УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

КАНОНІЧНА ФОРМА ПАРИ МАТРИЦЬ, ОДНА З ЯКИХ МАЄ ВСІ ПОПАРНО ВЗАЄМНО ПРОСТІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ДІЛЬНИКИ СТЕПЕНЯ НЕ ВИЩЕ ДВА

Вказано канонічну форму стосовно перетворення подібності для пари комплексних матриць, одна з яких має всі попарно взаємно прості елементарні дільники степеня не вище два.

Встановлена [6] канонічна форма в класі подібних для пари комплексних матриць за умови, що якась з тих матриць має усі різні власні значення. Іншими словами, геометрична та алгебрична кратності кожного власного значення однієї із матриць дорівнюють 1. Нижче зроблено спробу дещо послабити вимогу простоти всіх власних значень котроїсь із матриць пари і за таких умов одержати канонічну форму пари відносно перетворення подібності. Ця тематика безпосередньо стосується теорії матричних задач, яка активно розвивається впродовж багатьох десятиліть (див., наприклад, праці [1–7]).

Означення, **допоміжні твердження**. Розглянемо кільце $M_n(\mathrm{C})$ комплексних квадратних матриць порядку n. Поле C вважаємо лексикографічно впорядкованим: $a+bi \le c+di$, якщо $a<c$, або $a=c$ і $b \le d$. Домовимося форму Жордана матриці записувати так, щоб порядки діагональних кліток і власні значення цих кліток однакового порядку не спадали. За означенням *пертранспонованою* для $m \times n$-матриці A називають $n \times m$-матрицю ${}^tA = P_n A^t P_m$, де A^t – транспонована для матриці A, $P_n \in M_n(\mathrm{C})$, $P_m \in M_m(\mathrm{C})$ – периодичні матриці, тобто матриці з одиницями на побічних діагоналях та нульовими елементами поза цими діагоналями. Через 0 позначатимемо нульовий елемент поля C і нульові матриці різних розмірів, а через E_k – одиничну $k \times k$-матрицю.

Нехай (M, N) – пара матриць із $M_n(\mathrm{C})$, одна з яких, наприклад M, має усі власні значення геометричної та алгебричної кратності 1 та не вище 2 відповідно. Ця умова рівносильна тому, що всі елементарні дільники матриці M є попарно взаємно простими і їх степені не перевищують 2. Знайдемо канонічну форму для пари (M, N) відносно перетворення подібності в припущенні, що верхня межа 2 для степенів деяких елементарних дільників матриці M досягається.

Спочатку зведемо перетворенням подібності пару (M, N) до пари матриць (A, B), перша з яких є у формі Жордана:

$$P^{-1}(M, N)P = (A, B) =$$

$$= \left(\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ \hline & & & \Lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \Lambda_l \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1k} & b_{1,\,k+1} & \dots & b_{1,\,k+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & b_{k,\,k+1} & \dots & b_{k,\,k+l} \\ \hline b_{k+1,\,1} & \dots & b_{k+1,\,k} & b_{k+1,\,k+1} & \dots & b_{k+1,\,k+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k+l,\,1} & \dots & b_{k+l,\,k} & b_{k+l,\,k+1} & \dots & b_{k+l,\,k+l} \end{array} \right\| \right), \qquad (1)$$

де $\lambda_u, b_{uv} \in \mathrm{C}$ – для $u, v = 1, \dots, k$; $k \ge 0$; $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$; $\Lambda_i = \left\| \begin{matrix} \lambda_{k+i} & 1 \\ 0 & \lambda_{k+i} \end{matrix} \right\|$;

