УДК 512.643.4

Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович

РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНОГО ДІОФАНТОВОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Запропоновано метод побудови розв'язків матричних однобічних діофантових поліноміальних рівнянь, який ґрунтується на трикутних формах з інваріантними множниками на головних діагоналях набору поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності. Подано розв'язки мінімальних степенів цих рівнянь та встановлено критерій однозначності таких розв'язків.

Матричні різнобічні діофантові поліноміальні рівняння (інша назва – матричні поліноміальні рівняння Сильвестра)

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda) \tag{1}$$

та матричні однобічні діофантові поліноміальні рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + B(\lambda)Y(\lambda) = C(\lambda), \tag{2}$$

де $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$ – відомі, $X(\lambda), Y(\lambda)$ – невідомі поліноміальні матриці відповідних розмірів над кільцем поліномів $P[\lambda]$, де P – поле, відіграють фундаментальну роль у багатьох задачах теорії керування та динамічних систем [8, 12–15].

Важливою задачею є класифікація розв'язків таких рівнянь, зокрема за їх степенями. Зрозуміло, що ці рівняння мають розв'язки необмежених зверху степенів. Тому одна із задач – вказати мінімальний степінь розв'язків таких рівнянь.

Для матричного різнобічного діофантового поліноміального рівняння (1), в якому матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ квадратні, добре відомі [6, 9] результати про існування та єдиність так званого мінімального розв'язку, тобто такої пари матриць $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ та $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$. Якщо визначники регулярних матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ взаємно прості і

$$\deg C(\lambda) \le \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 1, \tag{3}$$

то таке рівняння має мінімальний розв'язок і він єдиний [6]. У праці [9] такий розв'язок названо мінімальним, а також доведено, що результат праці [6] справедливий, коли хоча б одна із матриць $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ є регулярною. Якщо такий мінімальний розв'язок рівняння (1) існує, то він неєдиний тоді і тільки тоді, коли обидві матриці $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ нерегулярні [9].

Важливо відзначити, що на відміну від матричного різнобічного діофантового рівняння (1) матричне однобічне діофантове рівняння (2), в якому матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ регулярні, їх визначники взаємно прості та виконується умова (3), може не мати мінімальних розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, тобто таких, що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ та $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$.

Розв'язки рівняння (1) з мінімальним степенем однієї із компонент $X(\lambda)$ або $Y(\lambda)$ побудовані в праці [3], коли матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ регулярні, і в праці [1], коли вони довільні неособливі, там же встановлені критерії однозначності таких розв'язків.

Деякі способи розв'язування матричних однобічних діофантових поліноміальних рівнянь (2) наведені в працях [12–15]. У працях [10, 11] вказані умови існування розв'язків певних степенів (зокрема, нульового) матричного однобічного діофантового поліноміального рівняння (2) і деякі умови їх однозначності.

У цій праці, застосовуючи поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць та трикутні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях набору поліноміальних матриць щодо такої еквівалентності, розробили метод побудови розв'язків матричних однобічних діофантових поліноміальних рівнянь (2), в яких $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – довільні прямокутні матриці. Вказано розв'язки мінімальних степенів цих рівнянь та встановлено критерій однозначності таких розв'язків.

Відомо [7], що діофантове поліноміальне рівняння

$$a(\lambda)x(\lambda)+b(\lambda)y(\lambda)=c(\lambda)\,, \tag{4}$$

де $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$ – відомі, $x(\lambda), y(\lambda)$ – невідомі поліноми з $P[\lambda]$, де P – поле, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $(a(\lambda), b(\lambda))\,|\, c(\lambda)$ (ділить). Якщо рівняння (4) розв'язне, то воно має розв'язок $x(\lambda), y(\lambda)$ такий, що $\deg x(\lambda)<\deg b(\lambda)$, і цей розв'язок єдиний тоді і тільки тоді, коли $(a(\lambda), b(\lambda))=1$. Враховуючи ці результати, неважко переконатися у справедливості такого твердження.

Лема 1. *Діофантове поліноміальне рівняння* (4) *має єдиний мінімальний розв'язок* $x(\lambda), y(\lambda)$, *тобто такий, що* $\deg x(\lambda)<\deg b(\lambda)$ *та* $\deg y(\lambda)<\deg a(\lambda)$ *тоді і тільки тоді, коли* $(a(\lambda), b(\lambda))=1$ *та* $\deg c(\lambda)<\deg a(\lambda)+\deg b(\lambda)$.

