УДК 512.552.12

О. М. Романів

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ *n*-РАЗ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

Доведено, що довільний набір n-матриць над комутативними кільцями Безу n-раз стабільного рангу 1 приводиться до спеціального трикутного вигляду з елементарними дільниками на головній діагоналі шляхом ідентичних односторонніх елементарних перетворень.

Всі розглядувані нижче кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $U(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через $GL_n(R)$ – кільце всіх зворотних матриць порядку n з елементами із кільця R.

Під *елементарними матрицями* [3] з елементами кільця R розуміємо квадратні матриці таких трьох типів: матриці, яка отримують з одиничної перестановкою рядків чи стовпців; діагональні матриці зі зворотними елементами на головній діагоналі; матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць порядку n з елементами із кільця R позначатимемо $GE_n(R)$ [2], а через $E_n(R)$ – групу елементарних $(n \times n)$-матриць третього типу [4].

Комутативне кільце R називають *кільцем Безу*, якщо будь-який скінченно породжений ідеал кільця R є головним. Комутативне кільце R називають *кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ і зворотна матриця $Q \in GL_2(R)$ такі, що $(a, b)Q = (d, 0)$.

Кільце R називають *кільцем n-раз стабільного рангу 1* [5], якщо для довільних унімодулярних рядків (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n) елементів кільця R існує такий елемент $r \in R$, що $a_i + b_i r \in U(R)$ для усіх $i = 1,2,\dots,n$. (Нагадаємо, що рядок (a_1, a_2) елементів кільця R є *унімодулярним*, якщо $a_1R + a_2R = R$.) Легко бачити, що кільце 1-раз стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1 в сенсі Басса [1].

Теорема 1. Нехай R – комутативне кільце Безу 2-рази стабільного рангу 1. Тоді для довільних матриць $A_1, A_2 \in M_2(R)$ існують матриці $P \in E_2(R)$ і $Q_1, Q_2 \in GL_2(R)$ такі, що

$$PA_1Q_1 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ * & e_1' \end{pmatrix}, \qquad PA_2Q_2 = \begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ * & e_2' \end{pmatrix}.$$

Доведення. Оскільки R – кільце Безу стабільного рангу 1, то R – кільце Ерміта [6] і доведення достатньо виконати для трикутних матриць. Розглянемо матриці A_1, A_2 вигляду

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R), \quad i = 1,2.$$

Нехай $a_iR + b_iR = R$ $(i=1,2)$. Оскільки R – кільце 2-рази стабільного рангу, то існує такий елемент $r \in R$, що $a_1 + b_1 r$, $a_2 + b_2 r \in U(R)$. Тоді, очевидно, існує така елементарна матриця $P = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(R)$, що

$$P\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + rb_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + rb_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $a_iR + b_iR + c_iR = R$, то $(a_i + rb_i)R + c_iR = R$, і тому існують такі зворотні матриці $Q_1, Q_2 \in GL_2(R)$, що

$$\begin{pmatrix} a_1+rb_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & e_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_2+rb_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & e_2 \end{pmatrix}.$$

Нехай $a_iR + b_iR = d_iR$ ($i = 1,2$). Тоді існують такі елементи α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in R$, що $a_i = \alpha_i d_i$, $b_i = \beta_i d_i$, $\alpha_i R + \beta_i R = R$, $i = 1,2$.

Звідси випливає, що для елементів α_1, α_2, β_1, β_2 існує такий елемент $r \in R$, що $\alpha_1 + \beta_1 r = 1$, $\alpha_2 + \beta_2 r = 1$. Домноживши останні рівності на d_1 і d_2 відповідно, отримаємо $a_1 + b_1r = d_1$, $a_2 + b_2r = d_2$. Тоді

$$P\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+rb_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+rb_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

де $P = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(R)$. Якщо $a_iR + b_iR + c_iR = R$, то $(a_i + rb_i)R + c_iR = R$, і тому існують зворотні матриці $Q_1, Q_2 \in GL_2(R)$ такі, що

$$\begin{pmatrix} a_1+rb_1 & c_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & e_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_2+rb_2 & c_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & e_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що випадок $a_iR+b_iR+c_iR=f_iR$ зводиться до попереднього (достатньо зауважити, що матриці вигляду $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ * & f_2 \end{pmatrix}$ належать центру кільця $M_2(R)$).

Теорему доведено.

Аналогічно доводять такий результат.

Теорема 2. Нехай R – комутативне кільце Безу n-раз стабільного рангу 1. Тоді для довільних матриць $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_2(R)$ існують такі матриці $P \in E_2(R)$ і $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in GL_2(R)$, що

$$PA_1Q_1 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ * & e_1' \end{pmatrix}, \qquad PA_2Q_2 = \begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ * & e_2' \end{pmatrix}, \ \dots, \ PA_nQ_n = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ * & e_n' \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Нехай $A = BC$, де B, C – матриці над комутативним кільцем Безу 2-рази стабільного рангу 1. Тоді елементарні дільники матриці A діляться на відповідні елементарні дільники матриць B та C.

Доведення. Нехай R – комутативне кільце Безу 2-рази стабільного рангу 1. Тоді існують такі матриці $P \in E_2(R)$ і $Q_1, Q_2 \in GL_2(R)$, що

$$PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}CQ_1.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} e_1^A & 0 \\ * & e_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^B & 0 \\ * & e_2^B \end{pmatrix} Q_2^{-1}CQ_1.$$

Очевидно, що матриця $Q_2^{-1}CQ_1$ – трикутна:

$$Q_2^{-1}CQ_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$e_1^A = e_1^B c_{11}, \quad e_2^A = e_2^B c_{22},$$

що й потрібно довести.

Теорему доведено.

1. *Bass H.* Algebraic *K*-theory. – New York; Benjamin, 1968. – 592 p.
2. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens // These de docteur troisieme cycle, Acad. Sci. Paris. – 1976. – 67 p.
3. *Cohn P.* On the structure of the GL_2 of a ring // I. H. E. S. Publ. Math. – 1996. – 30. – P. 365–413.
4. *GIlman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P. 366–394.
5. *Van der Kallen W., Maazen H., Stienstra J.* A presentation for some $K_2(n, R)$ // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1975. – 81, № 5. – P.934–936.
6. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Visn. Lviv Univ., Ser. Mech.-Math. –2003. – 61. – P. 206–210.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РЕДУКЦИЯ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ БЕЗУ *n*-РАЗ СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1

Доказано, что произвольный набор n-матриц над коммутативными кольцами Безу n-раз стабильного ранга 1 приводится к специальному треугольному виду с элементарными делителями на главной диагонали путем идентичных односторонних элементарных преобразований.

ELEMENTARY REDUCTION OF MATRICES OVER BEZOUT RING WITH *n*-FOLD STABLE RANGE 1

It is proved that an arbitrary set of n-matrices over commutative Bezout rings n-stable range 1 again reducible to a special triangular form with elementary divisors on the main diagonal by identical unilateral elementary transformations.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
02.09.12