3/4}\right\|_0),$$

$$\left|\psi_m^{(1)}\right|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}\,\mathbf{I}\,(t=0))}\le cd(-(2+\alpha)\gamma;P_1)\left\|\psi_m;\gamma;0;0;H_{3/4}\ \mathbf{I}\ (t=0)\right\|_{2+\alpha}. \tag{29}$$

Підставляючи (29) в (28) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо:

$$E_k\le c(\left\|F_2;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}\right\|_\alpha+\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\right\|_2+\left\|v_m;V_{3/4}\right\|_0+$$

$$+\left\|\psi_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\ \mathbf{I}\ (t=0)\right\|_{2+\alpha}). \tag{30}$$

Знайдемо оцінки норм виразів F_2 і ψ_m. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка. Оцінимо доданки виразу F_2. Наприклад,

$$\left\langle a_0v_n;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}\right\rangle_\alpha\le\sum_{j=1}^n\sup_{\{A_1,B_j,A_2\}\subset V_{3/4}}\Big[\left|v_m\right|\{\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\times$$

$$\times d((2+\alpha)\gamma;\breve{A}_1)\left|a_0(A_2)-a_0(B_j)\right|+$$

$$+\sum_{\mathbf{l}=1}^n d(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_{\mathbf{l}});\breve{A}_2)\left|\xi_{\mathbf{l}}^{(1)}-\xi_{\mathbf{l}}^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|a_0(A_2)-a_0(B_{\mathbf{l}})\right|\}\Big]+$$

$$+\sum_{j=1}^n\sup_{\{A_1,B_j,A_2\}\subset V_{3/4}}d(2\gamma;\breve{A}_2)\left|a_0(A_2)\right|\{\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|v_m(A_2)-v_m(B_j)\right|d(\alpha\gamma;\breve{A}_2)+$$

$$+\sum_{\mathbf{l}=1}^n d(\alpha(\gamma-\beta_{\mathbf{l}});\breve{A}_1)\left|\xi_{\mathbf{l}}^{(1)}-\xi_{\mathbf{l}}^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|v_m(A_1)-v_m(B_{\mathbf{l}})\right|\}\le c(\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\right\|_1+\left\|v_m;V_{3/4}\right\|_0).$$

Аналогічно одержуємо оцінки інших доданків функції F_2.

Отже, для $\left\|F_2;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}\right\|_\alpha$ дістанемо оцінку

$$\left\|F_2;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}\right\|_\alpha\le c(\left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\right\|_\alpha+\left\|v_m;\Pi\right\|_0)+\varepsilon_1\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\right\|_{2+\alpha} \tag{31}$$

де $\varepsilon_1=h^2\rho^2+\varepsilon^\alpha+n\rho$.

Повторюючи наведені вище міркування, знаходимо:

$$\left\|\psi_m;\gamma;0;0;H_{3/4}\ \mathbf{I}\ (t=0)\right\|_{2+\alpha} \le c\left\|\varphi_m;\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n\right\|_{2+\alpha} +$$
$$+(\lambda_0+\varepsilon^\alpha)\left\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\right\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\left\|v_m;V_{3/4}\right\|_0. \qquad (32)$$

Підставляючи (31), (32) в нерівність (30), одержимо:

$$E_k \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi_m;\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n\right\|_{2+\alpha} + \|v_m;\Pi\|_0) +$$
$$+(\lambda_0+\varepsilon_1)\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha}. \qquad (33)$$

Якщо $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right| \ge T_2$, то, використовуючи інтерполяційні нерівності для $k\in\{1,3\}$, маємо:

$$E_k \le \varepsilon^\alpha \|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi\|_0. \qquad (34)$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \ge T_1$, то, застосовуючи інтерполяційні нерівності для $k\in\{2,4\}$, маємо:

$$E_k \le \varepsilon^\alpha \|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi\|_0. \qquad (35)$$

Скориставшись нерівностями (24), (30), (34), (35) і вибравши ρ і ε достатньо малими, одержуємо нерівність (23).

Доведення теореми 1. Враховуючи нерівність (18), зображення (19) і властивості фундаментального розв'язку $Z_m(t,x,\tau,\xi)$, маємо

$$\|v_m;\Pi\|_0 \le c(\|f_m;\Pi\|_0 + \left\|\varphi_m;\mathbf{R}^n\right\|_0). \qquad (36)$$

Підставляючи (36) в (23), одержуємо оцінку

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi;\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n\right\|_{2+\alpha}), \qquad (37)$$

права частина якої не залежить від m.

