УДК 512.628.2

І. О. Мельник, М. Я. Комарницький

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ МОДУЛІ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ПЕРВИННИЙ СПЕКТР

Встановлено низку властивостей диференціально-мультиплікаційних модулів над комутативними кільцями. Досліджено первинні диференціальні та диференціально-первинні підмодулі в таких модулях і розкрито їх зв'язок з відповідними диференціальними ідеалами кільця. Розглянуто диференціально-первинний спектр диференціального модуля та вивчено деякі його топологічні властивості, відомі для звичайних кілець.

У замітці розглянуто комутативні кільця R з ненульовою одиницею 1 та унітарні модулі над ними.

Мультиплікаційні модулі та ідеали останнім часом інтенсивно досліджували різні автори [1, 2, 5, 9–12], і це далеко не повний перелік праць такого спрямування. Нагадаємо, що R-модуль M називають *мультиплікаційним* [2], якщо будь-який його підмодуль N має вигляд $N = IM$, де I – ідеал кільця R.

Нехай N і K – підмодулі R-модуля M. Надалі важливу роль відіграватиме ідеал $(N : K) = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}$. *Анулятором* R*-модуля* M називають ідеал $Ann(M) = (0 : M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$. Назвемо R-модуль M *точним*, якщо його анулятор $Ann(M)$ є нульовим ідеалом.

Надалі через R позначатимемо диференціальне кільце з диференціюванням δ, а через M – лівий диференціальний R-модуль з диференціюванням d, яке узгоджене з диференціюванням кільця δ [6, 7].

Для елемента $r \in R$ використовуватимемо такі позначення: $r^{(0)} = r$, $r' = \delta(r)$, $r'' = \delta(r')$, $r^{(n)} = \delta\left(r^{(n-1)}\right)$, де $n = 0,1,2,3\mathbf{K}$ [7]. Крім того, $r^{(\infty)} = \{r^{(n)} \mid n = 0,1,2,3\mathbf{K}\}$, $[r] = \left(r^{(\infty)}\right) = (r, r', r'', \mathbf{K})$. Аналогічні позначення вживатимемо також для елемента модуля $m \in M$: $m^{(0)} = m$, $m' = d(m)$, $m'' = d(m')$, $m^{(n)} = d\left(m^{(n-1)}\right)$, $n = 0,1,2,3\mathbf{K}$, $m^{(\infty)} = \{m^{(n)} \mid n = 0,1,2,3\mathbf{K}\}$, $[m] = \left(m^{(\infty)}\right) = (m, m', m'', \mathbf{K})$.

Диференціальний модуль M називають *диференціально-первинним*, якщо анулятор кожного його ненульового диференціального підмодуля збігається з анулятором цілого модуля (зауважимо, що ці ідеали диференціальні). По іншому можна ще сказати, що лівий диференціально-первинний диференціальний модуль є первинним модулем над кільцем лінійних диференціальних операторів з коефіцієнтами з диференціального кільця R.

Диференціальний підмодуль N лівого диференціального модуля M називатимемо *диференціально-первинним*, якщо диференціальний модуль M/N є диференціально-первинним. Якщо в кільці R всі структурні диференціювання є тривіальними, то ці означення дають добре відомі поняття первинного модуля та первинного підмодуля заданого модуля (див., наприклад, [4, 8]).

За диференціального регулярного модуля $_R R$ наведені вище означення дають відповідні диференціальні ідеали в кільці R. З їх допомогою вводять різні типи диференціального спектра диференціальних кілець (див. [3]). Узагальнюємо їх конструкції для диференціальних модулів.

Нехай R – комутативне кільце з ненульовою одиницею і диференціюванням $\delta : R \to R$ кільця R, M – унітарний модуль над диференціальним кільцем (R, δ) разом з модульним диференціюванням $d : M \to M$, узгодженим з кільцевим диференціюванням δ.