$b_{k+i,\,k+j} \in M_2(\mathrm{C})$ – для $i, j = 1, \mathbf{K}, l$; $l \ge 1$; $\lambda_{k+1} < \mathbf{K} < \lambda_{k+l}$; $b_{u,\,k+j}$, $b^t_{k+i,\,v}$ – рядки довжини 2. Зрозуміло, що пара (1) визначається неоднозначно. Якщо пара (M, N) подібна до деякої іншої пари (A', B') вигляду (1), то $A = A'$ і $B' = S^{-1}BS$ для деякої такої неособливої матриці S, що $SA = AS$. Тоді, очевидно,

$$S = diag(s_1, \mathbf{K}, s_k) \oplus \begin{Vmatrix} s_{k+1} & * \\ 0 & s_{k+1} \end{Vmatrix} \oplus \ \mathbf{K} \ \oplus \begin{Vmatrix} s_{k+l} & * \\ 0 & s_{k+l} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де зірочки означають деякі елементи із поля C. Таким чином, пару (A, B) вигляду (1) визначаємо з точністю до перетворення

$$B \to B' = S^{-1}BS, \tag{3}$$

де S – матриця вигляду (2), в якій $s_1, \mathbf{K}, s_{k+l}$ – довільні ненульові числа із поля C.

Нехай задано зорієнтований граф G з вершинами $1, \mathbf{K}, k + l$ без ненаправлених циклів. Скажемо, що подібність (3) під дією перетворювальної матриці S вигляду (2), де $s_1, \mathbf{K}, s_{k+l}$ – ненульові елементи поля C, є G-перетворенням, якщо $s_p = s_q$ для всіх зорієнтованих ребер $p \to q$ графа G.

На множині позицій (p, q), $p, q = 1, \mathbf{K}, k + l$, блоків матриці $B = \left\| b_{pq} \right\|_1^{k+l}$ пари (1) введемо лексикографічний порядок, аналогічний до впорядкування поля C, тобто $(p_1, q_1) \le (p_2, q_2)$, якщо $p_1 < p_2$, або $p_1 = p_2$ і $q_1 \le q_2$. Далі користуватимемося такою термінологією. *Першим відмінним від нуля елементом ненульової матриці* $\begin{Vmatrix} b & d \\ a & c \end{Vmatrix}$ (відповідно, *ненульового рядка* $\| a \ \ b \|$ або *стовпця* $\| b \ \ a \|^t$) назвемо перший ненульовий елемент впорядкованої четвірки чисел (a, b, c, d) (відповідно, пари (a, b)). Крім того, ненульовий елемент 1×1-матриці назвемо його *першим відмінним від нуля елементом.*

Твердження 1. *Позиції перших відмінних від нуля елементів блоків* b_{pq}, $p, q = 1, \mathbf{K}, k + l$, *матриці* B *пари* (1) *та діагональні елементи діагональних верхньотрикутних* 2×2*-блоків цієї матриці є інваріантами щодо перетворення* (3) *матрицею* S *вигляду* (2).

Доведення не викликає труднощів.

Майже канонічні форми пари. Наша мета – звести пару (A, B) до канонічної форми. На першому етапі встановимо так звану *майже канонічну форму*, яка визначається з меншим, ніж пара (A, B), ступенем неоднозначності. Трансформацію, аналогічно до викладеного раніше [6] методу, здійснюватимемо декількома кроками. Для цього розглянемо матрицю $B = \left\| b_{pq} \right\|_1^{k+l}$ пари (1), де блоки b_{pq} мають розміри $n_{pq} \times m_{pq}$, $n_{pq}, m_{pq} \le 2$. Позначимо через G_0 граф з вершинами $1, \mathbf{K}, k + l$ без ребер.

Крок 1. Якщо блок b_{11} має розмір 1×1 або є нульовим, то він є незмінним за G_0-перетворень. Фіксуємо цей блок як зведений. В іншому разі незмінними є позиція його першого відмінного від нуля елемента і сам цей елемент. Фіксуємо цей елемент і записуємо $(B_1, G_1) := (B, G_0)$.

Крок *2*. Якщо блок b_{12} нульовий, то він незмінний за G_1-перетворень. Фіксуємо його як зведений і пишемо $(B_2, G_2) := (B_1, G_1)$. Якщо цей блок b_{12}

ненульовий, то за допомогою G_1-перетворення робимо рівним одиниці перший відмінний від нуля його елемент. Додаємо зорієнтоване ребро $1 \to 2$ до графа G_1 і позначаємо результуючі матрицю і граф відповідно B_2 і G_2. Отже, на другому кроці матимемо (B_2, G_2).

