УДК 539.3

Б. В. Процюк[✉]

НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПЛИТ

Отримано рекурентні системи нелінійних алгебричних рівнянь, до розв'язання яких зведено визначення температурних полів у плитах з урахуванням нерівномірного розподілу початкової температури, теплового випромінювання, температурної залежності теплофізичних характеристик, густин поверхневих і об'ємних джерел тепла. При цьому використано перетворення Кірхгофа, функції Ґріна відповідних лінійних задач теплопровідності і лінійні сплайни. Наведено приклад числових досліджень.

Ключові слова: *термочутливі плити, теплове випромінювання, нестаціонарне температурне поле, перетворення Кірхгофа, функція Ґріна, лінійні сплайни.*

У цій праці відому методику [2–4] поширено на задачі визначення температурних полів у плитах за врахування широкого спектра чинників, що зумовлюють нелінійність відповідної задачі теплопровідності. Методика передбачає використання перетворення Кірхгофа, відповідних функцій Гріна лінійних задач теплопровідності для плити, лінійних сплайнів та розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайнів змінної Кірхгофа на обмежувальних поверхнях та значень її похідної за часом на внутрішніх плоскопаралельних поверхнях.

1. Формулювання задачі. Нехай обмежувальні поверхні ($\tilde{z}=0$, $\tilde{z}=\tilde{z}_1$) плити, що займає область $0 \le \tilde{z} \le \tilde{z}_1$ і має початкову температуру $t_0 T_0(\tilde{z})$, нагріваються шляхом конвективного теплообміну з середовищем зі змінними у часі температурами $t_{c0} T_{c0}(\tau)$, $t_{c1} T_{c1}(\tau)$ і тепловими потоками густини $q_{00} q_0(T,\tau)$, $q_{10} q_1(T,\tau)$ відповідно. Крім того, у плиті діють внутрішні джерела тепла густини $W_0 W(T,\tilde{z},\tau)$. Одночасно з обмежувальних поверхонь відводяться теплові потоки власного випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана. Визначимо одновимірне нестаціонарне температурне поле плити з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(T)=\lambda_0 \Lambda(T)$, об'ємної теплоємності $c_v(T)=c_0 C(T)$, коефіцієнтів тепловіддачі $\alpha_0(T)=\alpha_{00}\alpha_{*0}(T)$, $\alpha_1(T)=\alpha_{10}\alpha_{*1}(T)$ і ступеня чорноти поверхні плити $\varepsilon(T)=\varepsilon_0 \varepsilon_*(T)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{\Lambda}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right]=\bar{C}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\mathrm{Po}\;\bar{W}(\bar{T},z,\mathrm{Fo}), \tag{1}$$

$$\left(\bar{\Lambda}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-\mathrm{Bi}_0\;\bar{\alpha}_0(\bar{T})[\bar{T}-\bar{t}_{c0}\bar{T}_{c0}(\mathrm{Fo})]-\right.$$

$$\left.-\mathrm{Sk}\;\bar{\varepsilon}(\bar{T})\bar{T}^4+\mathrm{Ki}_0\;\bar{q}_0(\bar{T},\mathrm{Fo})\right)\Bigg|_{z=0}=0\,, \tag{2}$$

$$\left(\bar{\Lambda}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}+\mathrm{Bi}_1\;\bar{\alpha}_1(\bar{T})[\bar{T}-\bar{t}_{c1}\bar{T}_{c1}(\mathrm{Fo})]+\right.$$

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

$$+ \mathrm{Sk}\, \bar{\varepsilon}(\bar{T})\bar{T}^4 - \mathrm{Ki}_1\, \bar{q}_1(\bar{T}, \mathrm{Fo})\Big)\Big|_{z=z_1} = 0\,, \tag{3}$$

$$\bar{T}\big|_{\mathrm{Fo}=0} = \bar{t}_0 \bar{T}_0(z)\,, \tag{4}$$

де $\bar{T} = T/T_s$, $z = \tilde{z}/\ell$, $z_1 = \tilde{z}_1/\ell$, $\mathrm{Fo} = a_0\tau/\ell^2$, $a_0 = \lambda_0/c_0$, $\mathrm{Bi}_k = \ell\alpha_{k0}/\lambda_0$, $\mathrm{Sk} = T_s^3 \ell\varepsilon_0\sigma_0/\lambda_0$, $\mathrm{Ki}_k = \ell q_{k0}/(\lambda_0 T_s)$, $\mathrm{Po} = \ell^2 W_0/(\lambda_0 T_s)$, $\bar{t}_0 = t_0/T_s$, $\bar{t}_{ck} = t_{ck}/T_s$, $\bar{T}_0(z) = T_0(z\ell)$, $\bar{T}_{ck}(\mathrm{Fo}) = T_{ck}(\ell^2\mathrm{Fo}/a_0)$, $\left[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T}), \bar{\alpha}_k(\bar{T}), \bar{\varepsilon}(\bar{T})\right] = \left[\Lambda(T), C(T), \alpha_{*k}(T), \varepsilon_*(T)\right]\Big|_{T=T_s\bar{T}}$, $\bar{q}_k(\bar{T}, \mathrm{Fo}) = q_k(T_s\bar{T}, \ell^2\,\mathrm{Fo}/a_0)$, $\bar{W}(\bar{T}, z, \mathrm{Fo}) = W(T_s\bar{T}, z\ell, \ell^2\mathrm{Fo}/a_0)$; σ_0 – стала Стефана – Больцмана, T_s – характерна для задачі температура, ℓ – параметр, що має розмірність одиниці довжини.

2. Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int\limits_{\bar{T}^*}^{\bar{T}} \bar{\Lambda}(\bar{T})\, d\bar{T} \tag{5}$$

за припущення, що функція $\theta = \theta(\bar{T})$ має обернену $\bar{T} = \bar{T}(\theta)$, задачу (1)–(4) зводимо до такої:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\,\mathrm{Fo}} - W^t(z, \mathrm{Fo})\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=z_k} = (-1)^k f_k^*(\mathrm{Fo})\,, \ k = 0, 1\,, \tag{7}$$

$$\theta\big|_{\mathrm{Fo}=0} = \theta_0^*(z)\,, \tag{8}$$

де

$$W^t(z, \mathrm{Fo}) = \left[1 - \frac{\bar{C}(\bar{T}(\theta))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}\,\bar{W}(\bar{T}(\theta), z, \mathrm{Fo})\,,$$

$$f_k^*(\mathrm{Fo}) = \{\mathrm{Bi}_k\, \bar{\alpha}_k(\bar{T}(\theta))[\bar{T}(\theta) - \bar{t}_{ck}\bar{T}_{ck}(\mathrm{Fo})] +$$
$$+ \mathrm{Sk}\,\bar{\varepsilon}(\bar{T}(\theta))\bar{T}^4(\theta) - \mathrm{Ki}_k\, \bar{q}_k(\bar{T}(\theta), \mathrm{Fo})\}\big|_{z=z_k}\,,$$

$z_0 = 0$, $\theta_0^*(z) = \int\limits_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_0\bar{T}_0(z)} \bar{\Lambda}(\bar{T})\, d\bar{T}$, $\bar{T}_* = \dfrac{T_*}{T_s}$, T_* – нижня межа діапазону температур, в якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

Наступним кроком є отримання інтегрального подання розв'язку задачі (6)–(8) за допомогою функції Гріна

$$G(z, \zeta, \mathrm{Fo}) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\mu_m, z)\Phi(\mu_m, \zeta)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2\,\mathrm{Fo}}\,, \tag{9}$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial G}{\partial\,\mathrm{Fo}} \tag{10}$$

і крайові умови

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \mathrm{Bi}_0\, G\right)\bigg|_{z=0} = 0\,, \ \left(\frac{\partial G}{\partial z} + \mathrm{Bi}_1\, G\right)\bigg|_{z=z_1} = 0\,, \ G\big|_{\mathrm{Fo}=0} = \delta(z-\zeta)\,. \tag{11}$$

Тут

$$\Phi(\mu, z) = \cos\mu z + \frac{\mathrm{Bi}_0}{\mu}\sin\mu z\,,$$

$$N(\mu) = \left(1 + \frac{\mathrm{Bi}_0^2}{\mu^2}\right) z_1 + \frac{\mathrm{Bi}_0}{\mu^2} + \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu^2}\,\frac{\mu^2 + \mathrm{Bi}_0^2}{\mu^2 + \mathrm{Bi}_1^2},$$

μ_m – корені рівняння $\dfrac{\partial \Phi(\mu, z_1)}{\partial z} + \mathrm{Bi}_1\, \Phi(\mu, z_1) = 0$, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Після низки перетворень отримаємо:

$$\theta(z, \mathrm{Fo}) = \vartheta_0^*(z, \mathrm{Fo}) + \vartheta_w(z, \mathrm{Fo}) - \vartheta_0(z, \mathrm{Fo}) - \vartheta_1(z, \mathrm{Fo}), \tag{12}$$

де

$$\vartheta_0^*(z, \mathrm{Fo}) = \int_0^{z_1} \theta_0^*(\zeta)\, G(z, \zeta, \mathrm{Fo})\, d\zeta; \tag{13}$$

$$\vartheta_w(z, \mathrm{Fo}) = \int_0^{Fo}\int_0^{z_1} W^t(\zeta, \xi)\, G(z, \zeta, \mathrm{Fo} - \xi)\, d\zeta\, d\xi; \tag{14}$$

$$\vartheta_k(z, \mathrm{Fo}) = \int_0^{Fo} f_k(\xi)\, G(z, z_k, \mathrm{Fo} - \xi)\, d\xi; \tag{15}$$

$$f_k(\mathrm{Fo}) = f_k^*(\mathrm{Fo}) - \mathrm{Bi}_k \theta(z_k, \mathrm{Fo}),\ k = 0, 1.$$

Для знаходження $\vartheta_w(z, \mathrm{Fo})$ та $\vartheta_k(z, \mathrm{Fo})$, які містять невідомі функції $\theta(z, \mathrm{Fo})$ і $\dfrac{\partial \theta(z, \mathrm{Fo})}{\partial\, \mathrm{Fo}}$ та $\theta(0, \mathrm{Fo})$ і $\theta(z_1, \mathrm{Fo})$, що входять відповідно у $W^t(\zeta, \mathrm{Fo})$ та $f_0(\mathrm{Fo})$ і $f_1(\mathrm{Fo})$, застосуємо такий алгоритм. У другому доданку (12) інтеграл за координатою подамо як суму інтегралів від x_{j-1} до x_j ($j = 1, 2, \ldots, J$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_J = z_1$). У кожному з цих інтегралів замінюємо $W^t(\zeta, \xi)$ на $W_j^t(\xi)$ відповідно, де $W_j^t(\xi) = W^t(z_j^*, \xi)$, $z_j^* = (x_{j-1} + x_j)/2$. Далі функції $W_j^t(\mathrm{Fo})$ і $f_k(\mathrm{Fo})$ апроксимуємо лінійними сплайнами

$$\chi_\eta(\mathrm{Fo}) \approx s_{\eta,1}^{(1)}\, \mathrm{Fo} + s_{\eta,1}^{(0)} + \sum_{q=1}^{K-1} \left(s_{\eta,q+1}^{(1)}\, \mathrm{Fo} + s_{\eta,q+1}^{(0)} - s_{\eta,q}^{(1)}\, \mathrm{Fo} - s_{\eta,q}^{(0)}\right) S(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_q), \tag{16}$$

де $\eta = j, f_k$,

$$s_{\eta,q}^{(1)} = \frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_q) - \chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})}{\mathrm{Fo}_1},\quad s_{\eta,q}^{(0)} = \frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})\, \mathrm{Fo}_q - \chi_\eta(\mathrm{Fo}_q)\, \mathrm{Fo}_{q-1}}{\mathrm{Fo}_1},$$

$\chi_j(\mathrm{Fo}) = W_j^t(\mathrm{Fo})$, $\chi_{f_k}(\mathrm{Fo}) = f_k(\mathrm{Fo})$; $\mathrm{Fo}_0 = 0$, $\mathrm{Fo}_q = q\, \mathrm{Fo}_1$, $q = 1, 2, \ldots, K$; $K + 1$ – кількість вузлів сплайнів; $\mathrm{Fo}_1 = a_0 \Delta\tau / \ell^2$ і $\Delta\tau$ – відповідно без- і розмірний кроки сітки.