Лема 1. *Нехай N, K – диференціальні підмодулі диференціального R-модуля M. Множина $(N : K) = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}$ є диференціальним ідеалом диференціального кільця R.*

Доведення. Нехай $r \in (N : K)$. Тоді $rK \subseteq N$ і $d(rm) \in N$ для кожного $m \in K$. Крім того, $rd(m) \in N$. Отже, $\delta(r)m = d(rm) - rd(m) \in N$ для кожного $m \in M$. Таким чином, $\delta(r) \in (N : K)$ і лему доведено.

Назвемо диференціальний R-модуль M *диференціально-мультиплікаційним*, якщо для будь-якого диференціального підмодуля N в M існує такий диференціальний ідеал I кільця R, що $N = IM$. Нагадаємо, що модуль M є диференціально-мультиплікаційним тоді і тільки тоді, коли $N = (N : M)M$ для кожного диференціального підмодуля N R-модуля M. Кожний циклічний модуль, який є диференціальним, насправді є диференціально-мультиплікаційним.

З леми 1, зважаючи на результати [5], отримуємо теорему.

Теорема 1. *Для мультиплікаційного диференціального R-модуля M та його власного диференціального підмодуля N перелічені нижче твердження еквівалентні:*

1. *N – первинний диференціальний підмодуль диференціального модуля M;*
2. *$(N : M)$ – первинний диференціальний ідеал диференціального кільця R;*
3. *$N = PM$ для деякого простого диференціального ідеалу P кільця R, для якого $Ann(M) \subseteq P$.*

Теорема 2. *Диференціальний R-модуль M є диференціально-мультиплікаційним тоді і тільки тоді, коли* $\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N : M \right) M = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} (N : M) \right) M$ *для кожної непорожньої сім'ї A диференціальних підмодулів R-модуля M.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай M – диференціально-мультиплікаційний модуль, $\mathrm{A} \neq \varnothing$. Тоді за властивостями частки підмодулів у мультиплікаційному модулі маємо:

$$\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N : M \right) M = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} (N : M) \right) M.$$

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що $\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} N : M \right) M = \left(\bigcap_{N \in \mathrm{A}} (N : M) \right) M$ для кожної непорожньої сім'ї диференціальних підмодулів R-модуля M. Одноелементна сім'я $\{N\}$ (N – диференцніальний підмодуль) непорожня і $N = (N : M)M$. Отже, M – диференціально-мультиплікаційний модуль. Теорема доведена.

Нагадаємо, що диференціальний модуль M називають *диференціально-первинним*, якщо $Ann(N) = Ann(M)$ для кожного ненульового диференціального підмодуля N модуля M. Диференціальний підмодуль N лівого диференціального модуля M називатимемо *диференціально-первинним*, якщо диференціальний модуль M/N є диференціально-первинним.

Лема 2. *Якщо P – диференціально-первинний підмодуль диференціального R-модуля M, то $(P:M)$ – диференціально-простий ідеал диференціального кільця R.*

Доведення. Нехай P – диференціально-первинний власний підмодуль R-модуля M і нехай також для деяких $a, b \in R$ $a^{(k)}b^{(n)} \in (P:M)$ для всіх $k, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тоді $a^{(k)}b^{(n)}M \subseteq P$. З цього випливає, що $a^{(k)}b^{(n)}m \in P$ для всіх $m \in M$. Оскільки P – диференціально-первинний підмодуль в M, то зі співвідношення $a^{(k)}\left(b^{(n)}m\right) = a^{(k)}(bm)^{(s)} \in P$ випливає, що $a \in (P:M)$ або $bm \in P$. Отже, $b \in (P:M)$.