Продовжуємо так і далі спочатку блоками першого блочного рядка, а потім – зліва направо блоками другого рядка і т.д.

Крок h. Нехай b_{pq} є h-ий блок отриманої на попередньому $(h-1)$-му кроці матриці B_{h-1}. Тоді $h=(p-1)(k+l)+q$. Якщо блок b_{pq} нульовий, то фіксуємо його як зведений. Якщо b_{pq} ненульовий блок і $p=q$ або граф G_{h-1} має ненаправлений шлях від p до q, то незмінним є перший відмінний від нуля елемент блока b_{pq}. Фіксуємо цей елемент як зведений і щоразу пишемо $(B_h, G_h) := (B_{h-1}, G_{h-1})$. В іншому випадку за допомогою G_{h-1}-перетворення робимо перший відмінний від нуля елемент блока b_{pq} рівним одиниці. Додаємо до графа G_{h-1} зорієнтоване ребро $p \to q$ і позначаємо через B_h і G_h. результуючі матрицю і граф відповідно. Таким чином, на h-му кроці дістанемо пару матриці і графа (B_h, G_h).

Продовжуємо так і далі. Через $t^2=(k+l)^2$ кроків дістанемо матрицю B_{t^2}, в якій будуть зафіксовані всі нульові блоки як зведені, а також перші відмінні від нуля елементи кожного ненульового блока. Отриману пару матриць назвемо *майже* G_{t^2}*-канонічною.*

Означення 1. *Нехай* G *– зорієнтований граф з вершинами* $1, \ldots, k+l$ *без ненаправлених циклів. Пару матриць*

$$(A, B) = \left(\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \mathbf{O} & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ \hline & & & \Lambda_1 & & \\ & & & & \mathbf{O} & \\ 0 & & & & & \Lambda_l \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right\| \right), \tag{4}$$

де

$$\left\| \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \ldots & b_{1k} & b_{1,\,k+1} & \ldots & b_{1,\,k+l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} & b_{k,\,k+1} & \ldots & b_{k,\,k+l} \\ \hline b_{k+1,\,1} & \ldots & b_{k+1,\,k} & b_{k+1,\,k+1} & \ldots & b_{k+1,\,k+l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k+l,\,1} & \ldots & b_{k+l,\,k} & b_{k+l,\,k+1} & \ldots & b_{k+l,\,k+l} \end{array} \right\|,$$

$\lambda_u, b_{uv} \in \mathrm{C}$ *– для* $u, v = 1, \ldots, k$; $k \geq 0$; $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$; $\Lambda_i = \left\| \begin{matrix} \lambda_{k+i} & 1 \\ 0 & \lambda_{k+i} \end{matrix} \right\|$; $b_{k+i,\,k+j} \in M_2(\mathrm{C})$ *– для* $i, j = 1, \ldots, l$; $l \geq 1$; $\lambda_{k+1} < \ldots < \lambda_{k+l}$, *називають майже* G*-канонічною, якщо блоки* b_{pq} $(p, q = 1, \ldots, k+l)$ *другої з них задовольняють умови*

(i) *перший відмінний від нуля елемент блока* b_{pq} *дорівнює одиниці, якщо граф* G *містить зорієнтоване ребро* $p \to q$;

(ii) *блок* b_{pq} *є нульовим, якщо граф* G *не має неорієнтованого шляху від* p *до* q, *або неорієнтований шлях від* p *до* q *містить таке зорієнтоване ребро* $i \to j$, *що* $(i, j) > (p, q)$ *відносно лексикографічного порядку*;

(iii) *блок* b_{pq} *є довільним в іншому разі.*

Майже G-канонічну форму пари (M, N) позначатимемо $(M, N)_{ncan}$.