Обчисливши за апроксимаціями (16) інтеграли (14) і (15), одержимо

$$\vartheta_k(z, \mathrm{Fo}) = \Bigg\{ f_k(\mathrm{Fo}) \bar\beta_1(z, \zeta, 0) - \left[s_{f_k,1}^{(1)} + \sum_{p=1}^{K-1} \left(s_{f_k,p+1}^{(1)} - s_{f_k,p}^{(1)}\right) S(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_p) \right] \bar\beta_2(z, \zeta, 0) + s_{f_k,1}^{(1)} \bar\beta_2(z, \zeta, \mathrm{Fo}) - s_{f_k,1}^{(0)} \bar\beta_1(z, \zeta, \mathrm{Fo}) +$$

$$+\sum_{p=1}^{K-1}\left(s_{f_k,p+1}^{(1)}-s_{f_k,p}^{(1)}\right)\bar{\beta}_2(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\Big\}\Big|_{\zeta=z_k},$$

$$k=0,1, \tag{17}$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})=\sum_{j=1}^{J}\Big\{-W_j^t(\mathrm{Fo})\beta_{1j}(z,0)-$$

$$-\left[s_{j,1}^{(1)}+\sum_{p=1}^{K-1}(s_{j,p+1}^{(1)}-s_{j,p}^{(1)})S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\right]\beta_{2j}(z,0)+$$

$$+s_{j,1}^{(1)}\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo})+\sum_{p=1}^{K-1}(s_{j,p+1}^{(1)}-s_{j,p}^{(1)})\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)-$$

$$-s_{j,1}^{(0)}\beta_{1j}(z,\mathrm{Fo})\Big\}, \tag{18}$$

де

$$\bar{\beta}_\gamma(z,\zeta,\mathrm{Fo})=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi(\mu_m,z)\Phi(\mu_m,\zeta)}{\mu_m^{2\gamma}N(\mu_m)}e^{-\mu_m^2\,\mathrm{Fo}},$$

$$\beta_{\gamma j}(z,\mathrm{Fo})=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi(\mu_m,z)\varphi_j(\mu_m)}{\mu_m^{2\gamma}N(\mu_m)}e^{-\mu_m^2\,\mathrm{Fo}},\quad \gamma=1,2,$$

$$\varphi_j(\mu)=\frac{1}{\mu}(\sin\mu x_j-\sin\mu x_{j-1})-\frac{\mathrm{Bi}_0}{\mu^2}(\cos\mu x_j-\cos\mu x_{j-1}). \tag{19}$$

При $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_q$, $q=1,2,\ldots,K$, із формул (17) і (18) з урахуванням співвідношення

$$\theta(z_j^*,\mathrm{Fo}_q)=\theta_{jq}\approx\left(\frac{y_{j0}+y_{jq}}{2}+A_{jq}\right)\mathrm{Fo}_1+\theta_0^*(z_j^*), \tag{20}$$

в якому

$$y_{j0}=\frac{\bar{\Lambda}(\bar{T})}{\bar{C}(\bar{T})}\bigg|_{z=z_j^*,\mathrm{Fo}=0}\left[\frac{\partial^2\theta_0^*(z)}{\partial z^2}\bigg|_{z=z_j^*}+\mathrm{Po}\bar{W}(\bar{T},z_j^*,0)\right],$$

$$y_{jq}=\frac{\partial\theta}{\partial\,\mathrm{Fo}}\bigg|_{\zeta=z_j^*,\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_q},\qquad A_{jq}=\sum_{k=1}^{q-1}y_{jk},$$

отримаємо

$$\vartheta_k(z,\mathrm{Fo}_q)=f_{k,q}[\bar{\beta}_1(z,z_k,0)-\psi_0(z,z_k)]+\Psi_{f_kq}(z,z_k),\qquad k=0,1, \tag{21}$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)=\sum_{j=1}^{J}\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z,0)-\psi_j(z)]+\Psi_{jq}(z)\}, \tag{22}$$

де

$$\Psi_{f_k1}(z,z_k)=f_{k,0}[\psi_0(z,z_k)-\bar{\beta}_1(z,z_k,\mathrm{Fo}_1)],$$

$$\Psi_{j1}(z)=W_{j,0}^t[\psi_j(z)-\beta_{1j}(z,\mathrm{Fo}_1)];$$

$$\Psi_{f_kq}(z,z_k)=f_{k,q-1}\psi_0(z,z_k)+s_{f_k,1}^{(1)}\bar{\beta}_2(z,z_k,\mathrm{Fo}_q)-s_{f_k,q-1}^{(1)}\bar{\beta}_2(z,z_k,\mathrm{Fo}_1)+$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2}\frac{f_{k,p+1}-2f_{k,p}+f_{k,p-1}}{\mathrm{Fo}_1}\bar{\beta}_2(z,z_k,\mathrm{Fo}_q-\mathrm{Fo}_p)-f_{k,0}\bar{\beta}_1(z,z_k,\mathrm{Fo}_q),$$

$$\Psi_{jq}(z) = W^t_{j,q-1}\psi_j(z) + s^{(1)}_{j,1}\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo}_q) - s^{(1)}_{j,q-1}\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo}_1) +$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2}\frac{W^t_{j,p+1} - 2W^t_{j,p} + W^t_{j,p-1}}{\mathrm{Fo}_1}\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo}_q - \mathrm{Fo}_p) - W^t_{j,0}\beta_{1j}(z,\mathrm{Fo}_q)\,,$$

$$q = 2,3,\ldots,K\,;$$

$$\psi_0(z,\zeta) = [\bar{\beta}_2(z,\zeta,0) - \bar{\beta}_2(z,\zeta,\mathrm{Fo}_1)]/\mathrm{Fo}_1\,,$$

$$\psi_j(z) = [\beta_{2j}(z,0) - \beta_{2j}(z,\mathrm{Fo}_1)]/\mathrm{Fo}_1\,;$$

$$f_{k,q} = f_k(\mathrm{Fo}_q), \qquad W^t_{j,q} = \left[1 - \frac{\bar{C}(\bar{T}(\theta_{jq}))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta_{jq}))}\right]y_{jq} + \mathrm{Po}\,\bar{W}(\bar{T}(\theta_{jq}),z^*_j,\mathrm{Fo}_q)\,;$$

$$\bar{\beta}_1(z,\zeta,0) = \frac{1}{D}(1 + \mathrm{Bi}_0 z)(\kappa - \mathrm{Bi}_1\zeta) - (z-\zeta)S(z-\zeta)\,,$$

$$D = æ\,\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1, \qquad æ = 1 + \mathrm{Bi}_1 z_1\,;$$

$$\bar{\beta}_2(z,\zeta,0) = \frac{1}{D}(1 + \mathrm{Bi}_0\, z)[g_{11}(z_1,\zeta) + \mathrm{Bi}_1\, g_{12}(z_1,\zeta)] - g_{12}(z,\zeta)\,,$$