Позначатимемо далі через $M(n,P)$ та $M(n,P[\lambda])$ кільця $n\times n$-матриць над P та $P[\lambda]$ відповідно, і $M(m,n,P)$ та $M(m,n,P[\lambda])$ – множини $m\times n$-матриць над P та $P[\lambda]$ відповідно. Через $d_k^A(\lambda)$ – найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку, $\mu_k^A(\lambda)$ – k-ий інваріантний множник, $D^A(\lambda)$ – канонічну діагональну форму матриці $A(\lambda)\in M(m,n,P[\lambda])$, тобто

$$D^A(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)=\operatorname{diag}(\mu_1^A(\lambda),\ldots,\mu_r^A(\lambda),0,\ldots,0),\quad \mu_r^A(\lambda)\neq 0,$$

де $\mu_i^A(\lambda)\,\big|\,\mu_{i+1}^A(\lambda)$, $i=1,\ldots,r-1$, $U(\lambda)\in GL(m,P[\lambda])$, $V(\lambda)\in GL(n,P[\lambda])$.

Розглянемо далі матричне однобічне діофантове поліноміальне рівняння

$$A_1(\lambda)X(\lambda)+A_2(\lambda)Y(\lambda)=A_3(\lambda), \tag{5}$$

де $A_k(\lambda)\in M(m,n_k,P[\lambda]),\ k=1,2,3$ – відомі, $X(\lambda)\in M(n_1,n_3,P[\lambda])$, $Y(\lambda)\in M(n_2,n_3,P[\lambda])$ – невідомі матриці. Вважатимемо, що $m\le n_k$, $k=1,2,3$.

Нехай

$$QA_k(\lambda)R_k(\lambda)=T^{A_k}(\lambda)\,,\ Q\in GL(m,P)\,,\ R_k(\lambda)\in GL(n_k,P[\lambda])\,,\ k=1,2,3\,, \tag{6}$$

– трикутні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях матриць $A_k(\lambda)$ щодо напівскалярної еквівалентності, тобто

$$T^{A_k}(\lambda)=\begin{Vmatrix}
\mu_1^{A_k}(\lambda) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_{21}^{(k)}(\lambda)\mu_1^{A_k}(\lambda) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
t_{r_k-1,1}^{(k)}(\lambda)\mu_1^{A_k}(\lambda) & \cdots & \mu_{r_k-1}^{A_k}(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0\\
t_{r_k,1}^{(k)}(\lambda)\mu_1^{A_k}(\lambda) & \cdots & t_{r_k,r_k-1}^{(k)}(\lambda)\mu_{r_k-1}^{A_k}(\lambda) & t_{r_k,r_k}^{(k)}(\lambda)\mu_{r_k}^{A_k}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
t_{m,1}^{(k)}(\lambda)\mu_1^{A_k}(\lambda) & \cdots & t_{m,r_k-1}^{(k)}(\lambda)\mu_{r_k-1}^{A_k}(\lambda) & t_{m,r_k}^{(k)}(\lambda)\mu_{r_k}^{A_k}(\lambda) & 0 & \cdots & 0
\end{Vmatrix},$$

де $r_k = \mathrm{rang} A_k(\lambda)$, $\left(t^{(k)}_{r_k,r_k}(\lambda), t^{(k)}_{r_k+1,r_k}(\lambda), \ldots, t^{(k)}_{m,r_k}(\lambda)\right) = 1$, і

1) $t^{(k)}_{qj}(\lambda) \equiv 0$, якщо $\mu^{A_k}_q(\lambda) = \mu^{A_k}_j(\lambda)$;

2) $\deg t^{(k)}_{qj}(\lambda) < \deg \mu^{A_k}_q(\lambda) - \deg \mu^{A_k}_j(\lambda)$, якщо $\mu^{A_k}_q(\lambda) \neq \mu^{A_k}_j(\lambda)$ і $t^{(k)}_{qj}(\lambda) \not\equiv 0$, $q, j = 1, \ldots, r_i - 1$, $q > j$, $k = 1, 2, 3$ [2, 4, 5].

Враховуючи рівності (6), з рівняння (5) отримуємо матричне рівняння

$$T^{A_1}(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + T^{A_2}(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) = T^{A_3}(\lambda), \tag{7}$$

де $\tilde{X}(\lambda) = (R_1(\lambda))^{-1} X(\lambda) R_3(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda) = (R_2(\lambda))^{-1} Y(\lambda) R_3(\lambda)$.

