УДК:517.956

Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич

ЗАДАЧА З РУХОМИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

З використанням методу характеристик і принципу Банаха про нерухому точку встановлено умови існування і єдиності локального узагальненого розв'язку крайової задачі для виродженої гіперболічної системи трьох квазілінійних рівнянь у криволінійному секторі.

Вступ. Розглянуто крайову задачу для гіперболічної системи трьох квазілінійних рівнянь у криволінійному секторі з рухомими межами, причому система вироджена (в одному з її рівнянь відсутні похідні за x від шуканої функції), і її не можна записати в інваріантах Рімана [5, ст. 30].

Вироджені гіперболічні системи зустрічаються в багатьох задачах природознавства та техніки, або як проміжні під час розв'язування, наприклад, багатовимірних нелінійних математичних моделей [3, 9]. Зокрема, такі системи виникають за дослідження нелінійних гіперболічних систем [5, ст. 26, 36], або наявності у квазілінійних гіперболічних системах нульових власних значень відповідної характеристичної матриці [10].

Гіперболічні системи трьох квазілінійних рівнянь, зокрема й вироджених, є основою деяких математичних моделей для газо- [1, 5] та гідродинаміки [4, 8].

Характерною особливістю дослідження сформульованої нижче задачі є те, що тут не застосовано традиційний метод продовженої системи [5, ст. 34], який вимагає гладкості вихідних даних до другого порядку [6]. Методом характеристик задачу зведено до системи інтегро-функціональних рівнянь типу Вольтерра другого роду, яка підпорядкована умовам теореми Банаха про стискальне відображення, що дає змогу знайти узагальнений (ліпшицевий) розв'язок задачі за методикою праці [2].

Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t)\in R^2 : s_1(t) < x < s_2(t),$ $0 < t < T, \quad s_1(0) = s_2(0) = 0\}$, де $s_i : [0,T] \to R, s_i \in C^1[0,T], i \in \{1,2\},$ розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь, що не зводиться до інваріантів Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}(x,t,u)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{13}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = b_1(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_{22}(x,t,u)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + a_{23}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = b_2(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = b_3(x,t,u), \end{cases} \tag{1}$$

де $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, а функції $a_{ij}, b_j : \Omega_T \times R^3 \to R \quad (i,j \in \{1,2,3\})$ – дійснозначні.

Припустимо, що має місце нерівність

$$a_{11}(0,0,u^0) < s_1'(0) < 0 < s_2'(0) < a_{22}(0,0,u^0), \; u^0 = u(0,0). \tag{2}$$

Для системи (1) для всіх $t \in [0,T]$ задамо нелінійні крайові умови

$$u_1(s_2(t),t) = K_1^0(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \tag{3}$$

$$u_2(s_1(t),t) = K_2^0(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \tag{4}$$

$$u_3(s_1(t),t) = K_3^-(t,u_1(s_1(t),t),u_2(s_2(t),t)), \tag{5}$$

$$u_3(s_2(t),t) = K_3^+(t,u_1(s_1(t),t),u_2(s_2(t),t)) \tag{6}$$

Побудова розв'язку. Щоб одержати розв'язок задачі (1), (3)–(6), зведемо систему (1) до системи інтегро-функціональних рівнянь.

Випишемо характеристичну матрицю системи (1)

$$A(x,t,u) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(x,t,u) & 0 & a_{13}(x,t,u) \\ 0 & a_{22}(x,t,u) & a_{23}(x,t,u) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і позначимо $b(x,t,u) = (b_1(x,t,u), b_2(x,t,u), b_3(x,t,u))$.

Тоді

$$g^1 = (1,0,\frac{a_{13}}{a_{11}}),\ g^2 = (0,1,\frac{a_{23}}{a_{22}}),\ g^3 = (0,0,1)$$

ліві власні вектори матриці $A(x,t,u)$.

Домножимо тепер векторне подання вихідної системи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A(x,t,u)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = b(x,t,u)$$

скалярно зліва на кожен із власних векторів. Тоді для i-го власного вектора

$$g^i\frac{\partial u}{\partial t} + g^i A\frac{\partial u}{\partial x} = g^i b, \quad i \in \{1,2,3\},$$

або, враховуючи, що $g^i A = a_{ii} g^i$, маємо:

$$g^i\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ii}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g^i b, \tag{7}$$

де a_{ii}, $i \in \{1,2,3\}$ – відповідне власне значення матриці $A(x,t,u)$, причому $a_{33} = 0$.

Отже, вихідну систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} g_1^1(x,t,u)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}(x,t,u)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + g_3^1(x,t,u)\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + a_{11}(x,t,u)\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = f_1(x,t,u), \\ g_2^2(x,t,u)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{22}(x,t,u)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + g_3^2(x,t,u)\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + a_{22}(x,t,u)\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = f_2(x,t,u), \\ g_3^3(x,t,u)\frac{\partial u_3}{\partial t} = f_3(x,t,u), \end{cases} \tag{8}$$

де $f_1(x,t,u) = g_1^1(x,t,u)b_1(x,t,u) + g_3^1(x,t,u)b_3(x,t,u)$;

$f_2(x,t,u) = g_2^2(x,t,u)b_2(x,t,u) + g_3^2(x,t,u)b_3(x,t,u)$;

$f_3(x,t,u) = g_3^3(x,t,u)b_3(x,t,u)$.

Уведемо область

$$D = \{u : u \in R^3, \|u\| \le U\},$$

де під знаком $\|\cdot\|$ розумітимемо норму в сенсі максимумів компонент вектора, а U – деяка стала.

Випишемо матрицю власних векторів g^1, g^2, g^3

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $\det \check{G} \neq 0$. Через $\check{H} = [h_{ij}],\ i, j \in \{1,2,3\}$ позначимо обернену до $\check{G}$ матрицю

$$\check{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що функціональні матриці $\check{G}$, $\check{H}$ визначені на множині $\Omega_T \times D$.

Нехай для всіх $i \in \{1,2,3\},\ a_{ii} \in C(\overline{\Omega}_T \times D) \cap Lip_x(\overline{\Omega}_T \times D)$. Позначимо через $\phi_i[u](\tau; x, t)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_{ii}(\xi, \tau, u(\xi, \tau)),\ \xi(t) = x,\ i \in \{1,2,3\}, \tag{9}$$

а відповідні інтегральні криві $x = \phi_i[u](\tau; x, t)$ є характеристики системи (1). Нехай крива $x = \phi_i[u](\tau; x, t),\ t \le T$ досягає межі області Ω_T у напрямку спадання аргументу t у точці $\chi_i[u](x, t)$.

Для зручності використовуватимемо позначення $\phi_i[u](\tau) = \phi_i[u](\tau; x, t)$ та $\chi_i[u] = \chi_i[u](x, t), i \in \{1,2,3\}$. Деколи, наприклад, щоб підкреслити залежність функції від потрібної змінної, писатимемо: $\phi_i^x[u](\tau)$, $\phi_i^t[u](\tau)$, $\chi_i^x[u](x, t)$, $\chi_i^t[u](x, t)$.

Врахувавши (9), перепишемо (8) так:

$$g_1^1(\phi_1[u](\tau), \tau, u(\phi_1[u](\tau), \tau))\frac{du_1(\phi_1[u](\tau), \tau)}{d\tau} +$$

$$+g_3^1(\phi_1[u](\tau), \tau, u(\phi_1[u](\tau), \tau))\frac{du_3(\phi_1[u](\tau), \tau)}{d\tau} = f_1(\phi_1[u](\tau), \tau, u(\phi_1[u](\tau), \tau)), \tag{10}$$

$$g_2^2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau))\frac{du_2(\phi_2[u](\tau), \tau)}{d\tau} +$$

$$+g_3^2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau))\frac{du_3(\phi_2[u](\tau), \tau)}{d\tau} = f_2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau)),$$

$$+g_3^2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau))\frac{du_3(\phi_2[u](\tau), \tau)}{d\tau} = f_2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau)), \tag{11}$$

$$g_3^3(\phi_3[u](\tau), \tau, u(\phi_3[u](\tau), \tau))\frac{du_3(\phi_3[u](\tau), \tau)}{d\tau} = f_3(\phi_3[u](\tau), \tau, u(\phi_3[u](\tau), \tau)). \tag{12}$$

Існування майже всюди похідних $\dfrac{dg_3^i(\phi_i[u](\tau), \tau, u(\phi_i[u](\tau), \tau))}{d\tau}, i \in \{1,2\}$ в (12) та їх сумовність випливає із відомої теореми Радемахера [7, ст.234].