$$g_{11}(z,\zeta) = \frac{z}{2D}(2 + \mathrm{Bi}_0\, z)(æ - \mathrm{Bi}_1\,\zeta) - \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 S(z-\zeta)\,,$$

$$g_{12}(z,\zeta) = \frac{z^2}{6D}(3 + \mathrm{Bi}_0 z)(æ - \mathrm{Bi}_1\,\zeta) - \frac{1}{6}(z-\zeta)^3 S(z-\zeta)\,;$$

$$\beta_{1j}(z,0) = \left[\frac{\zeta}{2D}(1 + \mathrm{Bi}_0\, z)(2æ - \mathrm{Bi}_1\,\zeta) + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 S(z-\zeta)\right]_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j}\,,$$

$$\beta_{2j}(z,0) = \left[\frac{1}{D}(1 + \mathrm{Bi}_0\, z)[\beta_{11}(z_1,\zeta) + \mathrm{Bi}_1\,\beta_{12}(z_1,\zeta)] - \beta_{12}(z,\zeta)\right]_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j}\,,$$

$$\beta_{11}(z,\zeta) = \frac{z\zeta}{4D}(2 + \mathrm{Bi}_0\, z)(2æ - \mathrm{Bi}_1\,\zeta) + \frac{1}{6}(z-\zeta)^3 S(z-\zeta)\,,$$

$$\beta_{12}(z,\zeta) = \frac{z^2\zeta}{12D}(3 + \mathrm{Bi}_0\, z)(2æ - \mathrm{Bi}_1\,\zeta) + \frac{1}{24}(z-\zeta)^3 S(z-\zeta)\,.$$

Використовуючи метод колокацій, із інтегрального подання (12) та залежностей (21) і (22) дістанемо рекурентну систему нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень у вузлах сплайнів змінної Кірхгофа $\theta_{kq} = \theta(z_k,\mathrm{Fo}_q)$, $k = 0,1$, та її похідної за часом y_{iq}, $i = 1,2,\ldots,J$:

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) +$$

$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(0,z_1,0) - \psi_0(0,z_1)] + \Psi_{f_1 q}(0,z_1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{J}\{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(0,0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0)\} - \vartheta^*_0(0,\mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\theta_{1q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_1,0,0) - \psi_0(z_1,0)] + \Psi_{f_0 q}(z_1,0) +$$

$$+f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_1,z_1,0) - \psi_0(z_1,z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_1,z_1) +$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(z_1,0) - \psi_j(z_1)] + \Psi_{jq}(z_1)\} - \vartheta^*_0(z_1,\mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Fo}_1 y_{iq} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z^*_i,0,0) - \psi_0(z^*_i,0)] + \Psi_{f_0 q}(z^*_i,0) +$$

$$+f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_i^*, z_1, 0) - \psi_0(z_i^*, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_i^*, z_1) +$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_i^*, 0) - \psi_j(z_i^*)] + \Psi_{jq}(z_i^*)\} -$$

$$-\vartheta_0^*(z_i^*, \mathrm{Fo}_q) + \left(\frac{y_{i0}}{2} + A_{iq}\right)\mathrm{Fo}_1 + \theta_0^*(z_i^*) = 0\,. \qquad (23)$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо f_{kq} та $W_{j,q}^t$, а на основі (21) і (22) – $\vartheta_k(z, \mathrm{Fo}_q)$ і $\vartheta_w(z, \mathrm{Fo}_q)$. Відтак, за допомогою (17) і (18) визначимо $\vartheta_k(z, \mathrm{Fo})$ і $\vartheta_w(z, \mathrm{Fo})$. Скориставшись тепер (12), отримаємо розв'язок задачі (6)–(8). Зауважимо, що значення $\theta(z_j^*, \mathrm{Fo}_q)$ можемо знайти також зі співвідношення (20).

Якщо в задачі (1)–(4) від температури залежать тільки коефіцієнт теплопровідності і об'ємна теплоємність, причому $C(T)/\Lambda(T) \neq 1$, то замість (12) одержимо таке інтегральне подання:

$$\theta(z, \mathrm{Fo}) = \vartheta_0^*(z, \mathrm{Fo}) + T_L(z, \mathrm{Fo}) + \vartheta_w(z, \mathrm{Fo}) - \vartheta_0(z, \mathrm{Fo}) -$$

$$-\vartheta_1(z, \mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}\, T_w(z, \mathrm{Fo})\,, \qquad (24)$$

де

$$T_w(z, \mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}}\int_0^{z_1} \bar{W}(\zeta, \xi)\, G(z, \zeta, \mathrm{Fo} - \xi)\, d\zeta\, d\xi\,; \qquad (25)$$

$$T_L(z, \mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}} \bar{T}_{c0}^*(\xi)\, G(z, 0, \mathrm{Fo} - \xi)\, d\xi + \int_0^{\mathrm{Fo}} \bar{T}_{c1}^*(\xi)\, G(z, z_1, \mathrm{Fo} - \xi)\, d\xi\,; \qquad (26)$$

$$\bar{T}_{ck}^*(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}_k\, \bar{t}_{ck}\bar{T}_{ck}(\mathrm{Fo}) + Ki_k \bar{q}_k(\mathrm{Fo})\,,\ \ k = 0, 1\,;$$

$\vartheta_0^*(z, \mathrm{Fo})$ обчислюємо за формулою (13), а $\vartheta_0(z, \mathrm{Fo})$, $\vartheta_1(z, \mathrm{Fo})$ і $\vartheta_w(z, \mathrm{Fo})$ – за формулами (17), (18), в яких відповідно

$$f_k(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}_k\, [\bar{T}(\theta(z_k, \mathrm{Fo})) - \theta(z_k, \mathrm{Fo})] + \mathrm{Sk}\, \bar{T}^4(\theta(z_k, \mathrm{Fo})), \quad k = 0, 1\,; \qquad (27)$$

$$W^t(z, \mathrm{Fo}) = \left[1 - \frac{\bar{C}(\bar{T}(\theta))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\, \mathrm{Fo}}\,. \qquad (28)$$

З урахуванням (21), (22) і (24) рекурентна система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень у вузлах сплайнів змінної Кірхгофа на поверхнях $z = 0, z_1$ та її похідної за часом на поверхнях $z = z_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, J$ набуде вигляду

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{f_0 q}(0, 0) +$$

$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(0, z_1, 0) - \psi_0(0, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(0, z_1) +$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(0, 0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0)\} -$$

$$-\vartheta_0^*(0, \mathrm{Fo}_q) - T_L(0, \mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(0, \mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\theta_{1q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_1, 0, 0) - \psi_0(z_1, 0)] + \Psi_{f_0 q}(z_1, 0) +$$