Теорема 3. *Диференціальний підмодуль P R-модуля M є диференціально-первинним тоді і тільки тоді, коли $(P:M)$ є диференціально-простим ідеалом диференціального кільця R і (0) є диференціально-первинним підмодулем фактор-модуля M/P над диференціальним кільцем $R/(P:M)$.*

Доведення. Доведемо, що (0) є диференціально-первинним ідеалом в M/P. Нехай $\bar{r} = r + (P:M) \in R/(P:M)$, $\bar{m} = m + P \in M/P$ і $\bar{r}^{(k)} \cdot \bar{m}^{(l)} \in (0)$ в M/P, тобто $\left(r^{(k)} + (P:M)\right)\left(m^{(l)} + P\right) \in (0)$. Тоді $\left(r^{(k)} + (P:M)\right)\left(m^{(l)} + P\right) = 0 + P$, звідки $r^{(k)}m^{(l)} + P = P$, а тому $r^{(k)}m^{(l)} \in P$. Оскільки P – первинний підмодуль, то звідси випливає, що $m \in P$ або $r \in (P:M)$, а тому або $\bar{m} = m + P \in (0)$, або $\bar{r} = r + (P:M) \in ((0):M/P)$, що і треба було довести.

Доведемо протилежне. Нехай $(P:M)$ – диференціально-простий ідеал диференціального кільця R, (0) – диференціально-первинний підмодуль $R/(P:M)$-модуля M/P, і нехай також $r^{(k)}m^{(l)} \in P$ для $r \in R$, $m \in M$, $k, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ і $r \notin (P:M)$. Зрозуміло, що в $R/(P:M)$-модулі M/P $r^{(k)}m^{(l)} + P = P = (0)$, а тому $\left(r^{(k)} + (P:M)\right)\left(m^{(l)} + P\right) = P = (0)$. Оскільки (0) – диференціально-первинний підмодуль в M/P, отримуємо, що $m + P \in (0)$ або $r + (P:M) \in ((0):M/P)$; останнє неможливе, зважаючи на припущення. Отже, $m \in P$. Таким чином, P – диференціально-первинний підмодуль R-модуля M. Теорема доведена.

Якщо P – диференціально-первинний підмодуль в M і $p = (P:M)$, то підмодуль P можна назвати p-*диференціально-первинним підмодулем* (або коротко – p-d-*первинним підмодулем*).

Позначимо через $Spec_d(M)$ множину всіх диференціально-первинних підмодулів диференціального модуля M, яку називатимемо його *диференціальним спектром.* Вважатимемо надалі, що розглядувані модулі задовольняють умову $Spec_d(M) \neq \varnothing$. Якщо $M = {}_R R$, отримуємо диференціальний спектр диференціального кільця R, який досліджували в праці [3].

Нехай N – диференціальний R-модуль, p – диференціально-первинний ідеал диференціального кільця R. Позначимо через $Spec_d^{p}(N) = \{K \in Spec_d(N) \mid (K:N) = p\}$ так званий диференціальний p-спектр диференціального модуля N.

Нехай P – диференціально-первинний підмодуль в M. Легко бачити, що якщо $Ann_d(M) \not\subset (P:M) = \mathfrak{p}$, то $Spec_d^{\mathfrak{p}}(P) = \varnothing$. А також, якщо для $\mathfrak{p} \in Spec_d(R)$ $\mathfrak{p}M = M$, то $Spec_d^{\mathfrak{p}}(P) = \varnothing$.

Твердження 1. *Якщо M – диференціальний R-модуль, N – його диференціальний підмодуль, $\mathfrak{p}$ – диференціально-первинний ідеал диференціального кільця R і $K \in Spec_d^{\mathfrak{p}}(M)$, то $K \cap N = N$ або $K \cap N \in Spec_d^{\mathfrak{p}}(N)$.*

Доведення. Припустимо, що $K \cap N \neq N$. Візьмемо довільний елемент $r \in \mathfrak{p} = (K:N)$. Це означає, що $rM \subseteq K$, а також $rN \subseteq rM$ і $rN \subseteq N$. Тоді $rN \subseteq K \cap N$, тобто $r \in (K \cap N : N)$. Отже, $\mathfrak{p} \subseteq (K \cap N : N)$.