Проінтегрувавши рівняння (10)-(12) вздовж відповідних характеристик, отримаємо:

$$g_1^1(x,t,u)u_1(x,t)+g_3^1(x,t,u)u_3(x,t)=$$
$$=g_1^1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u],u(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))u_1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+$$
$$+g_3^1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u],u(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+$$
$$+\int_{\chi_1[u]}^{t}u_3(\phi_1[u](\tau),\tau)\frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))}{d\tau}d\tau+$$
$$+\int_{\chi_1[u]}^{t}f_1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))d\tau, \tag{13}$$

$$g_2^2(x,t,u)u_2(x,t)+g_3^2(x,t,u)u_3(x,t)=$$
$$=g_2^2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u],u(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))u_2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u])+$$
$$+g_3^2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u],u(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u])+$$
$$+\int_{\chi_2[u]}^{t}u_3(\phi_2[u](\tau),\tau)\frac{dg_3^2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))}{d\tau}d\tau+$$
$$+\int_{\chi_2[u]}^{t}f_2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))d\tau, \tag{14}$$

$$g_3^3(x,t,u)u_3(x,t)=g_3^3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u],u(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u]))u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])+$$
$$+\int_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau. \tag{15}$$

У рівнянні (13) додамо і віднімемо доданок $(g_1^1(x,t,u)u_1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+$ $+g_3^1(x,t,u)u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))$, в (14) – $(g_2^2(x,t,u)u_2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u])+$ $+g_2^3(x,t,u)u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))$, а в (15) – $(g_3^3(x,t,u)u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u]))$ і, врахувавши, що

$$g_k^i(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u],u(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u]))u_k(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])-$$
$$-g_k^i(x,t,u)u_k(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])=$$
$$=-\int_{\chi_i[u]}^{t}\frac{dg_k^i(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u],u(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u]))}{d\tau}u_k(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])d\tau,$$

$i,k\in\{1,2,3\}$,

отримаємо:

$$g_1^1(x,t,u)u_1(x,t)+g_3^1(x,t,u)u_3(x,t)=$$
$$=g_1^1(x,t,u)u_1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+g_3^1(x,t,u)u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+$$
$$+\int_{\chi_1[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))d\tau+$$
$$+\int_{\chi_1[u]}^{t}f_1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))d\tau, \tag{16}$$

$$g_2^2(x,t,u)u_2(x,t)+g_3^2(x,t,u)u_3(x,t)=$$
$$=g_2^2(x,t,u)u_2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]+g_3^2(x,t,u)u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u])+$$
$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t}\frac{dg_3^2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_2[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t}f_2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))d\tau, \qquad (17)$$
$$g_3^3(x,t,u)u_3(x,t)=g_3^3(x,t,u)u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])+$$
$$+\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau. \qquad (18)$$

Домноживши рівняння (16)–(18) на h_{ij} $(i,j\in\{1,2,3\})$ та просумувавши за j, відповідно, одержимо:

$$u_1(x,t)=u_1(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])+$$
$$+h_{13}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}f_1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))d\tau+h_{13}(x,t,u)\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau,$$
$$u_2(x,t)=u_2(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u])+$$
$$+h_{23}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])-u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))+$$
$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t}\frac{dg_3^2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_2[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t}f_2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))d\tau+h_{23}(x,t,u)\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau,$$
$$u_3(x,t)=u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])+\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau.$$

Враховуючи крайові умови (3)–(6), матимемо:

$$u_1(x,t)=K_1^0(\chi_1[u],u_1(s_1(\chi_1[u]),\chi_1[u]),u_2(s_2(\chi_1[u]),\chi_1[u]))+$$
$$+h_{13}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u]))d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}f_1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))d\tau+h_{13}(x,t,u)\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau, \qquad (19)$$
$$u_2(x,t)=K_2^0(\chi_2[u],u_1(s_1(\chi_2[u]),\chi_2[u]),u_2(s_2(\chi_2[u]),\chi_2[u]))+$$
$$+h_{23}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])-u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))+$$
$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t}\frac{dg_3^2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_2[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]),\chi_2[u]))d\tau+$$

$$+\int\limits_{\chi_2[u]}^{t} f_2(\phi_2[u](\tau),\tau,u(\phi_2[u](\tau),\tau))d\tau + h_{23}(x,t,u)\int\limits_{\chi_3[u]}^{t} f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau, \quad (20)$$

$$u_3(x,t) = J^3[u](x,t) + \int\limits_{\chi_3[u]}^{t} f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))d\tau, \quad (21)$$

де $J^3[u](x,t) = \begin{cases} K_3^-(\chi_3[u], u_1(s_1(\chi_3[u]),\chi_3[u]), u_2(s_2(\chi_3[u]),\chi_3[u])), \\ \qquad \text{якщо } \phi_3[u](\chi_3[u]) = s_1(\chi_3[u]), \\ K_3^+(\chi_3[u], u_1(s_1(\chi_3[u]),\chi_3[u]), u_2(s_2(\chi_3[u]),\chi_3[u])), \\ \qquad \text{якщо } \phi_3[u](\chi_3[u]) = s_2(\chi_3[u]). \end{cases}$

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1), (3)–(6) називатимемо функцію $u(x,t) \in Lip(\overline{\Omega}_T)$, яка задовольняє інтегро-функціональну систему (19)–(21).

Зауважимо, що неперервний розв'язок цієї системи також є узагальненим розв'язком задачі (1), (3)–(6).

Припустимо, що функції $a_{ii}, f_i, g_i^j, h_{ij}, i,j \in \{1,2,3\}$ – неперервні на множині $\overline{\Omega}_T \times D$ і обмежені за модулем деякими сталими A, F, G, H, відповідно; функції s_i, s_i', $i \in \{1,2\}$ – неперервні на $[0,T]$ і обмежені сталою S; функції K_1^0, K_2^0, K_3^-, K_3^+ – неперервні на множині $[0,T]\times R^2$ і обмежені сталою K.

Нехай a_0 – стала Ліпшиця для функцій $a_{ii}(x,t,u)$; f_0 – для $f_i(x,t,u)$; g_0 – для $g_i^j(x,t,u)$; h_0 – для $h_{ij}(x,t,u)$ за всіма змінними на множині $\overline{\Omega}_T \times D$; k_0 – для $K_1^0, K_2^0, K_3^-, K_3^+$ на множині $[0,T]\times R^2$ за всіма змінними; s_0 – для $s_i(t), s_i'(t)$ на $[0,T]$. Для функцій u_i сталу Ліпшиця за обома змінними позначатимемо через L.

Нехай $\alpha = \min\limits_i |a_{ii}(0,0,u^0) - s_i'(0)|$, де $u^0 = u_i^0$, $i \in \{1,2,3\}$ – значення функції u в точці $(0,0)$, крім того, $\alpha \neq 0$ згідно з (2) і $M = 2\alpha^{-1}$.

Теорема. Нехай:

1) $a_{ii}, i \in \{1,2,3\}$ – ліпшицеві функції за всіма аргументами в $\Omega_{T_0} \times D$;
2) $s_i \in C^1[0,T_0], i \in \{1,2\}$;
3) $f_i, g_j^i, h_{ij}, i,j \in \{1,2,3\}$ – ліпшицеві функції за всіма аргументами в $\Omega_{T_0} \times D$;
4) існує нерівність
$$a_{11}(0,0,u^0) < s_1'(0) < 0 < s_2'(0) < a_{22}(0,0,u^0);$$
5) $K_1^0, K_2^0, K_3^-, K_3^+$: $[0,T]\times R^2$ – ліпшицеві функції за всіма аргументами;
6) система
$$\begin{cases} u_1^0 = K_1^0(0,u_1^0,u_2^0), \\ u_2^0 = K_2^0(0,u_1^0,u_2^0), \end{cases}$$
має єдиний розв'язок ;
7) виконується умова погодження $K_3^-(0,u_1^0,u_2^0) = K_3^+(0,u_1^0,u_2^0)$;

8) виконуються нерівності

$$2k_0 + H < 1, \quad \max\{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_3\} < 1,$$

де

$$\mathrm{B}_1 = 2k_0 M(s_0+1) + (2H + g_0(A+1))(2 + M(A+1)) + (A+1)(h_0 + g_0(M+2)) + 2g_0,$$

$$\mathrm{B}_3 = 2k_0 AM(s_0+1) + h_0(A+1) + 2H(2F + (A+1)AM) + 2g_0 A(A+2) +$$

$$+ g_0 A(A+1)(2 + MA(A+1)) + g_0(A+1)(AM+1).$$

Тоді для достатньо малого $T_0 \in (0, T]$ існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1), (3)-(6) в області Ω_{T_0}.