Рівняння (7) називатимемо *асоційованим* до рівняння (5). Відповідно розв'язки $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$ рівняння (7) і розв'язки $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ рівняння (5) називатимемо *асоційованими*.

Лема 2. *Матричне рівняння* (5) *та асоційоване рівняння* (7) *еквівалентні, тобто рівняння* (5) *розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язне рівняння* (7) *та кожному розв'язку рівняння* (5) *відповідає розв'язок рівняння* (7) *і навпаки.*

Доведення. Добре відомо [12, 14], що матричне однобічне діофантове поліноміальне рівняння (5) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці $\| A_1(\lambda)\ A_2(\lambda)\ A_3(\lambda) \|$ та $\| A_1(\lambda)\ A_2(\lambda)\ 0 \|$ правоеквівалентні.

Із правоеквівалентності матриць $\| A_1(\lambda)\ A_2(\lambda)\ A_3(\lambda) \|$ та $\| A_1(\lambda)\ A_2(\lambda)\ 0 \|$ та із співвідношення (6) випливає правоеквівалентність матриць $\left\| T^{A_1}(\lambda)\ T^{A_2}(\lambda)\ T^{A_3}(\lambda) \right\|$ та $\left\| T^{A_1}(\lambda)\ T^{A_2}(\lambda)\ \ 0 \right\|$, і навпаки. Отже, рівняння (5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язне рівняння (7).

Кожному розв'язку $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$ рівняння (7) відповідає розв'язок

$$X(\lambda) = R_1(\lambda)\tilde{X}(\lambda)(R_3(\lambda))^{-1}, \ Y(\lambda) = R_2(\lambda)\tilde{Y}(\lambda)(R_3(\lambda))^{-1} \tag{8}$$

рівняння (5), і навпаки.

Лему доведено.◊

Таким чином, опис розв'язків рівняння (5) зводиться до опису розв'язків асоційованого рівняння (7).

Теорема 1. *Нехай матричне рівняння* (7) *розв'язне і* $\deg \mu^{A_3}_i(\lambda) < \deg \mu^{A_1}_i(\lambda) + \deg \mu^{A_2}_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, s-1$, $s = \min(r_1, r_2, r_3)$, $r_k = \mathrm{rang} T^{A_k}(\lambda)$, $k = 1, 2, 3$. *Тоді рівняння* (7) *має розв'язки* $\tilde{X}(\lambda) = \left\| \tilde{x}_{ij}(\lambda) \right\|^{n_1, n_3}$, $\tilde{Y}(\lambda) = \left\| \tilde{y}_{ij}(\lambda) \right\|^{n_2, n_3}$ *такі, що*

а) $\deg \tilde{x}_{ij}(\lambda) < \deg \mu^{A_2}_i(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{ij}(\lambda) < \deg \mu^{A_1}_i(\lambda)$, *якщо* $i = 1, \ldots, s-1$, $j = 1, \ldots, n_3$;

б) *якщо* $s = r_3$, $s \neq r_q$, $q = 1, 2$, *то*

1) $\deg \tilde{x}_{sj}(\lambda) < \deg \mu^{A_2}_s(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{sj}(\lambda) < \deg \mu^{A_1}_s(\lambda)$, *якщо* $\deg t^{(3)}_{sj}(\lambda)\mu^{A_3}_j(\lambda) < \deg \mu^{A_1}_s(\lambda) + \deg \mu^{A_2}_s(\lambda)$ *та* $j = 1, \ldots, r_3$;

2) $\deg \tilde{x}_{sj}(\lambda) < \deg \mu^{A_2}_s(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{sj}(\lambda) < \deg \mu^{A_1}_s(\lambda)$, *якщо* $j = r_3 + 1, \ldots, n_3$;

в) *якщо* $s \neq r_3$, *то*

1) $\deg \tilde{x}_{sj}(\lambda) < \deg t_{ss}^{(2)}(\lambda)\mu_s^{A_2}(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{sj}(\lambda) < \deg \mu_s^{A_1}(\lambda)$, *якщо* $r_1 > r_2$, $r_1 \neq r_3$, $j = 1,\ldots,n_3$;

2) $\deg \tilde{x}_{sj}(\lambda) < \deg \mu_s^{A_2}(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{sj}(\lambda) < \deg t_{ss}^{(1)}(\lambda)\mu_s^{A_1}(\lambda)$, *якщо* $r_1 < r_2$, $r_2 \neq r_3$, $j = 1,\ldots,n_3$;

г) $\tilde{x}_{ij}(\lambda)$, $\tilde{y}_{pj}(\lambda)$ – *довільні поліноми, якщо* $i = r_1 + 1,\ldots,n_1$, $p = r_2 + 1,\ldots,n_2$, $j = 1,\ldots,n_3$.