Крім того, послідовності $\{V_m^{(0)}=|v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}=d(\gamma-\beta_i;P)\left|\partial_{x_i}v_m(P)\right|\}$, $\{V_m^{(2)}=d(2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P)\right|\}$, $\{V_m^{(3)}=d(2\gamma;P)\left|\partial_t v_m(P)\right|\}$ рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні в будь-якій області $\bar{Q}\subset\Pi$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{V_{m(j)}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\bar{Q}$ до $V^{(\nu)}$, $\nu\in\{1,\mathbf{K},4\}$. Переходячи до границі при $j\to\infty$ у задачі (8), (15), одержуємо, що $u(t,x)=V^{(0)}e^{-\lambda t}$ – єдиний розв'язок задачі (2), (3), $u(t,x)\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$.

Теорема 5. *Якщо* $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і виконані умови 1°, 2°, то єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*:

$$u(t,x)=\int_\Pi \Gamma_1(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi;p(\tau,\xi)) + \int_{\mathbf{R}^n}\Gamma_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi,q(\xi)). \qquad (38)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\subset C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;\Pi)$, то для $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$ правильна нерівність $\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;0;\Pi\|_\alpha$. За умов теореми 1 для розв'язку задачі (2), (3) маємо:

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;0;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi;\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n\right\|_{2+\alpha}). \qquad (39)$$

Розглядаючи $u(t,x)$ для фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,\varphi)$ на нормованому просторі $C_\alpha = C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\,C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathbf{R}^n)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (39) згідно з теоремою Рісса, оскільки $C_\alpha \subset C(\Pi)$, можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(t,x;Z)$, яка визначає на σ-алгебрі підмножини Z множини Π, включаючи Π і всі її підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (39).

Задача оптимального керування. За обмеженнях *1°, 2°* для будь-яких $(p,q) \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (2), (3) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ і для нього правильна оцінка (5).

Позначимо:

$$G_m(T,t,x,0,\xi) = Z_m(t,x,0,\xi) + \Gamma_m(T,t,x,0,\xi),$$

$$\mu(\tau,\xi) = \int_\tau^T d\beta \int_{\mathbf{R}^n} Z_m(\beta,x,0,\xi) \frac{\partial F_1(\beta,x,u_m,p)}{\partial u} e^{-\lambda(\beta-\tau)}\, dx + \int_0^T d\beta \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_m(T,\beta,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_1(\beta,x,u_m,p)}{\partial u_m} e^{-\lambda(\beta-\tau)}\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} G_m(T,\tau,x,0,\xi) \frac{\partial F_2(x,u_m(T,x,p,q),q)}{\partial u_m}\, dx,$$

$$\lambda(\xi) = \int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} G_m(T,t,x,0,\xi) \frac{\partial F_1(t,x,u_m,p)}{\partial u}\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} G_m(T,T,x,0,\xi) \frac{\partial F_2(x,u_m,q)}{\partial u}\, dx,$$

$$H_1(\mu,u_m,p) = F_1(t,x,u;p) + \mu(t,x) f_m(t,x,p),$$

$$H_2(\lambda,u_m,q) = F_2(x,u;q) + \lambda(x)\varphi_m(x,q).$$

Для встановлення існування розв'язку задачі (1)–(3) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо в області Π задачу знаходження функцій (u_m,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{F}_1(t,x;u_m,p)\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{F}_2(x;u_m(T,x,p(T,x),q(x)),q(x))\, dx \qquad (40)$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V$, із яких u_m є розв'язком задачі

$$L_1 u_m = f_m(t,x,p(x)),$$

$$u_m(0,x;p(0,x),q(x)) + \int_0^T a(\tau,x) u_m(\tau,x;p(T,x,q(x)),q(x))\, d\tau = \varphi_m(x,q(x)). \qquad (41)$$

Правильними є такі теореми.