Доведення. Нехай $T_0 \in (0, T]$. Введемо метричний простір $Q = Q(T_0, U, L)$, що складається з ліпшицевих за обома аргументами функцій $u = (u_1, u_2, u_3)$, які задовольняють умови (3)–(6), і такі обмеження:

H1. $u_i \in Lip(\Omega_{T_0}, L)$, $i \in \{1,2,3\}$;

H2. $| u_i(x,t) - u^0 | \le U, (x,t) \in \Omega_{T_0}$, $i \in \{1,2,3\}$.

Нехай $u^1, u^2 \in Q$, тоді метрика

$$\rho(u^1, u^2) = \max_{(x,t)\in\Omega_{T_0}} \{| u_1^1(x,t) - u_1^2(x,t) |, | u_2^1(x,t) - u_2^2(x,t) |, | u_3^1(x,t) - u_3^2(x,t) |\},$$

і $\rho = \rho(u^1, u^2)$.

Зазначимо, що простір (Q, ρ) повний, оскільки введена метрика є рівномірною.

На елементах простору Q введемо оператор

$$\mathrm{A}[u](x,t) = \left(\mathrm{A}^1[u](x,t), \mathrm{A}^2[u](x,t), \mathrm{A}^3[u](x,t)\right),$$

де $\mathrm{A}^i[u](x,t)$ визначають праві частини рівностей (16)–(18):

$$\mathrm{A}^1[u](x,t) = K_1^0(\chi_1[u], u_1(s_1(\chi_1[u]), \chi_1[u]), u_2(s_2(\chi_1[u]), \chi_1[u])) +$$

$$+ h_{13}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]), \chi_3[u]) - u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]), \chi_1[u])) +$$

$$+ \int_{\chi_1[u]}^{t} \frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau), \tau, u(\phi_1[u](\tau), \tau))}{d\tau} (u_3(\phi_1[u](\tau), \tau) - u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]), \chi_1[u]))d\tau +$$

$$+ \int_{\chi_1[u]}^{t} f_1(\phi_1[u](\tau), \tau, u(\phi_1[u](\tau), \tau))d\tau + h_{13}(x,t,u) \int_{\chi_3[u]}^{t} f_3(\phi_3[u](\tau), \tau, u(\phi_3[u](\tau), \tau))d\tau;$$

$$\mathrm{A}^2[u](x,t) = K_2^0(\chi_2[u], u_1(s_1(\chi_2[u]), \chi_2[u]), u_2(s_2(\chi_2[u]), \chi_2[u])) +$$

$$+ h_{23}(x,t,u)(u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]), \chi_3[u]) - u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]), \chi_2[u])) +$$

$$+ \int_{\chi_2[u]}^{t} \frac{dg_3^2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau))}{d\tau} (u_3(\phi_2[u](\tau), \tau) - u_3(\phi_2[u](\chi_2[u]), \chi_2[u]))d\tau +$$

$$+ \int_{\chi_2[u]}^{t} f_2(\phi_2[u](\tau), \tau, u(\phi_2[u](\tau), \tau))d\tau + h_{23}(x,t,u) \int_{\chi_3[u]}^{t} f_3(\phi_3[u](\tau), \tau, u(\phi_3[u](\tau), \tau))d\tau;$$

$$\mathrm{A}^3[u](x,t) = J^3[u](x,t) + \int_{\chi_3[u]}^{t} f_3(\phi_3[u](\tau), \tau, u(\phi_3[u](\tau), \tau))d\tau.$$

Отже, відшукання узагальненого розв'язку задачі (1), (3)–(6) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора A у просторі Q. Застосовуючи теорему Банаха про стискальне відображення, встановимо існування і єдиність нерухомої точки оператора. Для цього покажемо, що існує набір параметрів (T_0, U, L), за яких оператор A відображає повний метричний простір (Q, ρ) в себе і є стискальним. Щоб отримати відповідні оцінки, доведемо такі леми.

Лема 1. Нехай $(x(\tau), t(\tau))$ – гладка крива, $\tau \in [\alpha, \beta]$, а $u(x,t)$ – ліпшицева функція за x, t. Тоді

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \le L(\max_{\alpha\le\tau\le\beta} |x'(\tau)| + \max_{\alpha\le\tau\le\beta} |t'(\tau)|).$$

Доведення. Нехай $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha, \beta]$ такі, що $\tau_1 \ne \tau_2$. Розглянемо різницю

$$|u(x(\tau_1), t(\tau_1)) - u(x(\tau_2), t(\tau_2))| \le L(|x(\tau_1) - x(\tau_2)| + |t(\tau_1) - t(\tau_2)|) \le$$
$$\le |\tau_1 - \tau_2| L(\max_{\alpha\le\tau\le\beta} |x'(\tau)| + \max_{\alpha\le\tau\le\beta} |t'(\tau)|).$$

Тоді за означенням похідної маємо:

$$\left|\frac{du}{ds}\right| = \frac{|u(x(\tau_1), t(\tau_1)) - u(x(\tau_2), t(\tau_2))|}{|\tau_1 - \tau_2|} \le L(\max_{\alpha\le\tau\le\beta} |x'(\tau)| + \max_{\alpha\le\tau\le\beta} |t'(\tau)|).$$

Лема 2. Нехай $(x^j, t^j) \in \Omega_{T_0}$, $\tau^j \in [\chi_j[u], t]$ і $u^j \in Q, j \in \{1, 2\}$. Тоді функція $\phi_i[u](\tau)$, що є розв'язком задачі (9), задовольняє такі нерівності:

1) $\left|\phi_i^{x^1}[u](\tau) - \phi_i^{x^2}[u](\tau)\right| \le \left|x^1 - x^2\right| e^{a_0(1+L)T_0}$;

2) $\left|\phi_i^{t^1}[u](\tau) - \phi_i^{t^2}[u](\tau))\right| \le \left|t^1 - t^2\right| A e^{a_0(1+L)T_0}$;

3) $\left|\phi_i[u^1](\tau) - \phi_i[u^2](\tau)\right| \le a_0 e^{a_0(1+L)T_0} T_0 \rho$;

4) $\left|\phi_i[u](\tau^1) - \phi_i[u](\tau^2)\right| \le A\left|\tau^1 - \tau^2\right|$.

Доведення. Для $i \in \{1, 2\}$ розв'язок задачі Коші (11) має вигляд

$$\phi_i[u](\tau) = x + \int_t^\tau a_{ii}(\phi_i[u](z), z, u(\phi_i[u](z), z))\, dz,$$

а для $i = 3$ – $\phi_3[u](\tau) = x$. Тому

$$1) \left|\phi_i^{x^1}[u](\tau) - \phi_i^{x^2}[u](\tau)\right| \le \left|x^1 - x^2\right| +$$
$$+\int_t^\tau \left|a_{ii}(\phi_i^{x^1}[u](z), z, u(\phi_i^{x^1}[u](z), z)) - a_{ii}(\phi_i^{x^2}[u](z), z, u(\phi_i^{x^2}[u](z), z))\right| dz \le$$
$$\le \left|x^1 - x^2\right| + \int_t^\tau a_0(1+L)\left|\phi_i^{x^1}[u](z) - \phi_i^{x^2}[u](z)\right| dz.$$

З леми Гроноулла–Беллмана отримаємо:

$$\left|\phi_i^{x^1}[u](\tau) - \phi_i^{x^2}[u](\tau)\right| \le \left|x^1 - x^2\right| e^{a_0(1+L)T_0},\ i \in \{1, 2\}.$$

Якщо $i = 3$,

$$\left|\phi_3^{x^1}[u](\tau) - \phi_3^{x^2}[u](\tau)\right| = \left|x^1 - x^2\right|.$$

Для доведення 2) без обмеження загальності припустимо, що $t^1 < t^2$, тоді
$\left|\phi_i^{t^1}[u](\tau) - \phi_i^{t^2}[u](\tau)\right| \le$

$$\leq \left| \int_{t^1}^{\tau} a_{ii}(\phi_i^{t^1}[u](z), z, u(\phi_i^{t^1}[u](z), z))dz - \int_{t^2}^{\tau} a_{ii}(\phi_i^{t^2}[u](z), z, u(\phi_i^{t^2}[u](z), z))dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{t^1}^{t^2} \left| a_{ii}(\phi_i^{t^1}[u](z), z, u(\phi_i^{t^1}[u](z), z)) \right| dz +$$

$$+ \int_{t^2}^{\tau} \left| a_{ii}(\phi_i^{t^1}[u](z), z, u(\phi_i^{t^1}[u](z), z)) - a_{ii}(\phi_i^{t^2}[u](z), z, u(\phi_i^{t^2}[u](z), z)) \right| dz \leq$$

$$\leq A \left| t^1 - t^2 \right| + a_0(1 + L) \int_{t^2}^{\tau} \left| \phi_i^{t^1}[u](z) - \phi_i^{t^2}[u](z) \right| dz.$$