Нехай тепер $r \in (K \cap N : N)$. Тоді $rN \subseteq K \cap N \subseteq K$. Оскільки $N \not\subset K$ і K – диференціально-первинний підмодуль M, то $r \in \mathfrak{p}$. Таким чином, $\mathfrak{p} = (K \cap N : N)$.

Залишилось довести, що підмодуль $K \cap N$ є диференціально-первинним в N. Нехай $rm^{(k)} \in K \cap N \subseteq K$, $r \in R$, $n \in N$. Тоді $rm^{(k)} \in K$, причому K – $\mathfrak{p}$-диференціально-первинний підмодуль в M, $(K:M) = \mathfrak{p}$. Тоді $r \in \mathfrak{p}$ або $n \in K$, звідки $r \in \mathfrak{p}$ або $n \in K \cap N$. Отже, $K \cap N$ – $\mathfrak{p}$-диференціально-первинний підмодуль.

Нехай N – диференціальний підмодуль в M. Позначимо множину всіх диференціально-первинних підмодулів, які містять цей диференціальний підмодуль, через $V_d(N) = \{P \in Spec_d(M) \mid N \subseteq P\}$.

Твердження 2. *Нехай N – диференціально-первинний підмодуль диференціального R-модуля M. Тоді:*

1. $V_d(M) = \varnothing$ і $V_d(0) = Spec_d(M)$;
2. $\bigcap_{i\in} V_d(N_i) = V_d\left(\sum_{i\in I} N_i\right)$;
3. $V_d(N) \cup V_d(K) \subseteq V_d(N \cap K)$.

Доведення виконуємо безпосередньою перевіркою умов.

Розглянемо таку сім'ю підмножин множини $Spec_d(M)$:

$$\varsigma_d(M) = \{V_d(N) \mid N - \text{ диференціальний підмодуль в } M\}.$$

Сім'я $\varsigma_d(M)$ замкнена щодо довільних перетинів, $Spec_d(M) \in \varsigma_d(M)$ і $\varnothing \in \varsigma_d(M)$, але вона не для кожного M замкнена щодо скінченних об'єднань.

Диференціальний модуль, в якому для будь-яких підмодулів N і K виконується рівність $V_d(N) \cup V_d(K) = V_d(N \cap K)$, називають *top-модулем.*

Твердження 3. *Кожний диференціально-мультиплікаційний модуль є top-модулем.*

Доведення. Нехай $N \in V(N_1 \cap N_2)$. Звідси $N_1 \cap N_2 \subseteq N$. Тоді $N_1 \subseteq N$ або $N_2 \subseteq N$. Отже, $N \in V(N_1)$ або $N \in V(N_2)$, що і треба було довести.

Таким чином, на $Spec_d(M)$, де M – *top*-модуль, можна задати топологію, для якої $\varsigma_d(M)$ буде сім'єю замкнених множин. Цю топологію називають топологією типу Зариського. Надалі диференціальним спектром диференціального *top*-модуля M називатимемо множину $Spec_d(M)$ з описаною вище топологією, але ніяк не відображатимемо цього, використовуючи позначення.

Нагадаємо, що непорожню підмножину S комутативного диференціального кільця R називають d*-мультиплікативно замкненою*, якщо для будь-яких $a, b \in S$ існує такий $n \in \{0\} \cup ¥$, що $ab^{(n)} \in S$. При $n = 0$ отримуємо звичайне означення мультиплікативно замкненої підмножини кільця. Якщо S – довільна d-мультиплікативно замкнена підмножина диференціального кільця R і M – лівий диференціальний R-модуль, то її модульний аналог вводиться цілком природно.

Нехай S – d-мультиплікативно замкнена підмножина диференціального кільця R. Непорожню підмножину T R-модуля M називають Sd-*мультиплікативно замкненою*, якщо для будь-яких $s \in S$ та $t \in T$ існує такий $n \in \{0\} \cup ¥$, що $st^{(n)} \in T$. Певна модифікація класичної конструкції диференціального модуля часток щодо d-мультиплікативно замкненої підмножини призводить до модуля часток $T^{-1}M$ щодо Sd-мультиплікативно замкненої підмножини T диференціального модуля M. Для лівого регулярного модуля ${}_R R$, та d-мультиплікативно замкненої підмножини модуля M ці множини збігаються з класичними мультиплікативно замкненими підмножинами комутативних диференціальних кілець. Відмітимо, що для модулів над комутативними кільцями подібні поняття введені у праці [8].