Теорема 1. *Для кожної пари* (M, N), *в якій матриця* M *має усі попарно взаємно прості елементарні дільники степеня не вище два, існує єдиний зорієнтований граф* G *і майже* G*-канонічна пара* $(M, N)_{ncan}$ *вигляду* (4) *з властивостями* (i)–(iii) *така, що пара* (M, N) *подібна до* $(M, N)_{ncan}$. *Дві пари* (M, N), (M', N') *подібні тоді і тільки тоді, коли їх майже* G*-канонічні форми* $(M, N)_{ncan}$, $(M', N')_{ncan}$ *(для одного і того ж графа* G*) можна перевести одна в одну матрицею перетворення подібності вигляду*

$$S = E_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} S_j, \quad S_j = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_j \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

Доведення. *Достатність* очевидна.

Необхідність. З подібності пар (M, N), (M', N') випливає подібність їх майже G-канонічних форм $(M, N)_{ncan}$, $(M', N')_{ncan}$, в яких перші матриці збігаються з першою матрицею пари (4). Це означає, що матриця S перетворення подібності $(M', N')_{ncan} = S^{-1}(M, N)_{ncan} S$ має вигляд (2). З того, що в (p, q)-блоках других матриць пар $(M, N)_{ncan}$, $(M', N')_{ncan}$ перші відмінні від нуля елементи дорівнюють одиниці, якщо граф G містить зорієнтоване ребро $p \to q$, випливає рівність $s_p = s_q$ для елементів матриці S. А це означає, що матрицю S можна вибрати у вигляді (5). Теорема доведена.

Теорема 2. *Майже* G*-канонічна форма* $(M, N)_{ncan}$, а *отже, пара* (M, N) *не зводиться перетворенням подібності до прямої суми пар, якщо граф* G *є деревом. Якщо граф* G *є об'єднанням дерев* G_i, $i = 1, \ldots, s$, *що не перетинаються, з вершинами* $u_{i1}, \ldots, u_{it_i}$ *відповідно, то майже* G*-канонічна форма* $(M, N)_{ncan}$ *є перестановно подібна до прямої суми далі незвідних пар* (A_i, B_i), *які є майже* G_i'*-канонічними формами для деякого графа* G_i', *отриманого з графа* G_i *перенумерацією його вершин* $u_{i1}, \ldots, u_{it_i}$ *на* $1, \ldots, t_i$.

Доведення. Перша частина є очевидною. Оскільки блоки на перетині u_{ip}-го та u_{jq}-го блочних рядків і стовпців матриць пари $(M, N)_{ncan}$ є нульовими, якщо $i \neq j$, то звідси і випливає переставна подібність пари $(M, N)_{ncan}$ до прямої суми s пар вказаного у теоремі вигляду. Теорема доведена.

Надалі розглядатимемо майже G-канонічні пари, де граф G є деревом.

Нехай $(M, N)_{ncan} = (A, B)$, де пара (A, B) має вигляд (4). Якщо усі власні значення матриці M кратні, тобто $k = 0$, то підматриці B_1, B_2, B_3 є порожніми. В іншому разі, як уже зазначалося, блоки b_{uv}, $u, v = 1, \ldots, k$, мають розміри 1×1, $b_{u, k+j}$ – рядки довжини 2, $b_{k+i, v}$ – стовпці висоти 2. Як випливає з теореми 1, підматриця B_1 незмінна за перетворень подібності з матрицею переходу вигляду (5). Її вважають зведеною до канонічної форми.

Встановимо спочатку канонічну форму для діагональних 2×2-блоків матриці B пари (A, B) відносно перетворення подібності перетворювальною матрицею вигляду $\begin{Vmatrix} 1 & \alpha_j \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, яка є прямим доданком матриці (5). Таких канонічних форм, очевидно, є три:

$$\begin{Vmatrix} 0 & * \\ c & * \end{Vmatrix},\ c \neq 0, \tag{6}$$

для матриць, які не є верхньотрикутними;

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix},\ a \neq b, \tag{7}$$

для верхньотрикутних матриць з нерівними діагональними елементами;
та матриці

$$\begin{Vmatrix} d & * \\ 0 & d \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пара* (M, N), *яка задовольняє умови теореми* 1, *подібна до майже* G*-канонічної пари* (A, B) *вигляду* (4), *в якій кожен з діагональних блоків* $b_{k+i,\,k+i}$, $i = 1, \mathbf{K}, l$, *матриці* B *має одну з канонічних форм* (6), (7) *або* (8).

