УДК 512.552.12

Г. В. Зеліско

ГОЛОВНІ ПЛОСКІ ІДЕАЛИ КІЛЬЦЯ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Показано, що довільний головний ідеал у кільці матриць над областю елементарних дільників є плоским.

Нижче розглянемо лише комутативні області з одиницею, дотримуючись позначень і термінології з праць [1, 4].

Нехай A та B – такі прямокутні матриці над кільцем R, що $AB = 0$. Цю нульову рівність називають тривіальною, якщо існує така квадратна матриця X, що $AX = 0$ і $XB = B$. (Тоді рівність $AB = 0$ виконується автоматично.) У такому випадку кажуть, що матриця X тривіалізує рівність $AB = 0$. Замінимо матрицю X на $(1 - X)$. Бачимо, що рівність $AB = 0$ є тривіальна, якщо існує така квадратна матриця Y, що $AY = A$ і $YB = 0$.

Отримуємо такий результат.

Лема 1. *Правий ідеал aR кільця R є плоским тоді і тільки тоді, коли нульова рівність $ab = 0$, де $b \in R$, є тривіальна.*

Доведення. Припустимо, що aR – плоский модуль і для деякого елемента $b \in R$ виконується умова $ab = 0$. Завдяки стандартному критерію плоскості модулів [4] існують такі елементи $r_1, r_2, \mathbf{K}, r_n \in aR$ і $s_1, s_2, \mathbf{K}, s_n \in R$, що $a = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$ і $s_i b = 0$ для кожного $i = 1, \mathbf{K}, n$. Оскільки $r_i \in aR$, то $r_i = at_i$, де $t_i \in R$ для кожного $i = 1, \mathbf{K}, n$. Якщо $u = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i s_i$, то

$$au = a\left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i s_i\right) = a - \sum_{i=1}^{n} at_i s_i = a - \sum_{i=1}^{n} r_i s_i = a - a = 0$$

і

$$ub = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i s_i\right) b = b - \sum_{i=1}^{n} t_i s_i b = b - 0 = b .$$

Отже, $au = 0$ і $ub = b$. Необхідність доведена. Достатність доводять аналогічно, міркуючи в зворотному порядку. Лему доведено.

Відзначимо також такий результат.

Лема 2. [4]. *Довільна нульова рівність над кільцем R тривіалізується тоді і тільки тоді, коли кільце R є кільцем слабкої розмірності ≤ 1.*

Досліджуючи слабкі напівспадкові кільця, Бергман [2] розглядає кільця, над якими нульова рівність тривіалізується ідемпотентною матрицею. Зокрема, коли для довільної нульової рівності $AB = 0$ над R існує така ідемпотентна матриця E, що $AE = 0$ і $EB = B$.

Замінивши ідемпотентну матрицю E на матрицю $1 - E$, бачимо, що попередня умова еквівалентна умові існування такої ідемпотентної матриці F, що $AF = A$ і $FB = 0$.

Покажемо, що над комутативною областю елементарних дільників довільна нульова рівність тривіалізується ідемпотентною матрицею.

Нагадаємо, що комутативну область R називають областю елементарних дільників, якщо для довільної матриці A над R існують такі оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, що $PAQ = D$, де D – така діагональна матриця, що $D = (d_{ii})$ і $d_{ii} \mid d_{i+1,\, i+1}$ [3].

ISSN 1810-3022. **Прикл**. **проблеми мех**. **і мат**. – 2012. – **Вип**. 10. – **С**. 74–76.

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область елементарних дільників. Тоді довільна нульова матрична рівність $AB = 0$ над R тривіалізується ідемпотентною матрицею.*

Доведення. Нехай $A \in M_{m\times n}(R)$, $B \in M_{n\times k}(R)$ і $AB = 0$, причому $rangA = r \le m$. За означенням кільця R для матриці A існують такі оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $PAQ(Q^{-1}B) = 0$, тобто

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

Оскільки R є областю і $\varepsilon_1 \ne 0$, $\varepsilon_2 \ne 0, \ldots$, $\varepsilon_r \ne 0$, то з рівності (1) випливає, що

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rk} \end{pmatrix} = 0.$$

Отже,

$$Q^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{r+1,1} & c_{r+1,2} & \ldots & c_{r+1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Звідси $B = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$.

Розглянемо матрицю

$$Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1} = QIQ^{-1},$$

де в матриці I всі рядки і стовпці до $(r+1)$-го є нульовими, а починаючи з $(r+1)$-го рядка та стовпця по головній діагоналі стоять одиниці.

Зазначимо, що

$$(QIQ^{-1})(QIQ^{-1}) = QI^2Q^{-1} = QIQ^{-1},$$

тобто матриця $E = QIQ^{-1}$ ідемпотентна.

Крім того, тоді

$$AE = A(QIQ^{-1}) = 0$$

і

$$EB = (QIQ^{-1})B = B.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *У кільці матриць над комутативною областю елементарних дільників довільний головний ідеал є плоским.*

Доведення. Прямо випливає з теореми 1 та леми 1.

Наслідком теореми 1 та раніше сформульованих лем 1 та 2 є такий результат.

Теорема 3. *Кільце матриць над комутативною областю елементарних дільників є кільцем слабкої розмірності* ≤ 1.

1. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
2. *Bergman G.* Hereditary and cohereditary projective modules // Ring theory (Proc. Conf., Park City, Utah, 1971). – New York: Academic Press, 1972. – P. 29–62.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
4. *Puninski G., Rothmaler Ph.* When every finitely generated flat module is projective // J. Algebra. – 2004. – 277. – P. 542–558.

ГЛАВНЫЕ ПЛОСКИЕ ИДЕАЛЫ КОЛЬЦА МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Доказано, что каждый главный идеал в кольце матриц над областью элементарных делителей является плоским.

PRINCIPAL FLAT IDEALS IN THE RING OF MATRICES OVER COMMUTATIVE ELEMENTARY DIVISORS DOMAIN

It is proved that every principal ideal in the ring of matrices over elementary divisors domain is flat.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Одержано
04.09.12