Надалі позначатимемо через $f : M \to K$ довільний диференціальний гомоморфізм модулів, а через N – диференціальний підмодуль модуля M. Як стандартно, N^e позначає *розширення* N в K, тобто диференціальний підмодуль в K, породжений множиною $f(N)$; якщо ж L – підмодуль в K, то через L^c позначають *звуження* L на M, тобто диференціальний підмодуль $f^{-1}(L)$ модуля K.

Лема 3. *Припустимо, що задано диференціальний гомоморфізм* $f : M \to K$ *диференціальних модулів. Тоді істинні такі твердження:*

1. $\operatorname{Ker}(f)$ *є диференціальним підмодулем в* M;
2. $\operatorname{Im}(f)$ *є диференціальним підмодулем в* K;
3. *якщо* N *– диференціальний підмодуль в* M, то N^e *є диференціальним підмодулем в* K;
4. *якщо* L *– диференціальний підмодуль в* K, то L^c *є диференціальним підмодулем* M.

Доведення. (1) Очевидно, якщо $f(x) = 0$, то маємо $f'(x) = f(x') = 0$.

(2) З умови $s = f(r)$ випливає, що $s' = (f(r))' = f(r')$.

(3) Якщо $n \in N^e$, то $n = \sum_{i=1}^{k} n_i f(x_i)$, $x_i \in L$. Продиференціювавши цю рівність, отримуємо: $n' = \left(\sum_{i=1}^{n} n_i f(x_i) \right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(n_i' \cdot f(x_i) + n_i \, (f(x_i))' \right) \in N^e$, як тільки $x_i \in N$.

(4) Якщо $m \in L^c$, то $f(m) \in L$. Оскільки $(f(m))' = f(m') \in L$, то $m' \in L^c$.

Якщо T – деяка d-мультиплікативно замкнена підмножина R-модуля M, то операція $\bar{d} : T^{-1}M \to T^{-1}M$, визначена за правилом $\bar{d}(m/t) = (t \cdot d(m) - \delta(t) \cdot m) / t^2$, де $m \in M$, $t \in T$, є диференціюванням на $T^{-1}M$.

Тому $T^{-1}M$ є диференціальним модулем. Його називають *диференціальним модулем часток модуля* M *щодо* T. Відомо, що канонічний гомоморфізм $\varphi : M \to T^{-1}M$ є диференціальним гомоморфізмом.

Лема 4. *Істинні такі твердження:*

(1) *Якщо* L *– диференціальний підмодуль модуля* $T^{-1}M$*, то його звуження* L^c *є диференціальним підмодулем в* M*;*

(2) *Зіставлення* L **а** L^c *встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною диференціально-первинних підмодулів в* M*, які не перетинаються з* T*, і множиною всіх диференціально-первинних підмодулів у* $T^{-1}M$*.*

Доведення. (1) *Якщо* L *– диференціальний підмодуль модуля* $T^{-1}M$, то L^c є диференціальним підмодулем в M, завдяки лемі 3. За цією самою лемою, застосованою до довільного диференціального підмодуля L в $T^{-1}R$, маємо $L = L^{ce}$, де L^c – диференціальний підмодуль в M.

(2) Це легко випливає з (1).

Якщо N – диференціальний підмодуль в M, то покладемо $(m+N)' = m' + N$ для кожного $m \in M$ і отримаємо диференціювання на M / N; отже, M / N – диференціальний модуль, який називатимемо *диференціальним фактор-модулем модуля* M *щодо* N, а також маємо канонічний диференціальний гомоморфізм $\pi : M \to M / N$.