Доведення. З матричного рівняння (7) отримуємо систему лінійних поліноміальних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{i}\left(t_{il}^{(1)}(\lambda)\mu_l^{A_1}(\lambda)\tilde{x}_{lj}(\lambda) + t_{il}^{(2)}(\lambda)\mu_l^{A_2}(\lambda)\tilde{y}_{lj}(\lambda)\right) = t_{ij}^{(3)}(\lambda)\mu_j^{A_3}(\lambda), \qquad (9)$$

$i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n_3$; де $t_{ij}^{(k)}(\lambda) = 1$, якщо $i = j$, $i, j = 1,\ldots,r_k - 1$; $t_{ij}^{(k)}(\lambda) = 0$, якщо $i < j$, $i = 1,\ldots,m, j = 2,\ldots,n_k$ або якщо $i \geq j$, $i = r_k + 1,\ldots,m, j = r_k + 1,\ldots,n_k$, $k = 1,2,3$.

Зрозуміло, що матричне рівняння (7) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли має розв'язки система поліноміальних рівнянь (9). Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування лінійних діофантових поліноміальних рівнянь вигляду

$$t_{ij}^{(1)}(\lambda)\mu_i^{A_1}(\lambda)\tilde{x}_{ij}(\lambda) + t_{ij}^{(2)}(\lambda)\mu_i^{A_2}(\lambda)\tilde{y}_{ij}(\lambda) = g_{ij}(\lambda), \qquad (10)$$

де

$$g_{ij}(\lambda) = t_{ij}^{(3)}(\lambda)\mu_j^{A_3}(\lambda) - \sum_{l=1}^{i-1}\left(t_{il}^{(1)}(\lambda)\mu_l^{A_1}(\lambda)\tilde{x}_{lj}^{(0)}(\lambda) + t_{il}^{(2)}(\lambda)\mu_l^{A_2}(\lambda)\tilde{y}_{lj}^{(0)}(\lambda)\right),$$

$\tilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda)$ – це розв'язки, які послідовно знаходимо із відповідних рівнянь системи (9), $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n_3$.

Система рівнянь (10) містить поліноміальні рівняння

$$\mu_1^{A_1}(\lambda)\tilde{x}_{1j}(\lambda) + \mu_1^{A_2}(\lambda)\tilde{y}_{1j}(\lambda) = 0, \quad j = 2,\ldots,n_3. \qquad (11)$$

Як відомо [8], степінь нуля приймають рівним $-\infty$, тому мінімальні розв'язки $\tilde{x}_{1j}(\lambda)$, $\tilde{y}_{1j}(\lambda)$ рівнянь (11), тобто такі, що $\deg \tilde{x}_{1j}(\lambda) < \deg \mu_1^{A_2}(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{1j}(\lambda) < \deg \mu_1^{A_1}(\lambda)$, існуватимуть.

Враховуючи умови теореми, отримаємо, що кожне з рівнянь системи (10), а отже, і системи рівнянь (9) має розв'язки $\tilde{x}_{ij}(\lambda)$, $\tilde{y}_{ij}(\lambda)$, для яких виконуються умови *а*), *б*) та *в*) теореми.

Із вигляду матриць $T^{A_1}(\lambda)$, $T^{A_2}(\lambda)$ у рівнянні (7) зрозуміло, що $\tilde{x}_{ij}(\lambda)$, $\tilde{y}_{pj}(\lambda)$ – довільні поліноми, де $i = r_1 + 1,\ldots,n_1$, $p = r_2 + 1,\ldots,n_2$, $j = 1,\ldots,n_3$.