За лемою Гронуолла–Беллмана отримаємо:

$$\left| \phi_i^{t^1}[u](\tau) - \phi_i^{t^2}[u](\tau) \right| \leq A \left| t^1 - t^2 \right| e^{a_0(1+L)T_0}, \ i \in \{1, 2\},$$

а для $i = 3$ – $\left| \phi_3^{t^1}[u](\tau) - \phi_3^{t^2}[u](\tau) \right| = 0.$

У випадку 3)

$$\left| \phi_i[u^1](\tau) - \phi_i[u^2](\tau) \right| \leq$$

$$\leq \int_{t}^{\tau} \left| a_{ii}(\phi_i[u^1](z), z, u^1(\phi_i[u^1](z), z)) - a_{ii}(\phi_i[u^2](z), z, u^2(\phi_i[u^2](z), z)) \right| dz \leq$$

$$\leq a_0 \int_{t}^{\tau} (\left| \phi_i[u^1](z) - \phi_i[u^2](z) \right| + \left| u^1(\phi_i[u^1](z), z) - u^1(\phi_i[u^2](z), z) \right| +$$

$$+ \left| u^1(\phi_i[u^2](z), z) - u^2(\phi_i[u^2](z), z) \right|)dz \leq a_0 \int_{t}^{\tau} ((1 + L) \mid \phi_i[u^1](z) - \phi_i[u^2](z) \mid + \rho)dz.$$

За лемою Гронуолла–Беллмана одержимо:

$$\left| \phi_i[u^1](z) - \phi_i[u^2](z) \right| \leq a_0 e^{a_0(1+L)T_0} T_0 \rho, \ i \in \{1, 2\}.$$

Якщо ж $i = 3$, то $\left| \phi_3[u^1](z) - \phi_3[u^2](z) \right| = 0$.

У випадку 4) припустимо, що $\tau^2 \leq \tau^1$. Тоді

$$\left| \phi_i[u](\tau^1) - \phi_i[u](\tau^2) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t}^{\tau^1} a_{ii}(\phi_i[u](z), z, u(\phi_i[u](z), z))dz - \int_{t}^{\tau^2} a_{ii}(\phi_i[u](z), z, u(\phi_i[u](z), z))dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{\tau^2}^{\tau^1} \left| a_{ii}(\phi_i[u](z), z, u(\phi_i[u](z), z)) \right| dz \leq A \left| \tau^1 - \tau^2 \right|.$$

Лема 3. Якщо $\phi_i[u](\tau)$ – розв'язок задачі (9) і $g_j^i(x, t, u(x, t))$ – j-та координата i-го власного вектора матриці $A(x, t, u)$, тоді для похідної вздовж характеристики справджуються оцінки:

1) $\left| \dfrac{du_3(\phi_i[u](\tau), \tau)}{d\tau} \right| \leq L(A + 1), \quad i \in \{1, 2\};$

2) $\left| \dfrac{dg_3^i(\phi_i[u](\tau), \tau, u(\phi_i[u](\tau), \tau))}{d\tau} \right| \leq g_0(A + 1)(L + 1), \quad i \in \{1, 2\}.$

Доведення. Використавши лему 1 для 1), отримаємо:

$$\left|\frac{du_3(\phi_i[u](\tau),\tau)}{d\tau}\right| \le L(\max_{\tau\in[\chi_i,t]} |\phi_i[u](\tau))'_\tau| + \max_{\tau\in[\chi_i,t]} |(\tau)'_\tau|) \le L(A+1).$$

У другому випадку, врахувавши лему 1 та пункт 1) леми 3, оцінимо похідну

$$\left|\frac{dg_3^i(\phi_i[u](\tau),\tau,u(\phi_i[u](\tau),\tau))}{d\tau}\right| \le g_0\left(\max_{\tau\in[\chi_i,t]} |(\phi_i[u](\tau))'_\tau| + \max_{\tau\in[\chi_i,t]} |(\tau)'_\tau| + \right.$$

$$\left. + \max_{\tau\in[\chi_i,t]} |(u(\phi_i[u](\tau),\tau))'_\tau|\right) \le g_0(A+1+L(A+1)) \le g_0(A+1)(L+1).$$

Лема 4. Для $\tau\in[\chi_i[u],t]$, де $t\in[0,T_0], i\in\{1,2\}$ і $\phi_i[u](\tau)$ – розв'язок задачі Коші (9), виконується нерівність

$$|u_3(\phi_i[u](\tau),\tau) - u_3(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])| \le L(A+1)T_0,\ i\in\{1,2\}.$$

Доведення. Використавши пункт 4) леми 2, отримаємо:

$$|u_3(\phi_i[u](\tau),\tau) - u_3(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])| \le L\,|\phi_i[u](\tau) - \phi_i[u](\chi_i[u])| + L\,|\tau-\chi_i[u]| \le$$

$$\le L(A+1)\,|\tau-\chi_i[u]| \le L(A+1)T_0.$$

Зауважимо, що якщо вибрати

$$T_0 \le \frac{1}{L(A+1)}, \tag{22}$$

то оцінка з леми 4 буде

$$|u_3(\phi_i[u](\tau),\tau) - u_3(\phi_i[u](\chi_i[u]),\chi_i[u])| \le 1,\ i\in\{1,2\}.$$

Лема 5. Нехай $(x^j,t^j)\in\Omega_{T_0}$ і $u^j\in Q,\ j\in\{1,2\}$. Тоді для функції $\chi_i[u]$ справедливі такі нерівності:

1) $\left|\chi_i^{x^1}[u] - \chi_i^{x^2}[u]\right| \le |x^1-x^2|\,e^{a_0(1+L)T_0}\alpha^{-1}$;

2) $\left|\chi_i^{t^1}[u] - \chi_i^{t^2}[u]\right| \le |t^1-t^2|\,Ae^{a_0(1+L)T_0}\alpha^{-1}$;

3) $\left|\chi_i[u^1] - \chi_i[u^2]\right| \le a_0 e^{a_0(1+L)T_0}\alpha^{-1}T_0\rho$.

Доведення. Нехай у першому випадку, для $i\in\{1,2\}$ відповідні характеристики, для визначеності, попадають на межу $s_1(t)$ і $x_1 > x_2$. Тоді $\chi_i^{x^1}[u] < \chi_i^{x^2}[u]$. Застосовуючи теорему Лагранжа для функції $\phi_i^{x^1}[u](\tau) - s_1(\tau)$ та випадку 1) леми 2, отримаємо оцінку

$$|x^1-x^2|\,e^{a_0(1+L)T_0} \ge |\phi_i^{x^1}[u](\chi_i^{x^2}[u]) - \phi_i^{x^2}[u](\chi_i^{x^2}[u])| =$$

$$= |\phi_i^{x^1}[u](\chi_i^{x^2}[u]) - s_1(\chi_i^{x^2}[u]) - (\phi_i^{x^1}[u](\chi_i^{x^1}[u]) - s_1(\chi_i^{x^1}[u]))| =$$

$$= |a_{ii}(\phi_i^{x^1}[u](\tau_0),\tau_0,u(\phi_i^{x^1}[u](\tau_0),\tau_0)) - s_1'(\tau_0)|\,|\chi_i^{x^1}[u] - \chi_i^{x^2}[u]| \ge$$

$$\ge \alpha\,|\chi_i^{x^1}[u] - \chi_i^{x^2}[u]|.$$

Звідси

$$|\chi_i^{x^1}[u] - \chi_i^{x^2}[u]| \le |x^1-x^2|\,e^{a_0(1+L)T_0}\alpha^{-1}.$$

Якщо $i=3$, припустимо, що $\chi_3^{x^2}[u] \le \chi_3^{x^1}[u]$ і $x^1 \le 0 \le x^2$, тоді, міркуючи аналогічно, як у випадку $i\in\{1,2\}$, і застосувавши теорему Лагранжа до

функції $\phi_3^{x^2}[u](\chi_3^{x^1}[u]) - s_1(\chi_3^{x^1}[u])$, отримаємо оцінку $|\chi_3^{x^1}[u] - \chi_3^{x^2}[u]| \le$
$\le |x^1 - x^2| e^{a_0(1+L)T_0}\alpha^{-1}$.