Доведення. Нехай пара (M, N) зведена до майже G-канонічної пари (A, B) вигляду (4). Якщо деякий діагональний блок $b_{k+i,\,k+i}$ матриці B не є верхньотрикутним або верхньотрикутним з нерівними діагональними елементами, то можна підібрати перетворення подібності

$$b_{k+i,\,k+i} \to \begin{Vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} b_{k+i,\,k+i} \begin{Vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

яке зводить цей блок до канонічної форми (6) або (7) відповідно. Якщо ж блок $b_{k+i,\,k+i}$ є верхньотрикутним з рівними діагональними елементами, то він уже має канонічну форму (8). Тому матрицю (5) можна підібрати так, що перетворення

$$(A, B) \to (E_k \oplus \textstyle\bigoplus_{j=1}^{l} S_j)^{-1}(A, B)(E_k \oplus \textstyle\bigoplus_{j=1}^{l} S_j)$$

дасть потрібний результат. Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай майже* G*-канонічна пара* (A, B) *вигляду* (4), *задовольняє такі умови*:

1) *кожен діагональний* 2×2*-блок матриці* B *має канонічну форму* (6), (7) *або* (8);

2) *існують недіагональні блоки матриці* B *вигляду* $\begin{Vmatrix} * & * \\ c & * \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$, *які не лежать в одному блочному рядку чи стовпці з діагональними блоками вигляду* (6) *або* (7). *Рухаючись блочними рядками матриці* B *зліва направо послідовно зверху вниз, зафіксуємо максимальний набір перших позицій*

$$H = \{(i_1, j_1), \mathbf{K}, (i_m, j_m)\},\quad (i_1, j_1) < \mathbf{K} < (i_m, j_m), \tag{9}$$

описаних в умові 2) *блоків, такий, що перетин* $\{i_u, j_u\} \cap \{i_v, j_v\}$ *є порожній при* $u \neq v$. *Тоді пара* (M, N) *подібна до майже* G*-канонічної пари з* *умовою* 1), *в якій у всіх позиціях набору* (9) *другої матриці знаходяться блоки вигляду* $\begin{Vmatrix} 0 & * \\ c & 0 \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$.

Доведення. Легко переконатися, що для кожного з блоків $b_{i_u,\, j_u}$, $u = 1, \ldots, m$, у позиціях набору (9) можна підібрати числа α_{i_u}, α_{j_u} так, що виконується рівність

$$\begin{Vmatrix} 1 & -\alpha_{i_u} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} b_{i_u,\, j_u} \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_{j_u} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & * \\ c & 0 \end{Vmatrix},\ c \neq 0 .$$

Побудуємо матрицю $S = E_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} S_j$ з діагональними блоками S_j вигляду

$$S_{i_u - k} = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_{i_u} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ S_{j_u - k} = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_{j_u} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ u = 1, \ldots, m ,$$

і $S_p = E_2$ для всіх p, відмінних від $i_u - k$ і $j_u - k$, якщо $2m < l$. Застосувавши до пари (A, B) перетворення подібності $(A, B) \to S^{-1}(A, B)S$ утвореною матрицею S, дістанемо майже G-канонічну пару з потрібними властивостями. Теорема доведена.

Означення 2. *Майже* G*-канонічну пару, до якої за теоремою* 4 *подібна пара* (M, N), *називають майже* HG*-канонічною парою, де* H *означає набір позицій* (9) *недіагональних блоків вигляду* $\begin{Vmatrix} 0 & * \\ c & 0 \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$, *другої матриці, які не лежать в одному блочному рядку чи стовпці з діагональними блоками вигляду* (6) *або* (7).

Зауваження 1. Якщо в другій матриці майже G-канонічної пари не існує блоків, про які йдеться в умові 2) теореми 4, то таку пару називатимемо майже HG-канонічною, вважаючи набір H порожнім.