Теорему доведено.◊

Наслідок 1. *Нехай у матричному рівнянні* (7) *матриці* $T^{A_k}(\lambda)$ *повних рангів, тобто* $\operatorname{rang} T^{A_k}(\lambda) = m > 1$, $k = 1,2,3$, *і* $\deg \mu_i^{A_3}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda) + \deg \mu_i^{A_2}(\lambda)$, $i = 1,\ldots,m$. *Якщо рівняння (7) розв'язне, то воно має такі розв'язки* $\tilde{X}(\lambda) = \left\|\tilde{x}_{ij}(\lambda)\right\|^{n_1,n_3}$, $\tilde{Y}(\lambda) = \left\|\tilde{y}_{ij}(\lambda)\right\|^{n_2,n_3}$, *що* *а)* $\deg \tilde{x}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_2}(\lambda)$, $\deg \tilde{y}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda)$, *якщо* $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_3$;

б) $\tilde{x}_{ij}(\lambda)$, $\tilde{y}_{pj}(\lambda)$ – *довільні поліноми, якщо* $i = m+1, \ldots, n_1$, $p = m+1, \ldots, n_2$, $j = 1, \ldots, n_3$.

Наслідок 2. *Нехай у матричному рівнянні* (7) *матриці* $T^{A_k}(\lambda) \in M(n, P[\lambda])$ *неособливі і* $\deg \mu_i^{A_3}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda) + \deg \mu_i^{A_2}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, 3$. *Якщо рівняння* (7) *розв'язне, то воно має такі розв'язки* $\tilde{X}(\lambda) = \left\| \tilde{x}_{ij}(\lambda) \right\|^n$, $\tilde{Y}(\lambda) = \left\| \tilde{y}_{ij}(\lambda) \right\|^n$, *що*

$$\deg \tilde{x}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_2}(\lambda) \text{ та } \deg \tilde{y}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda),$$

де $i, j = 1, \ldots, n$.

Наслідок 3. *Нехай у матричному рівнянні* (7) *матриці* $T^{A_k}(\lambda) \in M(n, P[\lambda])$ *неособливі і* $\deg \mu_i^{A_3}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda) + \deg \mu_i^{A_2}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, 3$. *Якщо рівняння* (7) *розв'язне, то воно має мінімальні розв'язки* $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$, *тобто такі, що*

$$\deg \tilde{X}(\lambda) < \deg T^{A_2}(\lambda), \ \deg \tilde{Y}(\lambda) < \deg T^{A_1}(\lambda).$$

Теорема 2. *Нехай у матричному рівнянні* (7) *матриці* $T^{A_k}(\lambda) \in M(n, P[\lambda])$ *неособливі,* $k = 1, 2, 3$. *Матричне рівняння (7) має єдиний розв'язок* $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$ *такий, що*

$$\deg \tilde{x}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_2}(\lambda) \text{ та } \deg \tilde{y}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda), \ i, j = 1, \ldots, n$$

тоді і тільки тоді, коли $\left(\det T^{A_1}(\lambda), \det T^{A_2}(\lambda) \right) = 1$ *та*

$$\deg \mu_i^{A_3}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda) + \deg \mu_i^{A_2}(\lambda), \ i = 1, \ldots, n.$$

Доведення. Якщо у рівнянні (7) матриці $T^{A_k}(\lambda) \in M(n, P[\lambda])$ неособливі, $k = 1, 2, 3$, то з цього рівняння отримаємо систему лінійних поліноміальних рівнянь вигляду

$$\sum_{l=1}^{i} \left(t_{il}^{(1)}(\lambda) \mu_l^{A_1}(\lambda) \tilde{x}_{lj}(\lambda) + t_{il}^{(2)}(\lambda) \mu_l^{A_2}(\lambda) \tilde{y}_{lj}(\lambda) \right) = t_{ij}^{(3)}(\lambda) \mu_j^{A_3}(\lambda), \tag{12}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, де $t_{ij}^{(k)}(\lambda) = 1$, якщо $i = j$; $t_{ij}^{(k)}(\lambda) = 0$, якщо $i < j$, $k = 1, 2, 3$.

Розв'язування отриманої системи рівнянь зводиться до послідовного розв'язування діофантових поліноміальних рівнянь вигляду

$$\mu_i^{A_1}(\lambda) \tilde{x}_{ij}(\lambda) + \mu_i^{A_2}(\lambda) \tilde{y}_{ij}(\lambda) = g_{ij}(\lambda), \tag{13}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, де

$$g_{ij}(\lambda) = t_{ij}^{(3)}(\lambda) \mu_j^{A_3}(\lambda) - \sum_{l=1}^{i-1} \left(t_{il}^{(1)}(\lambda) \mu_l^{A_1}(\lambda) \tilde{x}_{lj}^{(0)}(\lambda) + t_{il}^{(2)}(\lambda) \mu_l^{A_2}(\lambda) \tilde{y}_{lj}^{(0)}(\lambda) \right),$$

$\tilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda)$ – розв'язки, які послідовно знаходимо із відповідних рівнянь системи (12).