$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_1, z_1, 0) - \psi_0(z_1, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_1, z_1) +$$

$$+\sum_{j=1}^{J}\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_1, 0) - \psi_j(z_1)] + \Psi_{jq}(z_1)\} -$$

$$- \vartheta_0^*(z_1, \mathrm{Fo}_q) - T_L(z_1, \mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(z_1, \mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Fo}_1 y_{iq} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_i^*, 0, 0) - \psi_0(z_i^*, 0)] + \Psi_{f_0 q}(z_i^*, 0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_i^*, z_1, 0) - \psi_0(z_i^*, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_i^*, z_1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} \{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_i^*, 0) - \psi_j(z_i^*)] + \Psi_{jq}(z_i^*)\} -$$
$$- \vartheta_0^*(z_i^*, \mathrm{Fo}_q) - T_L(z_i^*, \mathrm{Fo}_q) + \left(\frac{y_{i0}}{2} + A_{iq}\right)\mathrm{Fo}_1 +$$
$$+ \theta_0^*(z_i^*) - \mathrm{Po}\, T_w(z_i^*, \mathrm{Fo}_q) = 0\,. \qquad (29)$$

Тут $W_{j,q}^t = \left[1 - \dfrac{\bar{C}(\bar{T}(\theta_{jq}))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta_{jq}))}\right] y_{jq}$.

Якщо матеріал плити з простою нелінійністю, тобто коли справджується відношення $C(T)/\Lambda(T) = 1$ ($\vartheta_w(z, \mathrm{Fo}) = 0$), тоді для знаходження температурного поля слід розв'язати отриману з (12), (21), (22) систему рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа θ_{kq}, $k = 0,1$, і $\theta_{iq}^* = \theta(z_i^*, \mathrm{Fo}_q)$, $i = 1, 2, \ldots, J$:

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(0, z_1, 0) - \psi_0(0, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(0, z_1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} \{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(0,0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0)\} - \vartheta_0^*(0, \mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\theta_{1q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_1, 0, 0) - \psi_0(z_1, 0)] + \Psi_{f_0 q}(z_1, 0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_1, z_1, 0) - \psi_0(z_1, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_1, z_1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} \{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_1, 0) - \psi_j(z_1)] + \Psi_{jq}(z_1)\} - \vartheta_0^*(z_1, \mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\theta_{iq}^* + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_i^*, 0, 0) - \psi_0(z_i^*, 0)] + \Psi_{f_0 q}(z_i^*, 0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_i^*, z_1, 0) - \psi_0(z_i^*, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_i^*, z_1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} \{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_i^*, 0) - \psi_j(z_i^*)] + \Psi_{jq}(z_i^*)\} - \vartheta_0^*(z_i^*, \mathrm{Fo}_q) = 0\,.$$

Тут

$$W_{j,q}^t = \mathrm{Po}\, \bar{W}(\bar{T}(\theta_{jq}^*), z_j^*, \mathrm{Fo}_q), \qquad i = 1, 2, \ldots, J\,.$$

За простої нелінійності з (29) одержимо таку систему рівнянь для знаходження θ_{0q} і θ_{1q}:

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(0, z_1, 0) - \psi_0(0, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(0, z_1) - \vartheta_0^*(0, \mathrm{Fo}_q) -$$
$$- T_L(0, \mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(0, \mathrm{Fo}_q) = 0\,,$$

$$\theta_{1q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z_1, 0, 0) - \psi_0(z_1, 0)] + \Psi_{f_0 q}(z_1, 0) +$$
$$+ f_{1,q}[\bar{\beta}_1(z_1, z_1, 0) - \psi_0(z_1, z_1)] + \Psi_{f_1 q}(z_1, z_1) -$$

$$-\vartheta_0^*(z_1,\mathrm{Fo}_q)-T_L(z_1,\mathrm{Fo}_q)-\mathrm{Po}\,T_w(z_1,\mathrm{Fo}_q)=0\,.$$

За відомих змінних Кірхгофа температуру визначаємо, використовуючи співвідношення $\bar{T}(z,\mathrm{Fo})=\bar{T}(\theta)$.

За незалежних від температури ТФХ, густин теплових потоків і джерел тепла інтегральне подання розв'язку відповідної задачі, отримане аналогічно, як (12), матиме вигляд

$$\bar{T}(z,\mathrm{Fo})=\bar{t}_0T_0^*(z,\mathrm{Fo})+T_L(z,\mathrm{Fo})-\mathrm{Sk}\,[\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})+\vartheta_1(z,\mathrm{Fo})]+ \\ +\mathrm{Po}\,T_w(z,\mathrm{Fo})\,, \tag{30}$$

де

$$T_0^*(z,\mathrm{Fo})=\int\limits_0^{z_1}\bar{T}_0(\zeta)\,G(z,\zeta,\mathrm{Fo})\,d\zeta\,;$$

$T_L(z,\mathrm{Fo})$ і $T_w(z,\mathrm{Fo})$ визначають формули (25) і (26), а $\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})$ і $\vartheta_1(z,\mathrm{Fo})$ – формула (17) при $f_k(\mathrm{Fo})=\bar{T}^4(z_k,\mathrm{Fo})$, $k=0,1$.

Температури $\bar{T}(0,\mathrm{Fo}_q)$, $\bar{T}(z_1,\mathrm{Fo}_q)$ з урахуванням (21) і (30) знаходимо зі системи алгебричних рівнянь

$$\bar{T}(0,\mathrm{Fo}_q)+\mathrm{Sk}\,f_0(\mathrm{Fo}_q)[\bar{\beta}_1(0,0,0)-\psi_0(0,0)]+\Psi_{f_0q}(0,0)+ \\ +\mathrm{Sk}\,f_1(\mathrm{Fo}_q)[\bar{\beta}_1(0,z_1,0)-\psi_0(0,z_1)]+\Psi_{f_1q}(0,z_1)- \\ -\bar{t}_0T_0^*(0,\mathrm{Fo}_q)-T_L(0,\mathrm{Fo}_q)-\mathrm{Po}\,T_w(0,\mathrm{Fo}_q)=0\,,$$

$$\bar{T}(z_1,\mathrm{Fo}_q)+\mathrm{Sk}\,f_0(\mathrm{Fo}_q)[\bar{\beta}_1(z_1,0,0)-\psi_0(z_1,0)]+\Psi_{f_0q}(z_1,0)+ \\ +\mathrm{Sk}f_1(\mathrm{Fo}_q)[\bar{\beta}_1(z_1,z_1,0)-\psi_0(z_1,z_1)]+\Psi_{f_1q}(z_1,z_1)- \\ -\bar{t}_0\bar{T}_0^*(z_1,\mathrm{Fo}_q)-T_L(z_1,\mathrm{Fo}_q)-\mathrm{Po}\,T_w(z_1,\mathrm{Fo}_q)=0\,.$$