Нехай пара (A, B) є майже HG-канонічною. Об'єднання множини номерів блочних рядків (чи стовпців) матриці B, в яких діагональні блоки мають канонічну форму (6) або (7), з множиною $\{i_1, j_1, \ldots, i_m, j_m\}$ (див. (9)) упорядкуємо за зростанням. Після перепозначення елементів отримаємо множину

$$\{p_1, \ldots, p_s\},\ k < p_1 < \ldots < p_s \le k + l . \tag{10}$$

Якщо $s < l$, то непорожню множину

$$\{q_1, \ldots, q_r\} = \{k + 1, \ldots, k + l\} \setminus (p_1, \ldots, p_s) \tag{11}$$

також вважатимемо упорядкованою за зростанням, тобто $q_1 < \ldots < q_r$, $r = l - s$.

Твердження 2. *Майже* HG*-канонічна пара* (A, B) *визначається з точністю до перетворення подібності* (3) *матрицею* S *вигляду* (5), *в якій* $S_i = E_2$, *для* $i = p_1 - k, \ldots, p_s - k$, *де* $p_1, \ldots, p_s$ *взято із множини* (10).

Доведення. Оскільки майже HG-канонічна пара (A, B) є майже G-канонічною, то, як зазначено в теоремі 1, граф G визначається однозначно. Також інваріантом є набір H позицій (9), описаний у теоремі 4, якщо дотримуватися кожен раз того самого порядку фіксації цих позицій (рухаючись блочними рядками зліва направо послідовно зверху вниз).

Якщо майже HG-канонічні пари (A, B) і (A, B') подібні, то виконується рівність $BS = SB'$, де матриця S має вигляд (5). Порівнюючи в обох частинах останньої рівності діагональні блоки в позиціях блоків вигляду (6) і (7), а також блоки в позиціях набору H, можемо дістати, що в матриці S елементи α_i, для $i = p_1 - k, \ldots, p_s - k$, нульові. А це означає, що діагональні блоки S_i матриці S одиничні. Твердження доведено.

Канонічна форма пари – основний результат. Нехай маємо майже HG-канонічну пару (A, B). Розглянемо послідовність

$$b_{1q_i}, \ldots, b_{kq_i}, b_{p_1, q_i}, \ldots, b_{p_s, q_i}, {}^t b_{q_i 1}, \ldots, {}^t b_{q_i k}, {}^t b_{q_i, p_1}, \ldots, {}^t b_{q_i, p_s}, \; 1 \le i \le r, \quad (12)$$

складену з вказаних блоків q_i-го блочного стовпця та відповідних пертранспонованих блоків q_i-го блочного рядка матриці B (q_i взято із (11)). Якщо деякі блоки послідовності (12) мають ненульовий перший стовпець, то зафіксуємо перший такий блок цієї послідовності, а в ньому – перший відмінний від нуля елемент a_i його першого стовпця. Нехай цей елемент у матриці B знаходиться в q_i-му блочному стовпці (в q_i-му блочному рядку) і займає позицію $(k_i, l_i - 1)$ (відповідно, позицію $(k_i + 1, l_i)$). Тоді елементу в позиції (k_i, l_i) матриці B поставимо у відповідність рядок довжини r вигляду

$$\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; a_i \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \right\|, \quad (13)$$

в якому ненульовий елемент знаходиться в i-ій позиції. З таких рядків складаємо матрицю $\tilde{B}_1$, розміщуючи рядок (13) вище рядка

$$\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; a_j \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \right\|,$$

якщо $i < j$.

Далі розглянемо послідовність недіагональних 2×2-блоків матриці B, розташованих у блочних рядках і стовпцях з номерами $q_1, \ldots, q_r$ (див. (11)):

$$b_{q_1, q_2}, \ldots, b_{q_1, q_r}, b_{q_2, q_1}, b_{q_2, q_3}, \ldots, b_{q_2, q_r}, \ldots, b_{q_r, q_1}, \ldots, b_{q_r, q_{r-1}}. \quad (14)$$