Лема 5. *Диференціальні підмодулі модуля* M / N *перебувають у взаємно однозначній відповідності з диференціальними підмодулями модуля* M*, які містять* N*; зокрема, множина первинних диференціальних підмодулів в* M / N *перебуває у взаємно однозначній відповідності з множиною первинних диференціальних підмодулів модуля* M*, які містять* N*.*

Доведення. Якщо $\pi : M \to M / N$ – канонічний гомоморфізм, то існує взаємно однозначна відповідність між підмодулями модуля M / N та підмодулями в M, які містять N, причому так, щоб коли L є підмодулем в M / N, то $L^c = \pi^{-1}(L)$ і $L = L^{ce}$. Тоді за лемою 3 L – диференціальний підмодуль модуля M / N тоді і тільки тоді, коли L^c є диференціальним підмодулем в M. За такої відповідності первинні підмодулі переходять у первинні; отже, доведення завершене.

Нагадаємо деякі означення теорії спектральних просторів [3].

Топологічний простір X називають *спектральним*, якщо:

а) він є квазікомпактним T_0-простором;

б) сім'я замкнених квазікомпактних підмножин замкнена щодо скінченних перетинів і утворює базу замкнених множин топології;

в) кожна замкнена незвідна непорожня підмножина володіє загальною точкою.

Неперервну функцію, визначену на спектральному топологічному просторі, називають *спектральною*, якщо прообраз кожної відкритої квазікомпактної множини є відкритою квазікомпактною множиною. Зазначимо, що для кожного кільця R, $Spec(R)$ стосовно топології Зариського є спектральним топологічним простором, і для кожного гомоморфізму кілець f відповідна неперервна функція f^*, визначена на $Spec(R)$, є спектральною.

Нехай X – спектральний топологічний простір. Називатимемо топологію *конструктивною* в X, якщо наперед базою її замкнених множин є відкриті квазікомпактні множини простору X.

Нам необхідні такі факти, доведені раніше [3]:

Теорема 4. *Нехай X – спектральний топологічний простір. Підпростір Y в X є спектральним тоді і тільки тоді, коли його індукована з X топологія конструктивна.*

Наслідок 1. *Нехай Y – спектральний підпростір в X. Елемент x з X належить замиканню Y тоді і тільки тоді, коли він належить замиканню кожної точки з Y.*

Повернемось до розгляду простору $Spec_d(M)$. Якщо H – підмножина в M, то позначатимемо через $[H]$ диференціальний підмодуль, породжений H, тобто перетин усіх диференціальних підмодулів, які містять H.

Доповненя до підмножини $V_d(N)$ простору $Spec_d(M)$ стандартно позначають через $D_d(N)$. Якщо $m \in M$, то множину $D_d(mR)$ коротко позначають *через* D_m, тобто це множина всіх диференціально-первинних підмодулів модуля M, які не містять елемент $m \in M$.

Як добре відомо, для мультиплікаційного модуля M визначена операція множення його підмодулів. Зокрема, позначимо через $D_{mm'}$ множину $D_d((mR)(m'R))$. З урахуванням цього маємо такий результат.

Теорема 5. *Якщо M – диференціальний мультиплікаційний модуль, то $Spec_d(M) = \bigcap \{D_{mm'} \bigcup V([m'])|m \in M\}$.*

Доведення. Нехай P – первинний диференціальний підмодуль модуля M. Для кожного $m \in M$ маємо $m' \in P$, якщо $P \in V([m'])$, і $m' \notin P$, якщо $P \in D_{mm'}$. З цього випливає, що $Spec_d(M) \subseteq \bigcap \{D_{mm'} \bigcup V([m'])|m \in M\}$.

Навпаки, нехай Q – такий простий підмодуль в M, що $\bigcap \{D_{mm'} \bigcup V([m'])|m \in M\} \supset Q$. Якщо $m \in Q$, то $m' \in Q$ для кожного $m \in M$, отже, Q – диференціальний підмодуль, а тому диференціально-первинний. Теорема доведена.