Якщо теплова дія симетрична до поверхні $z=z_1/2$, то розподіл температури в такій плиті можна знайти з розв'язання простішої задачі, яку отримують з (1)–(4), замінюючи граничну умову (3) на умову теплоізоляції:

$$\left.\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\right|_{z=z_1/2}=0\,. \tag{31}$$

Тут треба застосувати функцію Гріна, яка відрізняється від (9) тим, що

$$\mu^2N(\mu)=\frac{1}{2}z_1(\mu^2+\mathrm{Bi}_0^2)+\mathrm{Bi}_0\,, \tag{32}$$

а μ_m – корені рівняння

$$\left.\frac{\partial\Phi(\mu,z)}{\partial z}\right|_{z=z_1/2}=0\,, \tag{33}$$

Відповідне інтегральне подання таке:

$$\theta(z,\mathrm{Fo})=\vartheta_0^*(z,\mathrm{Fo})-\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})+\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})\,, \tag{34}$$

де

$$\vartheta_0^*(z,\mathrm{Fo})=\int\limits_0^{z_1/2}\theta_0^*(\zeta)\,G(z,\zeta,\mathrm{Fo})\,d\zeta\,; \tag{35}$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})=\int\limits_0^{\mathrm{Fo}}\int\limits_0^{z_1/2}W^t(\zeta,\xi)\,G(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\zeta\,d\xi\,; \tag{36}$$

$\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})$ визначаємо, як і раніше, на основі співвідношення (17). У (17), (18) ряди $\bar\beta_1(z,\zeta,\mathrm{Fo})$, $\bar\beta_2(z,\zeta,\mathrm{Fo})$, $\beta_{1j}(z,\mathrm{Fo})$ та $\beta_{2j}(z,\mathrm{Fo})$ при $\mathrm{Fo}>0$ підраховуєм, беручи до уваги (32), (33). При $\mathrm{Fo}=0$ треба скористатися точними сумами рядів:

$$\bar\beta_1(z,\zeta,0)=\frac{1}{\mathrm{Bi}_0}(1+\mathrm{Bi}_0\, z)-(z-\zeta)S(z-\zeta)\,,$$

$$\bar\beta_2(z,\zeta,0)=\frac{1}{\mathrm{Bi}_0}(1+\mathrm{Bi}_0\, z)g_{11}(z_1,\zeta)-g_{12}(z,\zeta)\,,$$

$$g_{11}(z,\zeta)=\frac{z}{2\,\mathrm{Bi}_0}(2+\mathrm{Bi}_0\, z)-\frac{1}{2}(z-\zeta)^2S(z-\zeta)\,,$$

$$g_{12}(z,\zeta)=\frac{z^2}{6\,\mathrm{Bi}_0}(3+\mathrm{Bi}_0\, z)-\frac{1}{6}(z-\zeta)^3S(z-\zeta)\,,$$

$$\beta_{1j}(z,0)=\left[\frac{\zeta}{\mathrm{Bi}_0}(1+\mathrm{Bi}_0\, z)+\frac{1}{2}(z-\zeta)^2S(z-\zeta)\right]\Bigg|_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j}\,,$$

$$\beta_{2j}(z,0)=\left[\frac{1}{\mathrm{Bi}_0}(1+\mathrm{Bi}_0\, z)\beta_{11}(z_1/2,\zeta)-\beta_{12}(z,\zeta)\right]\Bigg|_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j}\,,\qquad j=1,2,\ldots,J/2\,;$$

$$\beta_{11}(z,\zeta)=\frac{z\zeta}{2\,\mathrm{Bi}_0}(2+\mathrm{Bi}_0\, z)+\frac{1}{6}(z-\zeta)^3S(z-\zeta)\,,$$

$$\beta_{12}(z,\zeta)=\frac{z^2\zeta}{12\,\mathrm{Bi}_0}(3+\mathrm{Bi}_0\, z)+\frac{1}{24}(z-\zeta)^3S(z-\zeta)\,.$$

Система рівнянь для визначення $\theta_{0q}=\theta(0,\mathrm{Fo}_q)$ і y_{iq}, $i=1,2,\ldots,J/2$, яка отримана з (21), (22) і (34), матиме вигляд

$$\theta_{0q}+f_{0,q}[\bar\beta_1(0,0,0)-\psi_0(0,0)]+\Psi_{f0q}(0,0)+$$
$$+\sum_{j=1}^{J/2}\left\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(0,0)-\psi_j(0)]+\Psi_{jq}(0)\right\}-\vartheta_0^*(0,\mathrm{Fo}_q)=0\,,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Fo}_1\, y_{iq}+f_{0,q}[\bar\beta_1(z_i^*,0,0)-\psi_0(z_i^*,0)]+\Psi_{f0q}(z_i^*,0)+$$
$$+\sum_{j=1}^{J/2}\left\{W_{j,q}^t[\beta_{1j}(z_i^*,0)-\psi_j(z_i^*)]+\Psi_{jq}(z_i^*)\right\}-$$
$$-\vartheta_0^*(z_i^*,\mathrm{Fo}_q)+\left(\frac{y_{i0}}{2}+A_{iq}\right)\mathrm{Fo}_1+\theta_0^*(z_i^*)=0\,. \qquad (37)$$

Якщо в задачі (1)–(3), (31) від температури залежать тільки коефіцієнт теплопровідності і об'ємна теплоємність, то замість (34) отримаємо інтегральне подання:

$$\theta(z,\mathrm{Fo})=\vartheta_0^*(z,\mathrm{Fo})+T_L(z,\mathrm{Fo})-\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})+\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})+\mathrm{Po}\,T_w(z,\mathrm{Fo})\,, \qquad (38)$$

де

$$T_L(z,\mathrm{Fo})=\int_0^{\mathrm{Fo}}\bar T_{c0}^*(\xi)\,G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\xi\,,$$

$$\bar T_{c0}^*(\mathrm{Fo})=\mathrm{Bi}_0\,\bar t_{c0}\bar T_{c0}(\mathrm{Fo})+Ki_0\bar q_0(\mathrm{Fo})\,; \qquad (39)$$

$$T_w(z,\mathrm{Fo})=\int_0^{\mathrm{Fo}}\int_0^{z_1/2}\bar W(\zeta,\xi)\,G(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\zeta\,d\xi\,; \qquad (40)$$

$\vartheta_0^*(z,\mathrm{Fo})$ обчислюємо за формулою (35), а $\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})$ і $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})$ з урахуванням (27)–(28), (36) – за формулами (17)–(18).