Доведення пунктів 2) та 3) з незначними змінами повторює доведення випадку 1).

Якщо ж характеристика попала на межу $s_2(t)$, то доведення аналогічне.

Припустимо, що

$$T_0 \le \frac{\ln 2}{\max\{1, a_0\}(1+L)}. \qquad (23)$$

Тоді оцінки з лем 2 і 5 мають вигляд

$$|\Delta_j \phi_i^{x^j}[u](\tau)| \le 2|\Delta x^j|, \quad |\Delta_j \phi_i^{t^j}[u](\tau)| \le 2A|\Delta t^j|, \quad |\Delta_j \phi_i[u^j](\tau)| \le 2a_0 T_0 \rho,$$

$$|\Delta_j \chi_i^{x^j}[u]| \le M|\Delta x^j|; \; |\Delta_j \chi_i^{t^j}[u]| \le AM|\Delta t^j|; \; |\Delta_j \chi_i[u^j]| \le a_0 M T_0 \rho.$$

Нехай $u \in Q$, встановимо обмеження на параметри метричного простору Q, за яких $\mathrm{A}[u]$ задовольняє умови H1, H2. Розпочнемо з умови H1.

Розглянемо спочатку $\Delta_j \mathrm{A}^1[u](x^j, t)$:

$$\left|\Delta_j \mathrm{A}^1[u](x^j,t)\right| = \left|\Delta_j K_1^0(\chi_1^{x^j}[u], u_1(s_1(\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]), u_2(s_2(\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))\right| +$$

$$+\left|\Delta_j h_{13}(x^j, t, u(x^j,t))(u_3(\phi_3^{x^j}[u](\chi_3^{x^j}[u]), \chi_3^{x^j}[u]) - u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))\right| +$$

$$+\left|\Delta_j \int\limits_{\chi_1^{x^j}[u]}^{t} \frac{dg_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau), \tau, u(\phi_1^{x^j}[u](\tau), \tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1^{x^j}[u](\tau), \tau) -\right.$$

$$-u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))d\tau| + |\Delta_j \int\limits_{\chi_1^{x^j}[u]}^{t} f_1(\phi_1^{x^j}[u](\tau), \tau, u(\phi_1^{x^j}[u](\tau), \tau))d\tau| +$$

$$+|\Delta_j h_{13}(x^j, t, u(x^j,t)) \int\limits_{\chi_3^{x^j}[u]}^{t} f_3(\phi_3^{x^j}[u](\tau), \tau, u(\phi_3^{x^j}[u](\tau), \tau))d\tau|.$$

Нехай для визначеності $x^1 < x^2$. Тоді $\chi_i^{x^1}[u] > \chi_i^{x^2}[u]$. Оцінимо кожен з доданків, використавши випадок 1) леми 5. Спочатку оцінимо $\left|\Delta_j K_1^0\right|$, матимемо:

$$|\Delta_j K_1^0(\chi_1^{x^j}[u], u_1(s_1(\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]), u_2(s_2(\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))| \le$$
$$\le k_0 M(1 + 2L(s_0+1))|\Delta x^j|.$$

Далі, враховуючи пункти 1) та 4) леми 2 та пункт 1) леми 5, маємо:

$$|\Delta_j h_{13}(x^j, t, u(x^j,t))(u_3(\phi_3^{x^j}[u](\chi_3^{x^j}[u]), \chi_3^{x^j}[u]) - u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))| \le$$

$$\le |\Delta_j h_{13}(x^j, t, u(x^j,t))||u_3(\phi_3^{x^1}[u](\chi_3^{x^1}[u]), \chi_3^{x^1}[u]) - u_3(\phi_1^{x^1}[u](\chi_1^{x^1}[u]), \chi_1^{x^1}[u])| +$$

$$+|h_{13}(x^j, t, u(x^j,t))||\Delta_j(u_3(\phi_3^{x^j}[u](\chi_3^{x^j}[u]), \chi_3^{x^j}[u]) - u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]), \chi_1^{x^j}[u]))| \le$$

$$\le h_0(1+L)|\Delta x^j| L(|\int\limits_{\chi_1^{x^j}[u]}^{t} a_{11}(x^1, \tau, u(x^1,\tau))d\tau| + |\chi_3^{x^1}[u] - \chi_1^{x^1}[u]|) +$$

$$+2HL(2+(A+1)M)\,|\,\Delta x^j\,|\le (h_0L(A+1)+2HL(2+(A+1)M))\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

Для третього доданка, застосувавши пункти 1) та 4) леми 2, леми 3, 4 та пункт 1) леми 5, отримаємо:

$$\left|\Delta_j\int\limits_{\chi_1^{x^j}[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\Big(u_3(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau)-\right.$$

$$\left.-u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]),\chi_1^{x^j}[u])\Big)d\tau\right|\le\left|\Delta_j\int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(u_3(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]),\chi_1^{x^j}[u])\Big)d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\chi_1^{x^2}[u]}^{\chi_1^{x^1}[u]}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\Big(u_3(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau)-\right.$$

$$\left.-u_3(\phi_1^{x^2}[u](\chi_1^{x^2}[u]),\chi_1^{x^2}[u])\Big)d\tau\right|\le\left|\int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t}\frac{\Delta_j dg_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(u_3(\phi_1^{x^1}[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^1}[u](\chi_1^{x^1}[u]),\chi_1^{x^1}[u])\Big)d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))}{d\tau}(\Delta_j u_3(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau)+\right.$$

$$\left.+\Delta_j u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]),\chi_1^{x^j}[u]))d\tau+\right|\int\limits_{\chi_1^{x^2}[u]}^{\chi_1^{x^1}[u]}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\times$$

$$\left.\times(u_3(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^2}[u](\chi_1^{x^2}[u]),\chi_1^{x^2}[u]))d\tau\right|\le\left|\Delta_j g_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))\right|\times$$

$$\times\left|u_3(\phi_1^{x^1}[u](t),t)-u_3(\phi_1^{x^1}[u](\chi_1^{x^1}[u]),\chi_1^{x^1}[u])\right|+$$

$$+\int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t}\left|\Delta_j g_3^1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))\right|\left|\frac{du_3(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau)}{d\tau}\right|d\tau+$$

$$+\int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\right|\Big(\left|\Delta_j u_3(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau)\right|+$$

$$+\left|\Delta_j u_3(\phi_1^{x^j}[u](\chi_1^{x^j}[u]),\chi_1^{x^j}[u])\right|\Big)d\tau+\int\limits_{\chi_1^{x^2}[u]}^{\chi_1^{x^1}[u]}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))}{d\tau}\right|\times$$

$$\times\left|u_3(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^2}[u](\chi_1^{x^2}[u]),\chi_1^{x^2}[u])\right|d\tau\le$$

$$\le (2g_0(1+L)+2g_0L(A+1)+g_0(A+1)L(2+M(A+1))+g_0(1+L)(A+1)M)\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

Далі з пункту 1) леми 2 та пункту 1) леми 5, дістанемо:

$$\left|\Delta_j \int\limits_{\chi_1^{x^j}[u]}^{t} f_1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right| \le \left|\Delta_j \int\limits_{\chi_1^{x^1}[u]}^{t} f_1(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\chi_1^{x^2}[u]}^{\chi_1^{x^1}[u]} f_1(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^2}[u](\tau),\tau))d\tau\right| \le (2f_0+FM)\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

Тому, застосувавши цю оцінку для останнього доданка, маємо:

$$\left|\Delta_j h_{13}(x^{x^j},t,u(x^j,t)) \int\limits_{\chi_3^{x^j}[u]}^{t} f_3(\phi_3^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{x^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\Delta_j h_{13}(x^{x^j},t,u(x^j,t))\right| \left|\int\limits_{\chi_3^{x^1}[u]}^{t} f_3(\phi_3^{x^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{x^1}[u](\tau),\tau))d\tau\right| +$$

$$+\left|h_{i3}(x^{x^2},t,u(x^2,t))\right| \left|\Delta_j \int\limits_{\chi_3^{x^j}[u]}^{t} f_3(\phi_3^{x^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{x^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le (h_0F+H(2f_0+FM))\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

У підсумку отримаємо:

$$\left|\Delta_j \mathrm{A}^1[u](x^j,t)\right| \le k_0M(1+2L(s_0+1))+h_0L(A+1)+2HL(2+(A+1)M)+$$

$$+(2g_0(1+L)+2g_0L(A+1)+g_0(A+1)L(2+M(A+1))+$$

$$+g_0(1+L)(A+1)M+2f_0+FM+h_0F+H(2f_0+FM))\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

Для оператора $\mathrm{A}^2[u](x^j,t)$ дістанемо аналогічну оцінку. Якщо ж $i=3$, то

$$\left|\Delta_j \mathrm{A}^3[u](x^j,t)\right| \le (k_0M(1+2L(s_0+1))+2f_0+FM))\,|\,\Delta x^j\,|\,.$$

Використовуючи встановлені вище оцінки для $\mathrm{A}^i[u](x^j,t),\ i\in\{1,2,3\}$, маємо:

$$\left|\Delta_j \mathrm{A}[u](x^j,t)\right| \le (\mathrm{B}_1L+\mathrm{B}_2)\,|\,\Delta x^j\,|, \tag{24}$$

де

$\mathrm{B}_1 = 2k_0M(s_0+1)+(2H+g_0(A+1))(2+M(A+1))+(A+1)(h_0+g_0(M+2))+2g_0$,

$\mathrm{B}_2 = k_0M+g_0(2+M(A+1))+2f_0(H+1)+F(h_0+MH)$.