Теорема 6. Якщо *M – диференціальний мультиплікаційний модуль, то $Spec_d(M)$ можна вкласти в $Spec(M)$ як спектральний підпростір. Кожний диференціальний гомоморфізм $f : M \to M'$ між диференціальними модулями індукує спектральне неперервне відображення $f_d^* : Spec_d(M') \to Spec_d(M)$.*

Доведення. За теоремою 5 $Spec_d(M)$ – замкнена підмножина щодо конструктивної топології в $Spec(M)$, а отже, за теоремою 4 – спектральний підпростір в $Spec(M)$. Якщо $f : M \to M'$ – диференціальний гомоморфізм, то f як звичайний гомоморфізм кілець індукує неперервне спектральне відображення $f^* : Spec(M') \to Spec(M)$. За лемою 3 матимемо $f^*(Spec_d(M')) \subset Spec_d(M)$, а тому обмеження f_d^* відображення f^* на $Spec_d(M)$ є неперервним відображенням $f_d^* : Spec_d(M') \to Spec_d(M)$. Насправді воно спектральне. Очевидно, якщо U є відкритою квазікомпактною в $Spec_d(M)$, то $U = Y \cap Spec_d(M)$, звідки Y є відкритим квазікомпактом у $Spec(M)$, а тому множина

$$f_A^{*\,-1}(U) = f^{*\,-1}(Y \cap Spec_d(M)) = f^{*\,-1}(Y) \cap Spec_d(M')$$

є відкритим квазікомпактом в $Spec_d(M')$. Теорема доведена.

З доведеної теореми та результатів праці Хокстера випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Якщо M – диференціально-мультиплікаційний модуль, то істинні такі твердження:*

1) *існує такий мультиплікаційний модуль K, що $Spec(K)$ гомеоморфний до $Spec_d(M)$;*

2) *існують диференціально-мультиплікаційні модулі K і L та такий диференціальний гомоморфізм $\varphi : K \to L$, що $Spec(K)$ гомеоморфний до $Spec(M)$, $Spec(L)$ гомеоморфний до $Spec_d(M)$ і φ^* є гомеоморфізмом між просторами $Spec(L)$ і $\varphi^*(Spec(L))$;*

3) *якщо $f : M \to M'$ – диференціальний гомоморфізм диференціально мультиплікаційних модулів, то існують диференціально-мультиплікаційні модулі кільця K і L та гомоморфізм $f' : K \to L$, для яких можна знайти такі гомеоморфізми g з $Spec_d(M)$ на $Spec(K)$ і g' з $Spec_d(M')$ на $Spec(L)$, що $gf_A^* = f'^*g'$.*

Тепер вже можна відповісти на питання про замкненість підпростору $Spec_d(M)$ у просторі $Spec(M)$.

Теорема 7. *Якщо M – диференціально-мультиплікаційний модуль, то перелічені нижче твердження еквівалентні:*

1. *$Spec_d(M)$ замкнений підпростір в $Spec(M)$;*

2. *якщо $Q \in Spec(M)$ і існує елемент $P \in Spec_d(M)$, для якого $P \subset Q$, то $Q \in Spec_d(M)$.*

Доведення. За теоремою 6 $Spec_d(M)$ – спектральний підпростір простору $Spec(M)$, так як за наслідком 1 елемент Q з $Spec(M)$ належить замиканню $Spec_d(M)$ тоді і тільки тоді, коли Q належить замиканню кожної точки P простору $Spec_d(M)$, яка містить Q, що розглядається як ідеал P з $Spec_d(M)$; звідси отримуємо еквівалентність (1) та (2). Теорема доведена.

Нехай H – підмножина модуля M і позначимо через $\{H\}$ найменший радикальний диференціальний підмодуль, що містить H.