Рекурентна система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень θ_{0q}, y_{iq} набуде вигляду

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) + \\ + \sum_{j=1}^{J/2} \{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(0,0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0)\} - \\ - \vartheta^*_0(0,\mathrm{Fo}_q) - T_L(0,\mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(0,\mathrm{Fo}_q) = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Fo}_1\, y_{iq} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z^*_i,0,0) - \psi_0(z^*_i,0)] + \Psi_{f_0 q}(z^*_i,0) + \\ + \sum_{j=1}^{J/2} \{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(z^*_i,0) - \psi_j(z^*_i)] + \Psi_{jq}(z^*_i)\} - \\ - \vartheta^*_0(z^*_i,\mathrm{Fo}_q) - T_L(z^*_i,\mathrm{Fo}_q) + \left(\frac{y_{i0}}{2} + A_{iq}\right)\mathrm{Fo}_1 + \\ + \theta^*_0(z^*_i) - \mathrm{Po}\, T_w(z^*_i,\mathrm{Fo}) = 0 . \qquad (41)$$

Якщо матеріал плити з простою нелінійністю, тоді для знаходження температурного поля треба розв'язати отриману з (37) систему рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа θ_{0q} і θ^*_{iq}:

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) + \\ + \sum_{j=1}^{J/2} \{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(0,0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0)\} - \vartheta^*_0(0,\mathrm{Fo}_q) = 0 ,$$

$$\theta^*_{jq} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(z^*_i,0,0) - \psi_0(z^*_i,0)] + \Psi_{f_0 q}(z^*_i,0) + \\ + \sum_{j=1}^{J/2} \{W^t_{j,q}[\beta_{1j}(z^*_i,0) - \psi_j(z^*_i)] + \Psi_{jq}(z^*_i)\} - \\ - \vartheta^*_0(z^*_i,\mathrm{Fo}_q) + \theta^*_0(z^*_i) = 0 , \qquad (42)$$

де

$$\bar{W}^t_{j,q} = \mathrm{Po}\, \bar{W}(\bar{T}(\theta^*_{jq}), z^*_j, \mathrm{Fo}_q), \qquad \theta^*_{jq} = \theta(z^*_j, \mathrm{Fo}_q) .$$

З (41) за простої нелінійності отримуємо таку систему рівнянь для знаходження θ_{0q}:

$$\theta_{0q} + f_{0,q}[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) - \\ - \vartheta^*_0(0,\mathrm{Fo}_q) - T_L(0,\mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(0,\mathrm{Fo}_q) = 0 .$$

За відомих змінних Кірхгофа температуру, як і в задачі (1)–(4), визначаємо за співвідношенням $\bar{T}(z,Fo) = \bar{T}(\theta)$.

Якщо ТФХ, густини теплових потоків і джерела тепла незалежні від температури, то інтегральне подання розв'язку відповідної задачі, одержане аналогічно, як (38), матиме вигляд

$$\bar{T}(z,\mathrm{Fo}) = \bar{t}_0 T^*_0(z,\mathrm{Fo}) + T_L(z,\mathrm{Fo}) - \mathrm{Sk}\,\vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}\, T_w(z,\mathrm{Fo}) ,$$

де

$$T^*_0(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{z_1/2} \bar{T}_0(\zeta)\, G(z,\zeta,\mathrm{Fo})\, d\zeta ;$$

$T_L(z,\mathrm{Fo})$ і $T_w(z,\mathrm{Fo})$ визначаємо з формул (39) і (40), $\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})$ – з формули (17) при $f_0(\mathrm{Fo}) = \bar{T}^4(0,\mathrm{Fo})$.

Температури $\bar{T}(0,\mathrm{Fo}_q)$ знаходимо зі системи алгебричних рівнянь

$$\bar{T}(0,\mathrm{Fo}_q) + \mathrm{Sk}\, f_0(\mathrm{Fo}_q)[\bar{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{f_0 q}(0,0) -$$

$$- \bar{t}_0 T_0^*(0,\mathrm{Fo}_q) - T_L(0,\mathrm{Fo}_q) - \mathrm{Po}\, T_w(0,\mathrm{Fo}_q) = 0 .$$

3. Числові результати. Досліджували у двох плитах температурні поля, які описують відповідно розв'язки задач (1)–(4) і (1)–(3), (32) при $W_0 = 0$, $t_0 = T_*$, $T_s = t_c + q_0/\alpha_0 = 6000\,\text{К}$, $T_* = 300\,\text{К}$; $t_{ck} = t_c$, $q_{k0} = q_0$, $\alpha_k(T) = 1$, $q_k(T,\tau) = 1$, $T_{ck}(\tau) = 1$, $\alpha_{k0} = 470\,\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $k = 0,1$; $\varepsilon_0 = 1$, $T_0(\tilde{z}) = 1$, $\Delta\tau = 0.125\,\text{с}$, $\tilde{z}_1 = \ell = 0.022\,\text{м}$, $J = 4$. ТФХ матеріалів плит такі ж, як і склокераміки [1]

$$\lambda_t(T) = 1.22(1 + 1.967\cdot 10^{-4}(T - T_*))\,\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}),$$

$$c_v(T) = 4.1\cdot 10^6\left(1 - 0.2683 e^{-1.9(T-T_*)}\right)\text{Вт}\cdot\text{с}/(\text{м}^3\cdot\text{К}).$$

Тут

$$\bar{\Lambda}(\bar{T}) = 1 + \beta_\lambda(\bar{T} - \bar{T}_*), \quad \bar{C}(\bar{T}) = 1 - 0.2683 e^{-11.4(\bar{T}-\bar{T}_*)},$$

$$a_0 = 2.9756\cdot 10^{-7}\,\text{м}^2/\text{с}, \ \beta_\lambda = 1.18, \ \mathrm{Bi}_k = 8.475, \ \theta_0^*(z) = 0,$$

$$\bar{T}(\theta) = \bar{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2\beta_\lambda\theta} - 1}{\beta_\lambda}, \quad \theta_{jq} \approx \left(\frac{y_{jq}}{2} + A_{jq}\right)\mathrm{Fo}_1;$$

$$\vartheta_0^*(z,\mathrm{Fo}) = 0, \quad \vartheta_0^*(z) = 0, \quad y_{i0} = 0 .$$