Всі ці блоки, очевидно, є верхньотрикутними. Для кожного блока

$$b_{q_i, q_j} = \left\| \begin{matrix} a_{ij} & c_{ij} \\ 0 & b_{ij} \end{matrix} \right\|, \; i, j = 1, \ldots, r, \; i \ne j$$

побудуємо рядок довжини r вигляду

$$\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; a_{ij} \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; -b_{ij} \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \right\|,$$

якщо $i > j$, або рядок

$$\left\| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; -b_{ij} \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; a_{ij} \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \right\|,$$

якщо $i < j$. Елементи a_{ij} і $-b_{ij}$ в цих рядках стоять відповідно в j-ій та i-ій позиціях. Скажемо, що побудований *рядок поставлений у відповідність елементу* c_{ij} або його позиції (r_i, s_j) у матриці B. З цих рядків складаємо матрицю $\tilde{B}_2$, розміщуючи їх у відповідності до послідовності (14). Далі утворюємо матрицю

$$\tilde{B} = \left\| \begin{matrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{matrix} \right\| \quad (15)$$

і зафіксуємо в ній максимальну систему перших лінійно незалежних рядків. Оскільки кожен рядок матриці $\tilde{B}$ відповідає деякій одній позиції матриці B, то знайдена система лінійно незалежних рядків визначає певний набір F позицій елементів матриці B, яким відповідають рядки цієї системи.

Теорема 5. *Пара матриць* (M, N) *подібна до майже* HG*-канонічної пари* (A, B) *з нульовими елементами матриці* B *у позиціях набору* F, *яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків матриці* $\tilde{B}$ (15). *Така пара* (A, B) *визначається однозначно.*

Доведення. *Існування*. Нехай пара (M, N) зведена до майже HG-канонічної пари (A, B) і D – підматриця матриці $\tilde{B}$, складена з максимального числа $h \le r$ перших її лінійно незалежних рядків. Нехай також $d_1, \ldots, d_h$ – елементи матриці B у позиціях набору F, яким відповідають рядки матриці D. Розглянемо рівняння

$$D\|x_1 \quad \ldots \quad x_r\|^t = \|d_1 \quad \ldots \quad d_h\|^t$$

з невідомими $x_1, \ldots, x_r$. Оскільки рядки матриці D лінійно незалежні, то це рівняння має розв'язок $x_1 = \alpha_{q_1}, \ldots, x_r = \alpha_{q_r}$. Зрозуміло, що невідомі компоненти x_j, які "падають" на нульові стовпці матриці D, вважають нульовими. Утворимо матрицю вигляду (5), в якій

$$S_i = E_2, \quad i = p_1 - k, \ldots, p_s - k, \quad S_u = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_{u+k} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad u = q_1 - k, \ldots, q_r - k. \qquad (16)$$

Тут $p_1, \ldots, p_s$ і $q_1, \ldots, q_r$ взято із (10) і (11). За допомогою цієї матриці перетворимо подібністю пару (A, B): $(A, B) \to (E_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} S_j)^{-1}(A, B)(E_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} S_j)$. В результаті такої трансформації перша матриця не зміниться. Не зазнають змін також і всі блоки на перетині блочних рядків і стовпців з номерами $1, \ldots, k$, $p_1, \ldots, p_s$ другої матриці. Перетворення торкнеться лише q_i-го блочного рядка та q_i-го стовпця, якщо один з них містить деякий з елементів $\{d_1, \ldots, d_h\}$. При цьому в позиціях цих елементів перетвореної матриці стоятимуть нулі.

Єдиність. З твердження 2 випливає, що в матриці B майже HG-канонічної пари (A, B) однозначно визначаються блоки, розташовані на перетині блочних рядків і стовпців з номерами $1, \ldots, k, p_1, \ldots, p_s$. Нескладно бачити, що в блоках на перетині блочних рядків (стовпців) з номерами $1, \ldots, k, p_1, \ldots, p_s$ і блочних стовпців (рядків) з номерами $q_1, \ldots, q_r$ однозначно визначаються перші стовпці (другі рядки). Всі інші елементи, взагалі кажучи, є змінними за перетворень майже HG-канонічної пари (A, B) в іншу подібну майже HG-канонічну пару. З цього випливає, що матриця $\tilde{B}$ (15) єдина для класу подібних майже HG-канонічних пар, а також, однозначно визначається і набір F позицій елементів другої матриці майже HG-канонічної пари.