Лема 6. *Нехай M – диференціальний модуль. Якщо N – диференціально-первинний радикал модуля M, то $\{N\} = \bigcap \{P \mid P \in Spec_d(M)\}$.*

Доведення. Підмодуль $\bigcap \{P \mid P \in Spec_d(M)\}$ є радикальним диференціальним підмодулем; очевидно, він є перетином всіх диференціально-первинних підмодулів модуля M, оскільки кожний радикальний диференціальний підмодуль є перетином первинних диференціальних підмодулів. Звідси отримуємо включення $\bigcap \{P \mid P \in Spec_d(M)\} \subset \{N\}$. Але N є радикальним підмодулем модуля M, а отже, $\bigcap \{P \mid P \in Spec_d(M)\} \supset N$, звідки отримуємо потрібне твердження.

Нехай M – диференціально-мультиплікаційний модуль і $M/\{N\}$ – диференціальний фактор-модуль модуля M щодо $\{N\}$. Тоді $M/\{N\}$, очевидно, диференціально-мультиплікаційний і, за лемою 4, $Spec_d(M)$ гомеоморфний просторові $Spec_d(M/\{N\})$. Теорема доведена.

Теорема 8. *Нехай T – Sd –мультиплікативно замкнена підмножина диференціального модуля M. Якщо диференціальний R-модуль M є диференціально-мультиплікаційним, то диференціальний R-модуль $T^{-1}M$ є диференціально-мультиплікаційним. Якщо, крім цього, такий модуль M є top-модулем, то $T^{-1}M$ також буде top-модулем.*

Доведення теореми отримують простим застосуванням доведених вище результатів.

1. *Ameri R.* On the prime submodules of multiplication modules // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – 27. – P. 1715–1724.
2. *Barnard A.* Multiplication modules // J. Algebra. – 1981. – 71, № 1. – P. 174–178.
3. *Carra G.* On the differential spectrum of a differential ring. // Matematiche (Catania). – 1978. – 33, № 1. – P. 1–17.
4. *Dauns J.* Prime modules // J. reine Angew. Math. – 1978. – 2. – P. 156–181.
5. *El-Bast Z. A., Smith P. F.* Multiplication modules // Comm. Algebra. – 1988. – 16. – P. 755–779.
6. *Gorman H. E.* Differential rings and modules // Scripta Math. – 1973. – 29, № 1–2. – P. 25–35.
7. *Kolchin S. E.* Differential Algebra and Algebraic Groups. – New York: Academic Press, 1973. – 446 p.
8. *Lu C.P.* Prime submodules of modules // Comment. MathUniv. Sanctic Pauli. – 1986. – 33, № 1. – P. 61–69.
9. *Smith P. F.* Some remarks on multiplication module // Arch. Math. – 1988. – 50. – P. 223–235.
10. *Tekir џ.* On Multiplication Modules // Int. Math. Forum. – 2007. – 2, № 29. – P. 1415–1420.
11. *Tuganbaev A. A.* Multiplication modules // J. of Math. Sci. – 2004.– 123, № 2. – P. 3839–3905.
12. *Zhang G., Wang F., Tong W.* Multiplication modules in which every prime submodule is contained in a unique maximal submodule // Comm. Algebra. – 2004. – 32, № 5. – P. 1945–1959.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫЕ МОДУЛИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ПЕРВИЧНЫЙ СПЕКТР

Установлены свойства дифференциально-мультипликационных модулей над коммутативными кольцами. Исследованы первичные дифференциальные и дифференциально-первичные подмодули в таких модулях и раскрыта их связь с соответствующими дифференциальными идеалами кольца. Рассмотрен дифференциально-первичный спектр дифференциального модуля и исследованы некоторые его топологические свойства, известные для обыкновенных колец.

DIFFERENTIALLY MULTIPLICATION MODULES AND THEIR DIFFERENTIALLY PRIME SPECTRUM

We established a number of properties of differentially multiplication modules over commutative differential rings. We investigated prime differential and differentially prime submodules of these modules and found the interrelation between them and the corresponding differential ideals of the ring. We considered the differentially prime spectrum of the differential module and investigated some topological properties.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано 01.09.11