Тепер розглянемо $\Delta_j \mathrm{A}^1[u](x,t^j)$:

$$|\,\Delta_j \mathrm{A}^1[u](x,t^j)\,| = |\,\Delta_j K_1^0(\chi_1^{t^j}[u],u_1(s_1(\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]),u_2(s_2(\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))\,|+$$

$$+\,|\,\Delta_j h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))(u_3(\phi_3^{t^j}[u](\chi_3^{t^j}[u]),\chi_3^{t^j}[u])-u_3(\phi_1^{t^j}[u](\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))\,|+$$

$$+\left|\Delta_j\int\limits_{\chi_1^{t^j}[u]}^{t^j}\frac{dg_3^1(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau)-\right.$$

$$\left.-u_3(\phi_1^{t^j}[u](\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))d\tau\right|+\left|\Delta_j\int\limits_{\chi_1^{t^j}[u]}^{t^j}f_1(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right|+$$

$$+\left|\Delta_j h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))\int\limits_{\chi_3^{t^j}[u]}^{t^j}f_3(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right|.$$

Розглянемо точки $(x,t^1),(x,t^2)\in\Omega_{T_0}$. Нехай $t^2\ge t^1$. Тоді існує x^3 таке, що $x^3=\phi_i(t^1;x,t^2,u(x,t^2))$, тобто точки $(x,t^2),(x^3,t^1)$ лежать на одній характеристиці

$$x^3=x+\int\limits_{t^2}^{t^1}a_{ii}\left(\phi_i(\tau;x,t^2,u(x,t^2)),\tau,u(\phi_i(\tau;x,t^2,u(x,t^2),\tau))\right)d\tau.$$

Тому $\phi_i(\tau;x,t^2,u(x,t^2))=\phi_i(\tau;x^3,t^1,u(x^3,t^1))$ або $\phi_i^{x,t^2}=\phi_i^{x^3,t^1}$ і має місце оцінка

$$|x^3-x|\le A|t^1-t^2|.$$

Отже, використовуючи ліпшицевість за x та враховуючи, що (x^3,t^1), (x,t^2) лежать на одній характеристиці, одержимо:

a) з урахуванням 2) леми 5 матимемо

$$|\Delta_j K_1^0(\chi_1^{t^j}[u],u_1(s_1(\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]),u_2(s_2(\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))|\le$$

$$\le k_0AM(1+2L(s_0+1))\,|\Delta t^j|;$$

b) враховуючи пункти 2) та 4) леми 2 та пункт 2) леми 5, маємо:

$$|\Delta_j h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))(u_3(\phi_3^{t^j}[u](\chi_3^{t^j}[u]),\chi_3^{t^j}[u])-u_3(\phi_1^{t^j}[u](\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))|\le$$

$$\le|\Delta_j h_{13}(t^j,t,u(x,t^j))\|u_3(\phi_3^{t^1}[u](\chi_3^{t^1}[u]),\chi_3^{t^1}[u])-u_3(\phi_1^{t^1}[u](\chi_1^{t^1}[u]),\chi_1^{t^1}[u])|+$$

$$+|h_{13}(x,t^2,u(x,t^2))\|\Delta_j(u_3(\phi_3^{t^j}[u](\chi_3^{t^j}[u]),\chi_3^{t^j}[u])-u_3(\phi_1^{t^j}[u](\chi_1^{t^j}[u]),\chi_1^{t^j}[u]))|\le$$

$$\le(h_0L(A+1)+2HL(2F+(A+1)AM))\,|\Delta t^j|;$$

c) застосовуючи ліпшицевість оператора A за x та леми 3; 4, отримаємо:

$$\left|\Delta_j\int\limits_{\chi_1^{t^j}}^{t^j}\frac{dg_3^1(\phi_1^{t^j}(\tau),\tau,u(\phi_1^{t^j}(\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1^{t^j}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{t^j}(\chi_1^{t^j}),\chi_1^{t^j}))d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{\chi_1^{x,t^1}}^{t^1}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x,t^1}(\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^1}(\tau),\tau)}{d\tau}\left(u_3(\phi_1^{x,t^1}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x,t^1}(\chi_1^{x,t^1}),\chi_1^{x,t^1})\right)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\chi_1^{x^3,t^1}}^{t^1}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau,u(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau))}{d\tau}\left(u_3(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^3,t^1}(\chi_1^{x^3,t^1}),\chi_1^{x^3,t^1})\right)d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{\chi_1^{x^3,t^1}}^{t^1}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau,u(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau)}{d\tau}\left(u_3(\phi_1^{x^3,t^1}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x^3,t^1}(\chi_1^{x^3,t^1}),\chi_1^{x^3,t^1})\right)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_{\chi_1^{x,t^2}}^{t^2}\frac{dg_3^1(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau))}{d\tau}(u_3(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x,t^2}(\chi_1^{t^2}),\chi_1^{t^2}))d\tau\right|\le$$

$$\le(2g_0(1+L)+2g_0(1+L)L(A+1)T_0+g_0(1+L)(A+1)L(2+M(A+1))T_0+$$

$$+g_0(1+L)(A+1)M)\,|\,x^3-x\,|+$$

$$+\int_{t^1}^{t^2}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau))}{d\tau}\left(u_3(\phi_1^{x,t^2}(\tau),\tau)-u_3(\phi_1^{x,t^2}(\chi_1^{x,t^2}),\chi_1^{x,t^2})\right)\right|d\tau\le$$

$$\le(2g_0A(1+L)+2g_0LA(A+1)+g_0A(A+1)L(2+MA(A+1))+$$

$$+g_0(1+L)A(A+1)M+g_0(A+1)(L+1))\,|\,\Delta t^j\,|;$$

d) застосовуючи пункт 2) леми 2, маємо:

$$\left|\Delta_j\int_{\chi_1^{t^j}[u]}^{t^j}f_1(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{t^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int_{\chi_1^{x,t^1}[u]}^{t^1}f_1(\phi_1^{x,t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^1}[u](\tau),\tau)d\tau-\int_{\chi_1^{x^3,t^1}[u]}^{t^1}f_1(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau))d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{\chi_1^{x^3,t^1}[u]}^{t^1}f_1(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau)d\tau-\int_{\chi_1^{x,t^2}[u]}^{t^2}f_1(\phi_1^{x,t^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^2}[u](\tau),\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le\int_{t^1}^{\chi_1^{x,t^2}[u]}|\,f_1(\phi_1^{x,t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^1}[u](\tau),\tau))-f_1(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x^3,t^1}[u](\tau),\tau))\,|\,d\tau+$$

$$+\int_{t^1}^{t^2}|\,f_1(\phi_1^{x,t^2}[u](\tau),\tau,u(\phi_1^{x,t^2}[u](\tau),\tau))\,|\,d\tau\le$$

$$\le 2f_0(1+L)\,|\,x^3-x\,|\,T_0+F\,|\,\Delta t^j\,|\le(f_0A+F)\,|\,\Delta t^j\,|;$$

e) використовуючи оцінку пункту d), отримаємо:

$$\left|\Delta_j h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))\int_{\chi_3^{t^j}[u]}^{t^j}f_3(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\Delta_j h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))\right|\left|\int_{\chi_3^{t^1}[u]}^{t^1}f_3(\phi_3^{t^1}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{t^1}[u](\tau),\tau))d\tau\right|+$$

$$+\left|h_{13}(x,t^j,u(x,t^j))\right|\left|\int\limits_{\chi_3^{t^j}[u]}^{t^j} f_3(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau,u(\phi_3^{t^j}[u](\tau),\tau))d\tau\right| \le (h_0F+H(f_0A+F))\,|\,\Delta t^j\,|\,.$$