Нехай маємо дві подібні майже HG-канонічні пари (A, B) і (A, B') з нульовими елементами матриць B і B' в усіх позиціях набору F. Тоді існує матриця

$$S = E_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} S_j$$

з блоками S_j вигляду (16), яка задовольняє рівність $BS = SB'$ (див. твердження 2). Порівнюємо в обох частинах останньої рівності елементи в других стовпцях (перших рядках) блоків на перетині блочних рядків (блочних стовпців) з номерами $1, \ldots, k, p_1, \ldots, p_s$ і блочних стовпців (блочних рядків) з номерами $q_1, \ldots, q_r$. Також порівнюємо елементи в позиціях (1, 2) блоків у блочних рядках і стовпцях з номерами $q_1, \ldots, q_r$. З отриманих рівностей можна записати одну матричну рівність вигляду

$$C \left\| \alpha_{q_1} \ \ldots \ \alpha_{q_r} \right\| = \bar{c} .$$

Матриця C містить кратні рядків матриці D, які утворюють максимальну систему перших лінійно незалежних рядків матриці $\breve{B}$ (15). Права частина $\bar{c}$ є стовпцем різниць відповідних елементів матриць B і B', які є змінними за подібних перетворень пар (A, B) і (A, B'). Оскільки рядки матриці C є лінійними комбінаціями рядків матриці D і $D \left\| \alpha_{q_1} \ \ldots \ \alpha_{q_r} \right\| = 0$, то це означає, що $\bar{c} = 0$, тобто $B = B'$. Теорема доведена.

Означення 3. *Майже HG-канонічну пару (A, B) з нульовими елементами матриці B у позиціях набору F, яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків матриці $\breve{B}$ (15), називають FHG-канонічною.*

Зауваження 2. Якщо кожен блок послідовності (12) (для кожного $i = 1, \ldots, r$) має нульовий перший стовпець, то в матриці $\breve{B}$ (15) підматриця $\breve{B}_1$ порожня. Якщо, крім цього, всі блоки послідовності (14) мають нульові діагоналі, то підматриця $\breve{B}_2$ і загалом матриця $\breve{B}$ є нульові. В такому разі майже HG-канонічну пару називаємо FHG-канонічною, вважаючи набір позицій F порожнім.

Зауваження 3. У випадку простоти всіх власних значень матриці M встановлену в [6] G-канонічну форму пари (M, N) можна вважати, очевидно, FHG-канонічною в сенсі означення 3. Тут набори H і F є порожніми.

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1977. – 71. – С. 24–41.
2. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
3. *Сергейчук В. В., Галинский Д. В.* Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 413–430.
4. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial nuil multiplication // Algebra and Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 10–18.
5. *Drozd Yu. A.* Derived tame and derived wild algebras // Algebra and Discrete Math. – 2004. – № 1. – P. 57–74.
6. *Vyacheslav Futorny, Roger A. Horn, Vladimir V. Sergeichuk.* A canonical form for nonderogatory matrices under unitary similarity // Linear Algebra and its Applications. – 2011. – 435. – P. 830–841.
7. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra and its Applications. – 2000. – 317. – P. 53–102.

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ПАРЫ МАТРИЦ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ВСЕ ПОПАРНО ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ СТЕПЕНИ НЕ ВЫШЕ ДВА

Указана каноническая форма относительно преобразования подобия для пары комплексных матриц, одна из которых имеет все попарно взаимно простые элементарные делители степени не выше два.

CANONICAL FORM FOR PAIR OF MATRICES, IN WHICH ONE MATRIX HAS ALL PAIRWISE RELATIVELY PRIME ELEMENTARY DIVISORS OF DEGREE AT MOST TWO

We give canonical form for pair of complex matrices up to similarity transformation, in which one matrix has all pairwise relatively prime elementary divisors of degree at most two.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.09.12