УДК 511.3

Я. М. Холявка

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Позначимо $sn_i z$ *– алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі з алгебричними еліптичними модулями,* $(4K_i, 2iK'_i)$ *– пара основних періодів* $sn_i z$ $(i = 1,2)$. *Отримано оцінку сумісного наближення* $sn_1 K_2$, $sn_2 iK'_1$.

Нехай $sn_1 z, sn_2 z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі; κ_1, κ_2 – еліптичні модулі цих функцій; κ_1, κ_2 – алгебричні числа; $0 < \kappa_1^2 < 1$, $0 < \kappa_2^2 < 1$. Позначимо $(4K_1, 2iK'_1)$, $(4K_2, 2iK'_2)$ – пари основних періодів $sn_1 z, sn_2 z$ [5].

Через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь та довжину многочлена P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ – степінь та довжину алгебричного числа α; ξ_i – довільні алгебричні числа, $n_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ – їх степені та довжини відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \kappa_1, \kappa_2)$.

Теорема. *Якщо хоча б одне з чисел* $sn_1 K_2$, $sn_2 iK'_1$ *трансцендентне, то для довільних алгебричних чисел* ξ_1, ξ_2 *справджується оцінка*

$$\max\{|sn_1 K_2 - \xi_1|, |sn_2 iK'_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda T^2 \ln T\right), \tag{1}$$

де

$$T = n\left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \ln n\right], \tag{2}$$

$\Lambda > 0$ *– константа, залежна лише від чисел* κ_1, κ_2.

Подібні оцінки та формулювання задач можна знайти в працях [2, 4, 6].

Доводитимемо теорему другим методом Гельфонда, викладеним раніше [1, 2, 4]. Припустимо, що умова (1) не виконується, тобто для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\max\{|sn_1 K_2 - \xi_1|, |sn_2 iK'_1 - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7 T^2 \ln T\right). \tag{3}$$

Покладемо:

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda\sqrt{\lambda T}, \tag{4}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} sn_1^{l_1} z\, sn_2^{l_2} z,\quad C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\quad C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де ζ_τ – твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \kappa_1, \kappa_2)$.

Позначимо $\varphi_{i,1}(z) = sn_i\left(z + \frac{K_i}{2}\right)$, $\varphi_{i,2}(w) = sn_i\left(w + \frac{3K_i}{2}\right)$, $i = 1,2$. Тоді

$$sn_i(z + w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \kappa_i^2\varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z, w)}{\Lambda_{i,2}(z, w)},\ \varphi_{k,i}(0) = (1 + \kappa'_k)^{-0,5}. \tag{6}$$

Існують многочлени $G_{i,s,k,l}(\kappa_i, z)$, $H_{s,t}(z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(\kappa_i, z) = \frac{d^s}{d\,w^s}\left(\Lambda_{i,1}^k(z, w)\Lambda_{i,2}^l(z, w)\right)\Big|_{w=0}, \tag{7}$$

$$H_{s,t}(z) = \frac{d^{s-t}}{d\ w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))\,|_{w=0},$$

$$\ln L(G_{i,s,k,l}) \le s\ln(s(k+l)+c_1(s+k+l)),\quad \deg G_{i,s,k,l} \le 4(k+l).$$

З (5)–(7), подібно, як у працях [1, 3], отримаємо:

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\ w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)))\,|_{w=0} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}H_{s,t}(z)\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\kappa_1,z)G_{2,i,l_2,L-l_1}(\kappa_2,z). \qquad (8)$$

Позначимо:

$$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_1}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\kappa_1,z)G_{2,i,l_2,L-l_1}(\kappa_2,z). \qquad (9)$$

Нехай $\xi_3^2 = (1-\xi_1^2)(1-\kappa_1^2\xi_1^2)$, $\xi_4^2 = (1-\xi_2^2)(1-\kappa_2^2\xi_2^2)$; $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ та $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ – вирази, отримані з виразів $F^{(s)}(2n_1iK_1'+4n_2K_2)$ та $F_{s,t}(2n_1iK_1'+4n_2K_2)$ заміною sn_1K_2, sn_2iK_1', $sn_1'K_2$, $sn_2'iK_1'$ на ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4. Розглянемо $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$, якщо $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le t\le s\le S$, як N^2S лінійні форми від nL^2 змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Згідно з принципом Діріхле ([2], лема 4.1) та (4), (9), виберемо не всі рівні нулю числа $C_{l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le t\le s\le S$

$$F_{s,t,n_1,,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0,\quad |\,C_{l_1,l_2,\tau}\,| < \exp(c_2\lambda^6\ln\lambda T^2\ln T). \qquad (10)$$