Ураховуючи встановлені оцінки в пунктах а)–е), олержимо:

$$|\,\Delta_j\mathrm{A}^1[u](x,t^j)\,|\le (k_0AM(1+2L(s_0+1))+h_0L(A+1)+2HL(2F+(A+1)AM)+$$
$$+2g_0A(1+L)+2g_0LA(A+1)+g_0A(A+1)L(2+MA(A+1))+g_0(1+L)A(A+1)M+$$
$$+g_0(A+1)(L+1)+f_0A+F+h_0F+H(f_0A+F))\,|\,\Delta t^j\,|\,.$$

Для $|\,\Delta_j\mathrm{A}^2[u](x,t^j)\,|$ отримаємо таку ж оцінку. Якщо ж $i=3$, то

$$|\,\Delta_j\mathrm{A}^3[u](x,t^j)\,|\le (k_0AM(1+2L(s_0+1))+f_0A+F)\,|\,\Delta t^j\,|\,.$$

Отже, для $\mathrm{A}[u](x,t^j)$ маємо:

$$|\,\Delta_j\mathrm{A}[u](x^j,t)\,|\le (\mathrm{B}_3L+\mathrm{B}_4)\,|\,\Delta t^j\,|, \tag{25}$$

де $\mathrm{B}_3 = 2k_0AM(s_0+1)+h_0(A+1)+2H(2F+(A+1)AM)+2g_0A(A+2)+$

$$+g_0A(A+1)(2+MA(A+1))+g_0(A+1)(AM+1),$$

$$\mathrm{B}_4 = k_0AM+2g_0A+g_0(A+1)(AM+1)+f_0A(H+1)+F(1+h_0+H)\,.$$

Згідно з оцінками (24) та (25), вибравши L^* таким, що

$$L^*\ge\frac{\max\{\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_4\}}{1-\max\{\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_3\}}, \tag{26}$$

забезпечимо виконання умови H1 оператора $\mathrm{A}[u]$.

Тепер встановимо умови, за яких $\mathrm{A}[u]$ задовольняє обмеження H2.

Розглянемо оператор $\mathrm{A}^1[u]$. Тоді

$$\left|\mathrm{A}^1[u](x,t)-u_1^0\right|\le$$
$$|\,K_1^0(\chi_1[u],u_1(s_1(\chi_1[u]),\chi_1[u]),u_2(s_2(\chi_1[u]),\chi_1[u]))-K_1^0\left(0,u_1^0,u_2^0\right)|$$
$$+\left|h_{13}(x,t,u(x,t))\right|\left|u_3(\phi_3[u](\chi_3[u]),\chi_3[u])-u_3(\phi_1[u](\chi_1[u]),\chi_1[u])\right|+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))}{d\tau}\right|\left|u_3(\phi_1[u](\tau),\tau)-u_3(\phi_1[u](\chi_1),\chi_1)\right|d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_1[u]}^{t}\left|f_1(\phi_1[u](\tau),\tau,u(\phi_1[u](\tau),\tau))\right|d\tau+$$
$$+\,|\,h_{13}(x,t,u(x,t))\,|\int\limits_{\chi_3[u]}^{t}\left|f_3(\phi_3[u](\tau),\tau,u(\phi_3[u](\tau),\tau))\right|d\tau\le$$
$$\le k_0(T_0+2U)+HL^*(A+1)T_0+g_0(A+1)(L^*+1)T_0+FT_0+HFT_0\le$$
$$\le 2k_0U+(k_0+HL^*(A+1)+g_0(A+1)(L^*+1)+F+HF)T_0.$$

Якщо $i=2$, то оцінка буде подібною, як і для $\left|\mathrm{A}^1[u](x,t)-u_1^0\right|$. Для $\mathrm{A}^3[u]$ отримаємо оцінку

$$\left|\mathrm{A}^3[u](x,t)-u_3^0\right|\le k_0(T_0+2U)+FT_0.$$

У результаті маємо:

$$\left|\mathrm{A}[u](x,t)-u^0\right|\le 2k_0U+(k_0+HL^*(A+1)+g_0(A+1)(L^*+1)+F+HF)T_0.$$

Виберемо достатньо мале T_0 так, щоб виконувалась нерівність

$$T_0 \le \frac{1}{k_0 + HL^*(A+1) + g_0(A+1)(L^*+1) + F + HF}, \tag{27}$$

і зафіксуємо

$$U^* \ge \frac{1}{1-2k_0}, \tag{28}$$

враховуючи, що $k_0 < \frac{1}{2}$.

Отже,

$$\left| \mathrm{A}[u](x,t) - u^0 \right| \le U^*.$$

Таким чином, показано, що оператор $\mathrm{A}[u]$ переводить метричний простір Q в себе.

Тепер дослідимо стискальні властивості цього оператора.

Нехай $i = 1$, тоді розглянемо $\Delta_j \mathrm{A}^1[u^j](x,t)$:

$$| \Delta_j \mathrm{A}^1[u^j](x,t) | = | \Delta_j K_1^0(\chi_1[u^j], u_1^j(s_1(\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j]), u_2^j(s_2(\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) | +$$

$$+ | \Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t))(u_3^j(\phi_3[u^j](\chi_3[u^j]), \chi_3[u^j]) - u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) | +$$

$$+ | \Delta_j \int\limits_{\chi_1[u^j]}^{t} \frac{dg_3^1(\phi_1[u^j](\tau), \tau, u^j(\phi_1[u^j](\tau), \tau))}{d\tau} (u_3^j(\phi_1[u^j](\tau), \tau) -$$

$$- u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) d\tau | + | \Delta_j \int\limits_{\chi_1[u^j]}^{t} f_1(\phi_1[u^j](\tau), \tau, u^j(\phi_1[u^j](\tau), \tau)) d\tau | +$$

$$+ | \Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t)) \int\limits_{\chi_3[u^j]}^{t} f_3(\phi_3[u^j](\tau), \tau, u^j(\phi_3[u^j](\tau), \tau)) d\tau |.$$

Нехай для визначеності $\chi_i[u^1] > \chi_i[u^2]$. Оцінимо кожен з доданків:

i) врахувавши пункт 3) леми 5, оцінимо спочатку $| \Delta_j K_1^0 |$:

$$| \Delta_j K_1^0(\chi_1[u^j], u_1^j(s_1(\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j]), u_2^j(s_2(\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) | \le$$

$$\le (k_0 a_0 M T_0 + 2(k_0 + k_0 a_0 M L(s_0+1) T_0))\rho;$$

ii) використавши пункти 3) та 4) леми 2 та пункт 3) леми 5, маємо:

$$| \Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t))(u_3^j(\phi_3[u^j](\chi_3[u^j]), \chi_3[u^j]) - u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) | \le$$

$$\le | \Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t)) || (u_3^1(\phi_3[u^1](\chi_3[u^1]), \chi_3[u^1]) - u_3^1(\phi_1[u^1](\chi_1[u^1]), \chi_1[u^1])) | +$$

$$+ | h_{13}(x,t,u^2(x,t)) || \Delta_j (u_3^j(\phi_3[u^j](\chi_3[u^j]), \chi_3[u^j]) - u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) | \le$$

$$\le h_0 L^2 (A+1) T_0 \rho + H\rho + HL(2a_0 + a_0(A+1)M) T_0 \rho;$$

iii) застосувавши пункти 3), 4) леми 2, леми 3 та 4 і пункт 3) леми 5, одержимо:

$$| \Delta_j \int\limits_{\chi_1[u^j]}^{t} \frac{dg_3^1(\phi_1[u^j](\tau), \tau, u^j(\phi_1[u^j](\tau), \tau))}{d\tau} (u_3^j(\phi_1[u^j](\tau), \tau) - u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]), \chi_1[u^j])) d\tau | \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\chi_1^{u^1}}^{t} \frac{dg_3^1(\phi_1[u^1](\tau), \tau, u^1(\phi_1[u^1](\tau), \tau))}{d\tau} (u_3^1(\phi_1[u^1](\tau), \tau) - u_3^1(\phi_1[u^1](\chi_1[u^1]), \chi_1[u^1])) - \right.$$

$$-\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u^2(\phi_1[u^2](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3^2(\phi_1[u^2](\tau),\tau)-u_3^2(\phi_1[u^2](\chi_1[u^2]),\chi_1[u^2]))d\tau\Bigg| +$$

