УДК 512.552.13

О. С. Сорокін

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ УЗАГАЛЬНЕНО АДЕКВАТНОГО КІЛЬЦЯ

Показано, що стабільний ранг узагальнено адекватного кільця рівний 2 і, як наслідок, отримуємо, що узагальнено адекватне кільце є кільцем Ерміта. Крім того, показано, що воно є кільцем елементарних дільників.

Поняття адекватного кільця вперше ввів Хелмер як клас кілець елементарних дільників, які не задовольняють жодні умови обриву зростальних ланцюгів ідеалів, і над якими довільна матриця діагоналізується [1]. Після того з'явилася низка праць, в яких вивчали властивості адекватних кілець [6–11]. Розглядаючи кільця аналітичних функцій, як адекватні, Хенріксен зауважив, що адекватне кільце не є обов'язково нетеровим, і водночас воно є кільцем елементарних дільників. Він також побудував приклад кільця елементарних дільників, яке не є адекватним. Клас кілець, який містить адекватні кільця та кільця, побудовані Хенріксеном, отримав назву узагальнено адекватних [3]. Нижче вивчено стабільний ранг узагальнено адекватних кілець, а також їх зв'язок із кільцями Ерміта та кільцями елементарних дільників.

Введемо всі необхідні означення і факти. Надалі під кільцем розумітимемо комутативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Нагадаємо, що кільце Безу – це кільце в якому довільний скінченно породжений ідеал з кільця є головним.

Означення 1. Елемент $a \neq 0$ з комутативного кільця Безу R називають *адекватним елементу* $b \in R$, якщо існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s [2, 4].

Означення 2. Назвемо ненульовий елемент a з комутативного кільця Безу R *адекватним*, якщо він адекватний довільному елементу $b \in R$ [2, 4].

Означення 3. Комутативне кільце Безу називають *узагальнено адекватним*, якщо для довільної пари ненульових елементів хоча б один з цих елементів є адекватним до іншого [3].

Означення 4 [2]. Кільце R називають *правим (лівим) кільцем Ерміта*, якщо для довільних $a, b \in R$ існують зворотна матриця P порядку 2 і елемент $d \in R$, що

$$(a,b)P = (d,0) \quad \left(P(a,b)^T = (d,0)^T\right).$$

Означення 5. Кільце R називають *кільцем Ерміта*, якщо воно одночасно є лівим та правим кільцями Ерміта.

Зауважимо, що у комутативному випадку поняття лівого та правого кілець Ерміта збігаються.

Означення 6. Рядок $(a_1, \ldots, a_n)$, де $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, назвемо *унімодулярним*, якщо $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$ [12, 13].

Означення 7. Скажемо, що натуральне число n – стабільний ранг кільця R, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$, де $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, існують такі елементи $b_1, \ldots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним [12, 13].

Таким чином, кільце R є *кільцем стабільного рангу 1*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ – зворотний елемент кільця R [13].

Подібно кільце R є *кільцем стабільного рангу 2*, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, виконується рівність $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$ [13].

Зауважимо, що для доведення наступної теореми використані ідеї праці [5].

Теорема 1. Нехай R – узагальнено адекватне кільце. Тоді стабільний ранг R рівний 2.

Доведення. Нехай $aR + bR + cR = R$. Якщо $a = 0$, тоді $bR + cR = R$, тобто $(a + c \cdot 1)R + (b + c \cdot 0)R = R$. Аналогічне співвідношення можна записати для $b = 0$. Бачимо, що в цьому випадку виконується умова, що визначає стабільний ранг 2. Нехай $a \neq 0$ та $b \neq 0$, тоді згідно з означенням кільця R можливі два випадки: елемент a адекватний елементу b, або елемент b адекватний елементу a.

У першому випадку можемо стверджувати, що існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ для довільного $s' \in R$, такого, що $sR \subset s'R \neq R$.

Покажемо, що $aR + (b + cr)R = R$. Дійсно, якщо $aR + (b + cr)R = \delta R$, де δ – незворотний елемент з R, тоді δ – дільник $a = rs$. Якщо $\delta R + rR = tR \neq R$, то t – дільник елемента $b + cr \in R$. Оскільки t – дільник r, тоді t – дільник елемента b. Але це неможливо, оскільки $rR + bR = R$. Якщо ж δ є дільником елемента s, то згідно з визначенням елемента s маємо $\delta R + bR = \alpha R \neq R$, де α – незворотний елемент R. Так як δ – дільник $b + cr$ і α – дільник δ, тоді α – дільник $b + cr$. Але це неможливо, оскільки $aR + bR + cR = R$. Отже, $aR + (b + cr)R = R$, тобто $(a + c \cdot 0)R + (b + cr)R = R$, а це умова, яка визначає, що стабільний ранг кільця R рівний 2.