Теорема 6. *Якщо* $\partial_p H_1(\mu,u_m,p) > 0$ *і* $\partial_q H_2(\lambda,u_m,q) > 0$, *то оптимальним є керування* (p_2,q_2), *а оптимальним розв'язком задачі* (40), (41) *є* $u_m^{(0)}(t,x;p,q) = u_m(t,x;p_2,q_2)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu,u_m,p) < 0$ *і* $\partial_q H_2(\lambda,u_m,q) > 0$, *то оптимальним є керування* (p_1,q_2), *а оптимальним розв'язком задачі* (40), (41) *є* $u_m(t,x;p_1,q_2)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu,u_m,p) > 0$ *і* $\partial_q H_2(\lambda,u_m,q) < 0$, *то оптимальним є керування* (p_2,q_1), *а оптимальним розв'язком задачі* (40), (41) *є* $u_m(t,x;p_2,q_1)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu, u_m, p) < 0$ *і* $\partial_q H_2(\lambda, u_m, q) < 0$, *то оптимальним є керування* (p_1, q_1), *а оптимальним розв'язком задачі* (40), (41) *є* $u_m(t, x; p_1, q_1)$.

Якщо умови теореми 6 не виконуються, тоді справджується така теорема.

Теорема 7. *Для того, щоб керування* $(p^{(0)}, q^{(0)})$ *і відповідний розв'язок* $u_m^{(0)}(t, x; p^{(0)}, q^{(0)})$ *задачі* (41) *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

(***i***) *функція* $H_1(\mu, u_m, p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***ii***) *функція* $H_2(\lambda, u_m, q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***iii***) *для довільного вектора* $(e_1, e_2) \neq 0$ *і* $(t, x) \in \Pi$ *виконується нерівність*

$$\partial_{u_m}^2 \mathrm{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_1^2 + 2\partial_{p,u_m}^2 \mathrm{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_1 e_2 + \partial_p^2 \mathrm{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_2^2 > 0\,;$$

(***iv***) *для довільного вектора* $(\nu_1, \nu_2) \neq 0$ *і* $x \in \mathbf{R}^n$ *виконується нерівність*

$$\partial_{u_m}^2 \mathrm{F}_2(x; u_m^{(0)}, q^{(0)}) \nu_1^2 + 2\partial_{q,u_m}^2 \mathrm{F}_2(x; u_m^{(0)}, q^{(0)}) \nu_1 \nu_2 + \partial_q^2 \mathrm{F}_2(x; u_m^{(0)}, q^{(0)}) \nu_2^2 > 0\,.$$

Д о в е д е н н я теорем 6, 7 можна виконати за допомогою методики праці [12]. Переходячи до границі в задачі (40), (41) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$, одержимо оптимальний розв'язок задачі (1)–(3).

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – 185, № 4. – С. 739–740.
2. *Вабищевич П. Н.* Нелокальная параболическая задача и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, № 7. – С. 1193–1199.
3. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T управления упругими граничными силами на двух концах струны // Докл. РАН. – 2007. – 417, № 4. – С. 456–463.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., 23. – Providence, RI: AMS, 1968.
7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
8. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
10. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
12. *Пукальський І. Д.* Параболічна крайова задача і задача оптимального керування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 34–41.

    Те саме: *Pukalskyi I. D.* A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control // J. Math. Sci. – 2011. – 174, № 2. – P. 159–168.

13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equation of parabolic type. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1964.
14. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
15. *Lange H., Teismann H.* Controltability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state // Math. Meth. in Appl. Sci. – 2007. – 30, № 13. – P. 1483–1505.
16. *Majewski M.* On the existence of optimal solutions to an optimal control problem // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2006. – 126, № 3. – P. 635–651.
17. *Rösch A., Tröltzsch F.* Existence of regular Lagrange multipliers for a nonlinear elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – 45, № 2. – P. 548–564.
18. *Wang Gengsheng, Wang Lijuan, Yang Donghui.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – 45, № 2. – P. 532–547.
19. *Yanlei Kou, Shijin Ding.* Solutions of Ginzburg – Landau equations with weight and minimizes of the renormalized energy // Appl. Math. J. Chin. Univ. B. – 2007. – 22, № 1. – P. 48–60.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Установлена корректная разрешимость параболической задачи с интегральным условием по временной переменной для линейного дифференциального уравнения со степенными особенностями произвольного порядка. Полученный результат использован для исследования задач оптимального управления с внутренним и финальным управлением. Критерий качества задан суммой объемного и поверхностного интегралов.

NONLOCAL PARABOLIC PROBLEM AND OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR LINEAR EQUATIONS WITH DEGENERATION

Correct solvability of the parabolic problem with an integral condition for a time variable for linear differential equation with power peculiarities of an arbitrary order have been ascertained. The results of investigation are applied to optimal control problems in cases of integral and final control. Criterion of quality is represented as the sum of volume and surface integrals.

Чернів. нац. ун-т
імені Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
24.06.10