Зі системи рівнянь (29) знаходимо невідомі θ_{0q}, θ_{1q} і y_{iq}, $i = 1,2,\ldots,J$ при $T_L(z,\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}_0\{[\bar{\beta}_1(z,\zeta,0) - \bar{\beta}_1(z,\zeta,\mathrm{Fo})]\big|_{\zeta=0} + [\bar{\beta}_1(z,\zeta,0) - \bar{\beta}_1(z,\zeta,\mathrm{Fo})]\big|_{\zeta=z_1}\}$ для першої задачі, а зі системи рівнянь (41) – невідомі θ_{0q} і y_{jq}, $i = 1,2,\ldots,J/2$ при $T_L(z,\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}_0\,[\bar{\beta}_1(z,\zeta,0) - \bar{\beta}_1(z,\zeta,\mathrm{Fo})]\big|_{\zeta=0}$ для другої.

Таблиця 1

τ, с \ z	0	0.125	0.375	0.625	0.875	1
1	0.21744 0.21744	0.05003 0.05003	0.05 0.05	0.05 –	0.05003 –	0.21744 –
10	0.33880 0.33880	0.13255 0.13255	0.05124 0.05124	0.05124 –	0.13255 –	0.33880 –
50	0.37092 0.37092	0.26550 0.26550	0.11771 0.11771	0.11771 –	0.26550 –	0.37092 –
125	0.38011 0.38011	0.32180 0.32180	0.23464 0.23464	0.23464 –	0.32180 –	0.38011 –
250	0.38671 0.38671	0.36354 0.36354	0.33044 0.33044	0.33044 –	0.36354 –	0.38671 –
500	0.39040 0.39040	0.38698 0.38698	0.38221 0.38221	0.38221	0.38698	0.39040
1000	0.39102 0.39102	0.39095 0.39095	0.39085 0.39085	0.39085 –	0.39095 –	0.39102 –
1250	0.39103 0.39103	0.39103 0.39103	0.39103 0.39103	0.39103 –	0.39103 –	0.39103 –
∞	0.39103 0.39103	0.39103 0.39103	0.39103 0.39103	0.39103 –	0.39103 –	0.39103 –

У табл. 1 для фіксованих моментів часу наведено значення температур у двох плитах на поверхнях $z = 0$, 0.125, 0.375 та у товстішій плиті на симетричних відносно серединної $z = 0.5$ поверхнях $z = 0.625$, 0.875, 1 (рис. 1). Перші рядки відповідають температурам у товстішій плиті. Для порівняння наведено ($\tau = \infty$) ще значення температур, підрахованих на основі розв'язків стаціонарних задач. Для них після введення позначень $b = 2 + z_1 \,\mathrm{Bi}_0$, $\varphi(\theta) = \mathrm{Bi}_0\,[\bar{T}(\theta) - \theta] + \mathrm{Sk}\,\bar{T}^4(\theta)$, змінні Кірхгофа мають відповідно вигляд

$$b\theta(z) = \left[\mathrm{Bi}_0 - \varphi(\theta)\right]\big|_{z=0}\,[1 + \mathrm{Bi}_0(z_1 - z)] + \left[\mathrm{Bi}_0 - \varphi(\theta)\right]\big|_{z=z_1}\,(1 + \mathrm{Bi}_0\, z)\,,$$

де $\theta(0)$, $\theta(z_1)$ знаходили зі системи рівнянь

$$b\,\theta(0) + (1 + z_1\,\mathrm{Bi}_0)\,\varphi(\theta)\big|_{z=0} + \varphi(\theta)\big|_{z=z_1} = b\,,$$

$$b\,\theta(z_1) + \varphi(\theta)\big|_{z=0} + (1 + z_1\,\mathrm{Bi}_0)\,\varphi(\theta)\big|_{z=z_1} = b\,,$$

і $\mathrm{Bi}_0\,\theta(z) = \mathrm{Bi}_0 - \varphi(\theta)\big|_{z=0}$, де $\theta(0)$ – розв'язок рівняння $\mathrm{Bi}_0\,\theta(0) + \varphi(\theta)\big|_{z=0} = \mathrm{Bi}_0$.

Рис. 1

Результати таблиці свідчать про збіг значень температур на поверхнях двох плит, однаково віддалених від поверхні $z = 0$, у товстішій плиті – на симетричних поверхнях та за великих часів з відповідними температурами, підрахованими на основі розв'язків стаціонарних задач.

Висновки. Розроблено аналітично-числову методику розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для плит за врахування теплового випромінювання, температурної залежності теплофізичних характеристик, густин поверхневих і об'ємних джерел тепла. При цьому використано перетворення Кірхгофа, відповідні функції Ґріна і лінійні сплайни. Підтверджено збіг температур на поверхнях рівновіддалених від серединної у плиті за симетричного нагрівання та їх збіг з відповідними температурами удвічі тоншої плити з теплоізольованою поверхнею.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
   Те саме: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analitical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103. – https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8
2. *Процюк Б. В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63–69.
3. *Процюк Б.* Метод інтегральних рівнянь у нестаціонарних задачах теплопровідності термочутливих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 10. – С. 96–105.
4. *Процюк Б. В.* Нестаціонарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 156–167.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛИТ

Получены рекуррентные системы нелинейных алгебраических уравнений, к решению которых сводится определение температурных полей в плите с учетом неравномерного распределения начальной температуры, теплового излучения, температурной зависимости теплофизических характеристик, плотностей поверхностных и объемных источников тепла. При этом использовано преобразование Кирхгофа, функции Грина соответствующих линейных задач теплопроводности и линейные сплайны. Приведен пример численных исследований.

Ключевые слова: *термочувствительные плиты, тепловое излучение, нестационарное температурное поле, преобразование Кирхгофа, функция Ґрина, линейные сплайны.*

NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE PLATES

Determination of the temperature fields in the plates, taking into account the non-uniform distribution of the initial temperature, thermal radiation, temperature dependence of thermophysical characteristics, densities of surface and volume heat sources is reduced to recurrent systems of nonlinear algebraic equations. The Kirchhoff transform, Green's functions of corresponding linear heat conduction problems and linear splines were used. An example of numerical studies is provided.

Key words: *thermosensitive plates, thermal radiation, non-stationary temperature field, Kirchhoff transformation, Green function, linear splines.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.09.19