Якщо ж маємо протилежну ситуацію, тобто існують такі елементи $m, n \in R$, що $b = mn$, де $mR + aR = R$ і $n'R + aR \neq R$ для довільного $n' \in R$, такого, що $nR \subset n'r \neq R$, то покажемо, що $(a + cm)R + bR = R$. Справді, якщо $(a + cm)R + bR = \gamma R$, де γ – незворотний елемент в R, то γ – дільник $b = mn$. Якщо $\gamma R + mR = hR \neq R$, то h – дільник елемента $a + cm \in R$. Оскільки h є дільником m, тоді h – дільник елемента a. Але це неможливо, оскільки $mR + aR = R$. Якщо ж γ є дільником елемента n, то згідно з визначенням елемента n маємо $\gamma R + aR = \beta R \neq R$, де β – незворотний елемент R. Так як γ є дільником $a + cm$ і β є дільником γ, тоді β є дільником $a + cm$. Але це неможливо, оскільки $aR + bR + cR = R$. Отже, $(a + cm)R + bR = R$, тобто $(a + cm)R + (b + c \cdot 0)R = R$, а це умова, яка визначає стабільний ранг 2. Звідси R є кільцем стабільного рангу 2. Теорему доведено.

Враховуючи результати дослідження [12], доведемо таку теорему.

Теорема 2. Узагальнено адекватне кільце є кільцем Ерміта.

Доведення. Нехай $a, b \in R$ – довільні елементи кільця R. Оскільки узагальнено адекватне кільце є кільцем Безу, то існує такий елемент $d \in R$, що

$$aR + bR = dR.$$

Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = da_0$, $b = db_0$ та $au + bv = d$. Звідси отримуємо, що $d(a_0 u + b_0 v - 1) = 0$, та існує такий елемент $c \in R$, що $dc = 0$ та $a_0 R + b_0 R + cR = R$.

Оскільки узагальнено адекватне кільце є кільцем стабільного рангу 2, то існують такі елементи $x, y \in R$, що $(a_0 + cx)R + (b_0 + cy)R = R$. Більше того, $(a_0 + cx)t + (b_0 + cy)s = 1$ для деяких елементів $t, s \in R$. Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + cx & b_0 + cy \\ -s & t \end{pmatrix}$$

є унімодулярною, і такою, що

$$(d, 0)P = (a, b).$$

Тоді

$$(d, 0) = (a, b)P^{-1},$$

тобто R – праве кільце Ерміта, а отже, і ліве кільце Ерміта, оскільки R є комутативним. Теорему доведено.

Враховуючи попередню теорему та [12], маємо такий результат.

Теорема 3. Узагальнено адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Оскільки за попередньою теоремою це кільце є кільцем Ерміта, та згідно з результатами праці [2] достатньо обмежитись матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Оскільки R – узагальнено адекватне, то хоча б один з елементів a, c можна зобразити у вигляді $c = rs$, де $rR + aR = R$ та $s'R + aR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Доведемо, що

$$(a + br)R + crR = R.$$

Якщо це не так, то $(a + br)R + crR = hR \neq R$ для деякого незворотного елемента h. Якщо $hR + rR = \delta R$, тоді δ є дільником a, що суперечить умові $rR + aR = R$. Тоді маємо, що δ ділить s, а значить $hR + aR = gR$ та g є дільником b, що суперечить умові $aR + bR + cR = R$. Таким чином, маємо $(a + br)R + crR = R$. Коли для елемента a існує аналогічне зображення, то $arR + (br + c)R = R$.

З рівності $(a + br)R + crR = R$ робимо висновок, що

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + br & cr \\ b & c \end{pmatrix} = B,$$

де, очевидно, матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є оборотна.

Легко бачити, що матриця B, а отже, і матриця A мають діагональну редукцію. Якщо $arR + (br + c)R = R$, отримуємо аналогічну рівність:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & a \\ br + c & b \end{pmatrix} = C.$$

Аналогічні міркування доводять, що матриці C та A мають діагональну редукцію. Отже, кільце R є кільцем елементарних дільників.
Теорему доведено.

1. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 4. – Р. 550–554.
2. *Забавський Б. В.* Адекватні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів // Алгебра і топологія. – Львів: ЛДУ, 1996. – С. 74–79.
3. *Забавський Б. В.* Узагальнені адекватні кільця // Укр. мат журн. – 1996. – 48, № 4. – С. 554–557.
4. *Комарницький М. Я., Забавський Б. В.* Зауваження про адекватні кільця // Вісн. Львів. ун-ту. – 1988. – Вип. 27. – С. 43–45.
5. *Bilavska S. I., Zabavsky B. V.* Stable rank of adequate ring // Mat. Stud. – 2008. – 33. – №. 2. – P. 212–214.
6. *Brewer J. W., Conrad P., Montgomery H.* Lattice ordered groups and conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – 43, № 1. – P. 31–35.
7. *Gilman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956 – 82. – P. 362–365.
8. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, №2. – P. 225–236.
9. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
10. *Larsen M., Levis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P. 231–248.
11. *Menal P., Mongasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure Appl. Alg. – 1982. –24. – P. 25–40.
12. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // J. Pure Appl. Alg. – 1984. – 34. – P. 319–330.
13. *Vaserstein L. N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Functional. Anal. Appl. – 1971. – 5. – P. 102–110.

СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ ОБОБЩЕННО АДЕКВАТНОГО КОЛЬЦА

Показано, что стабильный ранг обобщенно адекватного кольца равен 2 и, как следствие, получаем, что обобщенно адекватное кольцо является кольцом Эрмита. Кроме того, показано, что обобщенно адекватное кольцо является кольцом элементарных делителей.

STABLE RANGE OF GENERALIZED ADEQUATE RING

In this paper we show that the stable rank of generalized adequate ring is equal 2, and as a consequence we get that generalized adequate ring is Hermite ring. Furthermore, it is shown that generalized adequate ring is an elementary divisor ring.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Одержано
12.10.12