Зрозуміло, що рівняння (7) має єдиний розв'язок $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$, зазначений у теоремі, тоді і тільки тоді, коли кожне рівняння вигляду (13) має єдиний розв'язок $\tilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda)$ такий, що $\deg \tilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda) < \deg \mu_i^{A_2}(\lambda)$ та $\deg \tilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda) < \ < \deg \mu_i^{A_1}(\lambda)$. За лемою 1 та за умов теореми такий розв'язок рівнянь вигляду (13) єдиний тоді і тільки тоді, коли $\left(\mu_i^{A_1}(\lambda), \mu_i^{A_2}(\lambda)\right) = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Ця умова справджується тоді і тільки тоді, коли $\left(\det T^{A_1}(\lambda), \det T^{A_2}(\lambda)\right) = 1$.

Зауважимо, що система поліноміальних рівнянь (13) міститиме рівняння вигляду

$$\mu_i^{A_1}(\lambda)\tilde{x}_{ij}(\lambda) + \mu_i^{A_2}(\lambda)\tilde{y}_{ij}(\lambda) = 0, \quad i < j, \quad i = 1, \ldots n, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Такі рівняння за умов теореми матимуть мінімальний розв'язок, який є нульовим, тобто $\tilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda) = 0$, $\tilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda) = 0$, і він єдиний.

Теорему доведено.◊

Тепер за розв'язками $\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$ асоційованого рівняння (7) записуємо відповідні розв'язки

$$X(\lambda) = R_1(\lambda)\tilde{X}(\lambda)\left(R_3(\lambda)\right)^{-1}, \quad Y(\lambda) = R_2(\lambda)\tilde{Y}(\lambda)\left(R_3(\lambda)\right)^{-1}$$

матричного рівняння (5), де $R_k(\lambda)$, $k = 1, 2, 3$ – матриці зі співвідношень (6).

1. *Джалюк Н., Петричкович В.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра // Матем. вісник НТШ. – 2012. – 9. – С. 81–88.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
3. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – 37, вып. 6. – С. 789–796.
4. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – 26. – С. 13–16.
5. *Петричкович В. М.* Про напівскалярну еквівалентність многочленних матриць // Вісник Нац. ун-ту. "Львівська політехніка''. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 115–118.
6. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1969. – 65, № 3. – P. 585–590.
7. *Kučera V.* Alqebraic theory of discrete optimal control for sinqle-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. – 1973. – 9, № 2. – P. 94–107.
8. *Kučera V.* Alqebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems [I.] // Kybernetika. – 1974. – 10, № Suppl, (1). – P. 3–56.
9. *Feinstein J., Bar-Ness J.* On the uniqueness of the minimal solution the matrix polynomial equation AX+YB=C // J. Franklin Inst. – 1980. – 310, № 2. – P. 131–134.
10. *Kaczorek T.* Zero-degree solutions to AX+BY=C and invariant factors assignment problem // Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences. – 1986. – 34, № 9–10. – P. 553–558.
11. *Kaczorek T.* A new method for finding of row minimal degree solution to the matrix polynomial equation // Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences. – 1986. – 34, № 9–10. – P. 559–562.
12. *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
13. *Tzekis P. A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Appl. Math. and Comp. – 2007. – 193. – P. 395–407.

14. *Wolovich W. A., Antsaklis P. J.* The canonical Diophantine equations with applications // SIAM J. Control and Optimization. – 1984. – 22, № 5. – P. 777–787.

15. *Zhou B., Yan Z. B., Duan G. R.* Unified parametrization for the solutions to the polynomial diophantine matrix equation and the generalized sylvester matrix equation // Int. J. of Control, Automation, and Systems. – 2010. – 8, № 1. – P. 29–35.

РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО ДИОФАНТОВОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Предложен метод построения решений матричных односторонних диофантовых полиномиальных уравнений, базирующийся на треугольных формах с инвариантными множителями на главных диагоналях набора полиномиальных матриц относительно полускалярной эквивалентности. Указаны решения минимальных степеней этих уравнений и установлен критерий единственности таких решений.

THE SOLUTIONS OF MATRIX POLYNOMIAL DIOPHANTINE EQUATION

The method of solving matrix unilateral polynomial Diophantine equations is proposed. This method is based on the use of triangular forms with invariant factors along the principal diagonals of finite collection of polynomial matrices with respect to semiscalar equivalence. The minimal degree solutions of this equations and the criterion of uniqueness of such solutions are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.09.12