$$+\left|\int_{\chi_1[u^2]}^{\chi_1[u^1]}\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u(\phi_1[u^2](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3^2(\phi_1[u^2](\tau),\tau)-u_3^2(\phi_1[u^2](\chi_1[u^2]),\chi_1[u^2]))d\tau\right| \le$$

$$\le\left|\int_{\chi_1[u^1]}^{t}\frac{\Delta_j dg_3^1(\phi_1[u^j](\tau),\tau,u(\phi_1[u^j](\tau),\tau))}{d\tau}(u_3^1(\phi_1[u^1](\tau),\tau)-u_3^1(\phi_1[u^1](\chi_1[u^1]),\chi_1[u^1]))d\tau\right| +$$

$$+\Bigg|\int_{\chi_1[u^1]}^{t}\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u(\phi_1[u^2](\tau),\tau))}{d\tau}(|\,\Delta_j u_3^j(\phi_1[u^j](\tau),\tau)\,| +$$

$$+\,|\,\Delta_j u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]),\chi_1[u^j])\,|)d\tau\Bigg| +$$

$$+\left|\int_{\chi_1[u^2]}^{\chi_1[u^1]}\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2(\tau),\tau,u(\phi_1[u^2(\tau),\tau))}{d\tau}(u_3^2(\phi_1[u^2](\tau),\tau)-u_3^2(\phi_1[u^2](\chi_1[u^2]),\chi_1[u^2]))d\tau\right| \le$$

$$\le\left|\Delta_j g_3^1(\phi_1^{u^j}(t),t,u(\phi_1^{u^j}(t),t))\right|\left|u_3^1(\phi_1[u^1](t),t)-u_3^1(\phi_1[u^1](\chi_1[u^1]),\chi_1[u^1])\right| +$$

$$+\int_{\chi_1[u^1]}^{t}\left|\Delta_j g_3^1(\phi_1^{u^j}(\tau),\tau)\right|\left|\frac{du_3^1(\phi_1[u^1](\tau),\tau)}{d\tau}\right|d\tau +$$

$$+\int_{\chi_1[u^1]}^{t}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u(\phi_1[u^2](\tau),\tau))}{d\tau}\right|\times$$

$$\times\left(\left|\Delta_j u_3^j(\phi_1[u^1](\tau),\tau)\right|+\left|\Delta_j u_3^j(\phi_1[u^j](\chi_1[u^j]),\chi_1[u^j])\right|\right)d\tau +$$

$$+\int_{\chi_1[u^2]}^{\chi_1[u^1]}\left|\frac{dg_3^1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u(\phi_1[u^2](\tau),\tau)}{d\tau}\right|\left|u_3^2(\phi_1[u^2](\tau),\tau)-u_3^2(\phi_1[u^2](\chi_1[u^2]),\chi_1[u^2])\right|d\tau \le$$

$$\le (g_0L(A+1)(8+M(A+1))+g_0a_0(2+M(A+1))(1+L))T_0\rho;$$

iv) врахувавши пункти 3) леми 2 та пункт 3) леми 5, отримаємо:

$$|\,\Delta_j\int_{\chi_1[u^j]}^{t}f_1(\phi_1[u^j](\tau),\tau,u^j(\phi_1[u^j](\tau),\tau))d\tau\,|\le\left|\int_{\chi_1^{u^1}}^{t}\Delta_j f_1(\phi_1[u^j](\tau),\tau,u^j(\phi_1[u^j](\tau),\tau))d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_{\chi_1[u^2]}^{\chi_1[u^2]}f_1(\phi_1[u^2](\tau),\tau,u(\phi_1[u^2](\tau),\tau))d\tau\right|\le(2f_0+a_0FM)T_0\rho;$$

v) на основі оцінки в пункті iv) одержимо:

$$\left|\Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t))\int_{\chi_3[u^j]}^{t}f_3(\phi_3[u^j](\tau),\tau,u^j(\phi_3[u^j](\tau),\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\Delta_j h_{13}(x,t,u^j(x,t))\right|\left|\int_{\chi_3[u^1]}^{t}f_3(\phi_3[u^1](\tau),\tau,u^1(\phi_3[u^1](\tau),\tau))d\tau\right| +$$

$$+\left|h_{13}(x,t,u^2(x,t))\right|\left|\Delta_j \int\limits_{\chi_3[u^j]}^{t} f_3(\phi_3[u^j](\tau),\tau,u^j(\phi_3[u^j](\tau),\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le (h_0F + 2f_0H + a_0FM)T_0\rho.$$

З урахуванням оцінок, отриманих у пунктах i) – v), маємо:

$$|\Delta_j \mathrm{A}^1[u^j](x,t)| \le (2k_0 + H)\rho + (k_0a_0M + 2k_0a_0ML(s_0+1) + h_0L^2(A+1) +$$

$$+HL(2a_0 + a_0(A+1)M) + g_0L(A+1)(8 + M(A+1)) +$$

$$+g_0a_0(2 + M(A+1))(1+L) + 2f_0(H+1) + 2a_0FM + h_0F)T_0\rho.$$

Для оператора $\mathrm{A}^2[u^j](x,t)$ оцінка буде аналогічна, а для $i = 3$

$$|\Delta_j \mathrm{A}^3[u^j](x,t)| \le 2k_0\rho + (k_0a_0M + 2k_0a_0ML(s_0+1) + 2f_0 + a_0FM)T_0\rho.$$

Отже, для оператора $\mathrm{A}[u^j](x,t)$ справедлива оцінка

$$|\Delta_j \mathrm{A}[u^j](x,t)| \le (2k_0 + H)\rho + \Im T_0\rho,$$

де $\Im = k_0a_0M + 2k_0a_0ML(s_0+1) + h_0L^2(A+1) + HL(2a_0 + a_0(A+1)M) +$

$+g_0L(A+1)(8 + M(A+1)) + g_0a_0(2 + M(A+1))(1+L) + 2f_0(H+1) + 2a_0FM + h_0F$.

Якщо виконується нерівність

$$(2k_0 + H) + \Im T_0 < 1, \tag{29}$$

то оператор $\mathrm{A}[u]$ буде стискальним. Виконання умови (29) забезпечимо нерівністю

$$2k_0 + H < 1,$$

а T_0 вибираємо згідно із (22), (23) і (27) та

$$T_0 < \frac{1-(2k_0+H)}{\Im}.$$

Тоді за теоремою Банаха про стискальне відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathrm{A}[u](x,t)$ у просторі $Q(T_0,U,L)$, яка і буде узагальненим розв'язком задачі (1), (3)–(6). Теорема доведена.

1. *Казаков К. Ю., Морозов С. Ф.* О разрешимости одномерной задачи аэроупругости // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 8. – С. 66–69.
2. *Кирилич В. М.* Деякі нелінійні задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 125–134.
3. *Кирилич В. М., Филимонов А. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Матем. студії. – 2008 – 30, № 1. – С. 42–60.
4. *Рождественский Б. Л.* Построение разрывных решений систем квазилинейных уравнений. II // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1963. – 3, № 1. – С. 79–98.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. *Сидоренко А. Д.* Вариант задачи с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – 9, № 4. – С. 744–777.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
8. *Черевко В. А., Кизилова Н. Н.* Механизмы агрегации и оседание частиц агрегирующих суспензий в неоднородном поле сил. // Совр. проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информ. технологиях. Междунар.

конф. "Тараповские чтения". Харьков, 17–22 апреля 2011 г, Харьков: Апостроф, 2011. – С. 111–112.

9. *Chen X., Gui S., Friedman A.* A hyperbolic free boundary problem modeling tumor growth: asymptotic behavior // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – 357, № 12. – P. 4771–4804.

10. *Wang K.* Exact boundary controllability for a kind of second-order quasilinear hyperbolic systems // Chin. Ann. Math. – 2011. – 32B, № 4. – P. 803–822.

ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С использованием метода характеристик и принципа Банаха о неподвижной точке установлены условия существования и единственности локального обобщенного решения краевой задачи для вырожденной гиперболической системы трех квазилинейных уравнений в криволинейном секторе.

THE PROBLEM WITH MOVABLE BOUNDARIES FOR DEGENERATE HYPERBOLIC SYSTEM OF QIASOLINEAR EQUATION

Applying the method of characteristics and the Banach foxed point theorem, the conditions of existence and uniqueness of a local weak solution of problem for degenerate quasilinear hyperbolic system of three equations in curvilinear sector are established.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Одержано
05.09.12