З (1), (2), (4), (10) для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le S$ отримаємо:

$$|\,F^{(s)}(2n_1iK_1'+4n_2K_2)-F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)\,| < \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda^7T^2\ln T). \qquad (11)$$

З (8)–(11), якщо $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le S$, дістанемо:

$$|\,F^{(s)}(2n_1iK_1'+4n_2K_2)\,| < \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda^7T^2\ln T). \qquad (12)$$

Покажемо, що оцінка (12) також виконується і для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le\lambda S$. Нехай $G(z)=F(z)\sigma_1^L(z-\omega_1)\sigma_2^L(z-\omega_2)$, де ω_i – півперіод $\wp_i(u)$, а $\sigma_i(z)$ – σ-функція, що відповідає sn_iz [5]. Виберемо найменше можливе ціле r так, щоб виконувалась умова

$$r > 32(N+1)(|\,K_1\,|+|\,K_2\,|+|\,K_1'\,|+|\,K_2'\,|). \qquad (13)$$

Позначимо $R=12r$. Тоді з формули Ерміта ([2], лема 4.7) та виразів (2), (4), (5), (10), (13) випливає:

$$|\,G(z)\,|_{|z|\le R} < \exp(-\lambda^6\ln\lambda T^2\ln T). \qquad (14)$$

З (14) для $0\le s\le\lambda S$ отримаємо:

$$|\,G^{(s)}(z)\,|_{|z|\le r} < \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda^6\ln\lambda T^2\ln T). \qquad (15)$$

Для досить малого ε в ε-околах точок $2n_1iK_1'$ функція $\sigma_2(z-\omega_2)$ та точок $4n_2K_2$ функція $\sigma_1(z-\omega_1)$ не мають нулів, тому для $|\,n_1\,|,|\,n_2\,|\le 32N$

$$|\,\sigma_i(z-\omega_i)\,|_{z\in V(\varepsilon,2n_1iK'_1+4n_2iK_2)} > \exp(-c_3\lambda^5\ln\lambda T^2). \qquad (16)$$

З (14)–(16) для $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$ отримаємо:

$$| F^{(s)}(2n_1 iK_1' + 4n_2K_2) | < \exp(-\frac{\lambda^6}{3} \ln \lambda T^2 \ln T). \qquad (17)$$

Враховуючи (11), для $1 \le n_1, n_2 \le N$ та $0 \le s \le \lambda S$ з (17) випливає:

$$| F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) | < \exp(-\frac{\lambda^6}{4} \ln \lambda T^2 \ln T). \qquad (18)$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$, $0 \le t \le s \le \lambda S$, $1 \le n_1, n_2 \le N$, як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з теореми Ліувілля ([2], лема 9.2), рівностей (2) та (4) отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) \ne 0$ оцінку

$$| F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) | > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \qquad (19)$$

З (9), (19) одержимо

$$| F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) | > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \qquad (20)$$

Оцінки (18) та (20) суперечливі, тому для $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0. \qquad (21)$$

З (21) випливає, що многочлен $F(z)$ має не менше $c_4\lambda^7 \ln \lambda T^2$ нулів (з урахуванням кратності), але нулів може бути не більше $c_5\lambda^6 \ln \lambda T^2$, тому для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) призводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

1. *Нестеренко Ю. В.* О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – 59, № 4. – С. 155–178.
2. *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 311 с.
3. *Chudnovsky G. V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem // Inventiones Math. – 1980. – 61. – P. 267–290.
4. *Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V.* Transcendental Numbers. – Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 346 p.
5. *Lawden D. F.* Elliptic functions and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 271 p.
6. *Nesterenko Yu. V., Philippon P. (Eds.)* Introduction to Algebraic Independence Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 256 p.
7. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp // Bull. Soc. Math. France. – 1980. – 108. – P. 47–79.

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

Пусть $sn_i z$ *– алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби с алгебраическими эллиптическими модулями,* $(4K_i, 2iK_i')$ *– пара основных периодов* $sn_i z$, $(i = 1,2)$. *Получено оценку совместного приближения* sn_1K_2, sn_2iK_1'.

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF TWO JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS

Let $sn_i z$ *be algebraically independent Jacobi elliptic functions with algebraic modulus,* $(4K_i, 2iK_i')$ *be main periods* $sn_i z$ $(i = 1,2)$. *We estimate from below a simultaneous approximation of* sn_1K_2, sn_2iK_1'.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
10.09.12