УДК 512.552.12

А. І. Гаталевич

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ НАД КІЛЬЦЕМ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 2

Доведено, що над комутативним кільцем Безу стабільного рангу 2 довільна матриця третього порядку домноженням на оборотні матриці зводиться до спеціального трикутного вигляду.

Під кільцем розумітимемо комутативне кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$.

Матриці A і B називають еквівалентними над кільцем R, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $PAQ = B$. Якщо матриця A еквівалентна деякій діагональній матриці $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$ за довільного $i = 1, 2, \ldots, r-1$, то кажуть, що вона володіє діагональною редукцією. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A. Кільце R – кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [3].

Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцями Ерміта [3].

Під кільцем Безу розумітимемо кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

Кільце R називають кільцем стабільного рангу 2, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ з умови $aR + bR + cR = R$ випливає, що існують такі елементи $s, t \in R$, що $(a + cs)R + (b + ct)R = R$ [2].

У теоремах 1, 2 показано зв'язок ермітовості кільця з редукцією матриць і стабільниим рангом кільця, які використаємо під час доведення основної теореми.

Теорема 1 [3]. *Для довільної матриці A з елементами з правого кільця Ерміта існує така оборотна матриця U, що матриця AU є трикутна (тобто з нульовими елементами над головною діагоналлю).*

Теорема 2 [1]. *Комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2.*

Доведемо тепер основну теорему цього дослідження.

Теорема 3. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Тоді для довільної матриці $A \in M_3(R)$ існують такі оборотні матриці $P, Q \in GL_3(R)$, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$ і $(a, b) = (\varepsilon_2, a, b, c)$.

Доведення. Оскільки R – комутативне кільце Безу стабільного рангу 2, то згідно з теоремою 2, кільце R є кільцем Ерміта. Тоді для матриці A існує така оборотна матриця Q_1, що

$$AQ_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ k & l & m \end{pmatrix}.$$

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює 2, то в матриці AQ_1 можемо вважати, що $(a, b, k) = (b, k) = \delta$. Оскільки кільце R є кільцем Ерміта, то існує така оборотна матриця P_1, що

$$P_1\begin{pmatrix} b \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P_1}} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ k & l & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \delta & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Розглянемо підматрицю $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Оскільки R – кільце Ерміта, то існує така оборотна матриця Q_2, що

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \delta & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \delta & d & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Розглянемо підматрицю $\begin{pmatrix} a & 0 \\ \delta & d \end{pmatrix}$. Зауважимо, що $\delta \mid a$. Оскільки R – кільце Ерміта, то для матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ \delta & d \end{pmatrix}$ існують такі оборотні матриці P_2, Q_3, що

$$P_2\begin{pmatrix} a & 0 \\ \delta & d \end{pmatrix} Q_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$. Звідси одержуємо:

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P_2}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \delta & d & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_3}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Оскільки стабільний ранг кільця дорівнює 2, то $(a', b') = (\varepsilon_2, a', b', c')$. Теорема доведена.

1. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше двох // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 4. – С. 550–554.
2. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – 22. – P. 5–60.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.

РЕДУКЦИЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НАД КОЛЬЦОМ БЕЗУ СТАБИЛЬНОГО РАНГА 2

Доказано, что над коммутативным кольцом Безу стабильного ранга 2 произвольная матрица третьего порядка умножением на обратимые матрицы приводится к специальному треугольному виду.

REDUCTION OF THIRD ORDER MATRICES OVER BEZOUT RING OF STABLE RANK 2

It is proved that over commutative Bezout ring of stable rank 2 arbitrary third order matrix by multiplication by invertible matrices can be reduced to a special triangular form.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
10.10.12